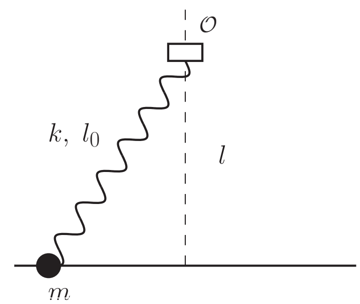
Mécanique Analytique , Série d'exercices 1

Assistants : jaap.kroes@epfl.ch & benjamin.audren@epfl.ch

Ce cours va vous donner une nouvelle formulation de la mécanique classique. Afin de (re-)comprendre la physique, il est nécessaire de savoir anticiper et vérifier le résultat. C'est dans cette optique que sont écrits les exercices 1 & 3 sur l'analyse dimensionnelle.

Exercice 1 : Newton & approximations

Considérons le système suivant : un anneau de masse $m = 0.3\,\text{kg}$ est attaché à un ressort de constante $k = 1\,\text{N/m}$ et de longueur au repos $l_0 = 50$, $150\,\text{cm}$ qui est susceptible de se mouvoir sans frottement sur un fil droit qui est éloigné d'une distance $l = 1$ m du point d'ancrage $\mathcal{O}$ du ressort.



Comme souvent durant ce cours, nous allons nous intéresser aux petites oscillations autour d'un point d'équilibre. Par analyse dimensionnelle, donner la forme la plus générale possible de la fréquence d'oscillation ω. Quelle serait la différence si le fil n'était pas droit, mais avait une forme décrite par une longueur typique R ?

On va à présent résoudre ce problème explicitement dans les deux cas $l_0 = 50,\ 150\,\text{cm}$:

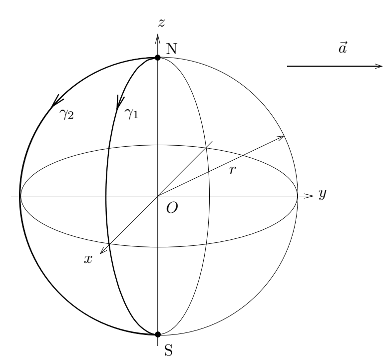
1. Exprimer les forces agissant sur la masse et établir les équations du mouvement.
2. Trouver les points d'équilibre.
3. Faire l'approximation de petits déplacements autour des positions d'équilibre, dire s'ils sont stables. Quel type de mouvement obtient-on ?
4. Pour $l_0 = 50$ cm, calculer la correction suivante et estimer le rayon de validité de l'approximation quadratique.

Exercice 2 : Champ de force

Considérer les champs de force suivants :

$$\vec{F}_1 = \frac{\vec{a} \times \vec{r}}{r^2}\ , \qquad\qquad \vec{F}_2 = \alpha \frac{\vec{r}}{r^3}\ ,$$

où $\vec{a} = a\hat{e}_y$ un vecteur constant.



1. Calculer la divergence et le rotationnel de $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$, en tout point $\vec{r} \neq \vec{0}$.
2. Ces champs de forces sont-ils conservatifs ? Si c'est le cas, donner le potentiel dont ils découlent.
3. Calculer le travail de chacune des forces le long des arcs de cercle γ_1 et γ_2.

Exercice 3 : Pythagore

Démontrer le théorème de Pythagore dans le plan par analyse dimensionnelle. Expliquer, dans cette approche, ce qui change si on se trouve dans un espace avec une courbure R, discuter la limite $R \to \infty$.

Complément 1 : Petit résumé d'analyse vectorielle

On introduit l'opérateur nabla : $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$, dont les composantes sont notées $\vec{\nabla}_i = \partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Il se manipule comme un vecteur, en particulier on peut l'appliquer avec un produit scalaire ou vectoriel sur un vecteur $\vec{V}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \text{div } \vec{V} \qquad \text{et} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\text{rot}}\ \vec{V}$$

ou encore sur une fonction scalaire :

$$\vec{\nabla} f = \vec{\text{grad}}\ f$$

Les opérateurs $\vec{\text{rot}}$ et $\vec{\text{grad}}$ donnent des vecteurs, alors que div donne un scalaire. Enfin on a aussi le Laplacien :

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$$

De ces définitions on peut déduire plusieurs règles de calcul, dont certaines sont listées ici.

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = 0 \qquad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \cdot f) = 0 \qquad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V}}$$

Les différentes dérivées de produits deviennent :

$$\begin{array}{ll} \vec{\nabla}(fg) = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f & \vec{\nabla}(\vec{V} \cdot \vec{W}) = (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})\vec{W} + \vec{V} \times (\vec{\nabla} \times \vec{W}) + (\vec{V} \leftrightarrow \vec{W}) \\ \vec{\nabla} \cdot (f\vec{V}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{V} + (\vec{\nabla}f)\vec{V} & \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \times \vec{W}) = \vec{W} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{V}) - \vec{V} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{W}) \\ \vec{\nabla} \times (f\vec{V}) = f\vec{\nabla} \times \vec{V} + (\vec{\nabla}f) \times \vec{V} & \vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{W}) = (\vec{W} \cdot \vec{\nabla})\vec{V} + \vec{V}(\vec{\nabla} \cdot \vec{W}) - (\vec{V} \leftrightarrow \vec{W}) \end{array}$$

Les deux principaux résultats d'analyse vectorielle sont :

Théorème de Gauss

$$\boxed{\iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{f}\ \mathrm{d}\omega = \iint_{\partial V} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{s}}$$

Théorème de Stokes

$$\boxed{\oint_C \vec{V} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \mathrm{d}\vec{s}}$$

Complément 2 : Notation tensorielle

Les résultats ci-dessus sont le plus facilement démontrés (et utilisés !) en utilisant une notation tensorielle. On note alors les composantes des vecteurs explicitement, $\vec{v} = v_i \hat{e}_i$, en laissant implicite la sommation sur des indices répétés (convention d'Einstein). Deux tenseurs sont imporants :

$$\delta \text{ de Kronecker} \quad : \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Levi-Civita} \quad : \quad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (ijk) \text{ permutation paire de } (123) \\ -1 & \text{si } (ijk) \text{ permutation impaire de } (123) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On peut alors réécrire les produits :

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{w} &= v_i w_j \delta_{ij} = v_i w_i \\ \vec{v} \times \vec{w} &= \epsilon_{ijk} \hat{e}_i v_j w_k \end{aligned}$$

Et finalement on a le résultat important suivant :

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

A noter également que ϵ_{ijk} est totalement antisymétrique : $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{ikj}$.

Complément 3 : Développements de Taylor à savoir

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} \frac{1}{1-x} &=& 1 + x + x^2 + \ldots & \sqrt{1+x} &=& 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots \\ e^x &=& 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots & \ln(1+x) &=& x - \frac{1}{2}x^2 + \ldots \\ \sin(x) &=& x - \frac{1}{6}x^3 + \ldots & \cos(x) &=& 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots \\ \sinh(x) &=& x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots & \cosh(x) &=& 1 + \frac{1}{2}x^2 + \ldots \end{array}$$