Groupes et symétries discrets en physique (automne 2007)
Série 2: Symétrie de l'Hamiltonien; Rappel de théorie des groupes

1. Considérer l'Hamiltonien d'une particule dans un champ de force à symétrie centrale

$$H(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(r)$$

avec

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

i) Vérifier que H est invariant sous toutes rotations-inversions dans l'espace à 3 dimensions

ii) Montrer que la dégénéréscence des niveaux $2p$ de l'atome d'hydrogène est nécessaire. La fonction d'onde de l'orbitale $2p_\alpha$ est proportionnelles à $\psi(\mathbf{r}) = \alpha f(r)$, avec $\alpha = x, y, z$.

iii) Même chose pour les orbitaux $3d$. Les fonctions d'onde sont proportionnelles aux fonctions suivantes: xy, xz, yz, $2z^2 - x^2 - y^2$, et $x^2 - y^2$.

iv) Existe-t-elle une rotation qui transforme une orbitale $2p$ en une combinaison linéaire d'orbitales $2p$ et $2s$? Si non, pourquoi ces deux niveaux sont dégénérés pour l'atome d'hydrogène?

2. Considérer un groupe fini d'ordre 6.

i) Ecrire les tables de multiplication possibles pour ce groupe. Vérifier qu'il y a seulement deux tables de multiplication possibles, qui correspondent respectivement à un groupe abélien et a un groupe non-abélien.

ii) Montrer que le groupe non-abélien ainsi trouvé est isomorphe au groupe des permutations de trois éléments.

iii) Montrer qu'il est également isomorphe au groupe C_{3v} des symétries de la molécule d'ammoniac vu dans la série précédente.

iv) Trouver les classes de conjugaison de C_{3v}. Elles seront indiquées par $C_1 = E$, C_2,... Etablir la décomposition de chaque possible produit de deux classes:

$$C_i \cdot C_j = \sum_k n_{ijk} C_k$$