Exercice 1 *Équations de Maxwell*

i) Avec la définition du tenseur champ $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, où $A^\mu = (\Phi, c\mathbf{A})^T$, vérifier que les équations

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c\varepsilon_0} j^\nu \tag{1}$$

$$\frac{1}{2}\partial_\mu \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 0, \tag{2}$$

où $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ est le symbole de Lévi-Cività

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ une permutation paire de } (0123) \\ -1 & \text{si } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ une permutation impaire de } (0123) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

décrivent les équations de Maxwell.

ii) Définissons la transformée de Lorentz de $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ comme suit:

$$\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \Lambda^\rho{}_\gamma \Lambda^\sigma{}_\delta \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Montrez que $\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} = \det(\Lambda)\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ et $\det(\Lambda) = \pm 1$.

iii) À l'aide des résultats obtenus montrez explicitement que les équations de Maxwell (1) et (2) sont invariantes de Lorentz.

Exercice 2 *Invariants de Lorentz*

- En utilisant le tenseur champ $F_{\mu\nu}$ construire deux invariants de Lorentz quadratiques dans les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$.
- Considérons un tenseur $T^{\mu\nu}$ donné. Contruisez un invariant de Lorentz linéaire dans ce tenseur.

Exercice 3 *Transformation des champs électromagnétiques I*

Montrez que la transformation de Lorentz d'un champ électromagnétique $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ est donnée par

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}'_{\parallel} &= \mathbf{E}_{\parallel} \\
\mathbf{E}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{E}_{\perp} + c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) \\
\mathbf{B}'_{\parallel} &= \mathbf{B}_{\parallel} \\
\mathbf{B}'_{\perp} &= \gamma(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) \ .
\end{aligned}
$$

Application: Vérifier que $F_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} = -4c\,\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ est invariant.

Exercices à faire chez soi

Exercice 4 *Transformation des champs électromagnétiques II*

Soit un champ électromagnétique uniforme et constant $\{\mathbf{E}, \mathbf{B}\}$ exprimé dans un référentiel $\mathcal{R}$.

i) Trouver un référentiel $\mathcal{R}'$ dans lequel le champ électromagnétique transformé $\{\mathbf{E}', \mathbf{B}'\}$ est tel que $\mathbf{E}' \parallel \mathbf{B}'$.

ii) Ce problème a-t-il toujours une solution, si oui, est-elle unique?

iii) Donner les grandeurs E' et B' du champ exprimé dans $\mathcal{R}'$.

Exercice 5 *Symbole de Lévi-Cività*

Vérifiez les équations suivantes en trouvant la valeur de N_1,N_2 et N_3:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = N_1, \\
&\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} = N_2\delta^{\mu}_{\alpha}, \\
&\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\varepsilon_{\alpha\beta\rho\sigma} = N_3\left(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}\right) .
\end{aligned}
$$

Exercice 6 *Composition des vitesses*

Retrouver la loi de composition des vitesses, dans le cas relativiste, en utilisant le quadri-vecteur vitesse.