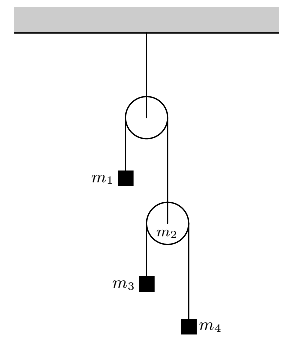
Mécanique Analytique , Série d'exercices 3

Assistants : jaap.kroes@epfl.ch & benjamin.audren@epfl.ch

Exercice 1 : Machine d'Atwood, #2



Considérer le dispositif de double poulie, présenté ci-contre, soumis à la seule action de la pesanteur.

- Donner les contraintes de ce système.
- Ecrire le Lagrangien de ce système en choisissant les positions des masses m_1 et m_3 comme coordonnées généralisées.
- Dériver les équations du mouvement de ces masses et déterminer l'accélération des masses m_1 et m_3.

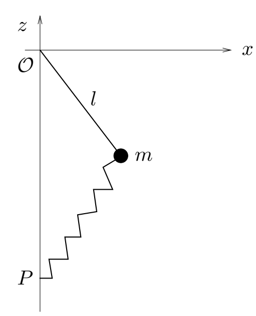
Cette description est évidemment une idéalisation qui néglige énormément d'effets. En lister quelques uns, donner un paramètre sans dimensions qui permet d'estimer l'importance de la contribution négligée et donner la limite dans laquelle elle s'annule.

Exercice 2 : Particule sur un cylindre, #2

Considérer une particule de masse m, soumise à la gravité, contrainte à se déplacer sur un cylindre vertical de rayon R.

- Donner les contraintes de ce système.
- Choisir des coordonnées généralisées et écrire le Lagrangien de ce système.
- Dériver les équations du mouvement de ce système.

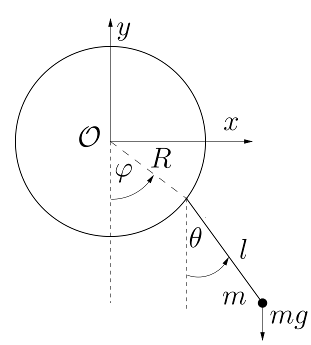
Exercice 3 : Variation autour du pendule #1



Considérer un pendule de centre $\mathcal{O}$, de longeur l avec au bout une masse m. A cette dernière on attache un ressort constante d'élasticité k et de longeur au repos d ($d \leq l$). L'autre extrémité du ressort est fixée au point P de l'axe vertical $\mathcal{O}z$, situé à une distance $2l$ du point $\mathcal{O}$. Le système ne se déplace que dans le plan vertical et est soumis à la gravité.

Ecrire le Lagrangien du système.

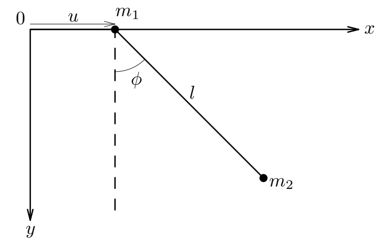
Exercice 4 : Variation autour du pendule #2



Dans un plan vertical (xy), on considère un pendule simple (longueur l, masse m) dont le point de suspension se déplace, à vitesse angulaire constante ω ($\varphi = \omega t$), sur un cercle vertical de rayon R.

- Paramétriser le système à l'aide de coordonnées généralisées ; combien en faut-il ?
- Ecrire le Lagrangien du système
- La fonction hamiltonienne est-elle conservée ?

Exercice 5 : Variation autour du pendule #3



Un pendule plan de longueur l et de masse m_2 est soumis à l'action de la pesanteur. Son point de suspension de masse m_1 peut se déplacer sans frottement sur l'axe horizontal x.

- Ecrire le Lagrangien de ce système en termes des coordonnées généralisées u et ϕ
- Etablir les équations d'Euler-Lagrange et déterminer les constantes du mouvement
- Considérer les conditions initiales $u(0) = \dot{\phi}(0) = 0$, $\dot{u}(0) = v_0$ et $\phi(0) = \alpha$,
  - Utiliser une des constantes du mouvement pour éliminer $u(t)$ (exprimer $u(t)$ en fonction de $\phi(t)$).
  - Etablir l'équation différentielle décrivant l'évolution de $\phi(t)$ et la résoudre dans l'approximation des oscillations lentes et de faible amplitude.
  - Trouver le $u(t)$ correspondant.
  - Vérifier sous quelles conditions cette solution est valable.