Groupes et symétries discrets (automne 2007)
Série 6: Projecteurs sur les représentations irréductibles.

Considérer le groupe de transformations C_{3v} et l'espace vectoriel de fonctions généré par les 4 fonctions

$$\Psi_1(\vec{r}) = x^3, \Psi_2(\vec{r}) = y^3, \Psi_3(\vec{r}) = x^2 y, \Psi_4(\vec{r}) = xy^2.$$

Le produit scalaire est défini par

$$\langle \Psi_\alpha | \Psi_\beta \rangle = \int d^2\vec{r}\, \Psi_\alpha^*(\vec{r}) \Psi_\beta(\vec{r}) e^{-|\vec{r}|}.$$

La loi de transformation d'une fonction, pour une transformation $R \in C_{3v}$, est

$$P_R \Psi(\vec{r}) = \Psi(R^{-1}\vec{r})$$

(i) Trouver, à l'aide des caractères, la decomposition en représentations irréductibles

$$\Gamma = b_1 \Gamma^{(1)} \oplus b_2 \Gamma^{(2)} \oplus b_3 \Gamma^{(3)}.$$

(ii) A l'aide des opérateurs de projection

$$\Pi_{nk}^{(j)} = \frac{l_j}{h} \sum_R \Gamma_{nk}^{(j)*}(R) P_R,$$

où $\Gamma^{(j)}(R)$ sont les matrices des représentations irréductibles, l_j leur dimension et h l'ordre du groupe, trouver les combinaisons linéaires de $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4$ qui réduisent Γ.

(iii) Vérifier l'orthogonalité des fonctions ainsi obtenues.