Exercice 1 *Définition des potentiels scalaires et potentiels vecteurs*

i) Montrer que pour tout champ vectoriel $\mathbf{V}(x^i)$ satisfaisant $\nabla \times \mathbf{V} = 0$ il est possible de définir un *potentiel scalaire* $\phi(x^i)$ tel que $\mathbf{V} = -\nabla\phi$. Montrez que ceci s'applique en électrostatique pour le champ électrique $\mathbf{E}$.

ii) De manière analogue, montrer que pour tout champ vectoriel $\mathbf{V}(x^i)$ satisfaisant $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ il est possible de définir un *potentiel vecteur* $\mathbf{A}(x^i)$ tel que $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{A}$. Montrez que ceci s'applique en magnétostatique pour le champ magnétique $\mathbf{B}$.

Exercice 2 *Rappels d'électrostatique: cylindre chargé*

On considère un cylindre infini de rayon R , qui est chargé uniformément sur tout son volume avec une densité linéique de charge κ.

i) En utilisant la symétrie du problème, calculer le champ électrique $\mathbf{E}$ et en déduire le potentiel scalaire ϕ.

ii) Trouver le potentiel scalaire ϕ en résolvant l'équation de Poisson.

Exercice 3 *Transformations de jauge*

i) Montrer que les potentiels

$$\phi = 0 \qquad\qquad \mathbf{A} = \frac{B}{2}\,(-y, x, 0)^T$$
$$\phi' = 0 \qquad\qquad \mathbf{A}' = B\,(0, x, 0)^T$$

sont équivalents et représentent tous deux un champ magnétique constant $\mathbf{B} = B\mathbf{e_z}$ et un champ électrique zéro. Trouver la transformation de jauge correspondante.

ii) Montrer que les potentiels

$$\phi = -\mathbf{E_0} \cdot \mathbf{r}\sin(\omega t) \qquad\qquad \mathbf{A} = \mathbf{0}$$
$$\phi' = 0 \qquad\qquad \mathbf{A}' = \mathbf{E_0}\frac{\cos(\omega t)}{\omega}\ ,$$

sont équivalents et représentent tous deux un champ électrique oscillant $\mathbf{E} = \mathbf{E_0}\sin(\omega t)$ et un champ magnétique zéro. Trouver la transformation de jauge correspondante.

Exercice 4 *Rappels "d'électrodynamique"*

On considère le mouvement d'une distribution de charge de symétrie sphérique:

$$\rho(t,r) = \frac{\rho_0}{r^2} f(r - r_0 \sin \omega t)$$

où la fonction f est définie pour $r_0 < r_1$ et

$$f(z) = \begin{cases} (z - r_1)(r_2 - z) & , r_1 < z < r_2 \\ 0 & , \text{sinon} \end{cases}$$

i) Calculer la charge totale et montrer qu'elle est conservée.

ii) Calculer la densité de courant $\mathbf{j}(t,r)$ créée par ce système.