

Champs Quantiques Relativistes

Notes du cours du Professeur *Mikhail Shaposhnikov*

Sven Bachmann

2007

*Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Faculté des Sciences de Base, Section de Physique
Institut de Théorie des Phénomènes Physiques
Laboratoire de Physique des Particules et de Cosmologie*

Table des matières

I	Les Champs Libres	1
1	Champs classiques	3
1.1	Le système d'unités	3
1.2	Les interactions fondamentales	4
1.3	Les formalismes lagrangien et hamiltonien	5
1.3.1	Mécanique analytique	5
1.3.2	Des points matériels aux champs classiques	6
1.3.3	Exemples	9
2	Symétries continues et lois de conservation	11
2.1	Rappels élémentaires sur les groupes	11
2.2	Groupes de Poincaré et de Lorentz	12
2.3	Les symétries	14
2.3.1	Définition	14
2.3.2	Transformations infinitésimales	14
2.3.3	Le théorème de Noether : lois de conservation	15
3	Le champ scalaire	19
3.1	Lagrangien ; équations du mouvement	19
3.2	Invariants dynamiques	20
3.3	Théorie quantique du champ scalaire	22
3.3.1	Quantification des champs	22
3.3.2	Construction explicite de l'espace de Hilbert	23
3.3.3	Limite thermodynamique	26
3.3.4	Représentation de Heisenberg	27
3.3.5	Le spin du champ scalaire	29
3.3.6	Résumé de la démarche	29
3.4	Le champ scalaire complexe	30
3.4.1	Lagrangien et quantification	30
3.4.2	Symétries : la charge électrique	31
3.4.3	Les antiparticules	32
4	Le champ vectoriel	35
4.1	Le champ vectoriel massif	35
4.1.1	Construction de la densité lagrangienne	35
4.1.2	Nombre de champs indépendants	38
4.1.3	Invariants dynamiques : énergie et quantité de mouvement	39
4.1.4	Quantification	40

4.1.5	Le spin du champ vectoriel massif	45
4.2	Le champ vectoriel sans masse	47
4.2.1	Théorie classique	47
4.2.2	Une nouvelle symétrie : la symétrie de jauge	48
5	Le champ spinoriel	51
5.1	Groupe de Lorentz et $SL(2, \mathbb{C})$	51
5.1.1	Représentation matricielle de l'espace de Minkowski	51
5.2	Représentation de \mathcal{L}_+^\uparrow sur $MH(2, \mathbb{C})$	52
5.3	Le spineur de Dirac	53
5.3.1	Le spineur à deux composantes	53
5.3.2	Le spineur de Dirac à quatre composantes	55
5.3.3	L'équation de Dirac	56
5.3.4	La démarche historique	57
5.4	Invariants dynamiques	59
5.4.1	Le tenseur énergie-impulsion	59
5.4.2	Le moment cinétique	60
5.4.3	La charge	61
5.5	Quantification	61
5.5.1	L'équation de Dirac en représentation de Fourier	61
5.5.2	Solution dans l'espace \vec{k}	62
5.5.3	Relations d'anticommutations	64
5.5.4	Quantification canonique	66
5.5.5	Autres invariants dynamiques	66
5.5.6	Le spin	67
5.6	L'interprétation de Dirac	67
5.7	Le champ fermionique sans masse	68
5.8	Les fermions de Majorana	69
5.9	Conclusion	70
6	Symétries discrètes	71
6.1	La parité	71
6.1.1	Champ scalaire	72
6.1.2	Champ vectoriel	72
6.1.3	Champ spinoriel	73
6.2	La conjugaison de charge	74
II	Champs en interaction	77
7	Interactions et règles de Feynman	81
7.1	Collisions	81
7.1.1	La section efficace	81
7.2	Temps de vie	82
7.3	La matrice S	83
7.3.1	Définition	83
7.3.2	Matrice S et temps de vie	85
7.3.3	Matrice S et section efficace	86
7.4	La matrice S en théorie de perturbation	87
7.4.1	La série de Dyson	87

7.4.2	Exemple : la désintégration du boson de Higgs	89
7.5	Les règles de Feynman	91
7.5.1	Produit normal et théorèmes de Wick	91
7.5.2	Règles de Feynman : concept	94
7.5.3	Règles de Feynman pour la théorie $\lambda\phi^4$	95
7.5.4	Propagateurs	97
7.5.5	Règles de Feynman pour l'électrodynamique quantique	102
7.5.6	Processus en électrodynamique quantique	103
7.5.7	Quelques autres exemples	103
8	Les symétries globales	107
8.1	Groupes et algèbres de Lie	107
8.1.1	Quelques groupes de Lie matriciels	107
8.1.2	Algèbres de Lie	108
8.2	L'isospin pour le nucléon	110
8.3	L'isospin pour le pion	111
9	Symétries locales et champs de jauge	115
9.1	Le cas de l'électrodynamique quantique : groupe abélien	115
9.1.1	Le champ A_μ comme champ de jauge	115
9.1.2	L'électrodynamique quantique scalaire	117
9.2	Symétries de jauge non abéliennes	118
9.2.1	Le groupe SU(2)	118
9.2.2	Le groupe SU(3) : la chromodynamique quantique	122
9.2.3	Discussion qualitative et perspective historique	124
10	Brisures de symétrie et mécanisme de Higgs	129
10.1	Brisure d'une symétrie globale, discrète	129
10.2	Brisure d'une symétrie globale, continue	131
10.2.1	Symétrie U(1)	131
10.2.2	Symétrie U(2)	134
10.3	Symétrie locale, continue, et mécanisme de Higgs	135
11	Le Modèle Standard	139
11.1	Le modèle de Weinberg	139
11.1.1	Groupe de jauge et représentation chirale	139
11.1.2	Le Lagrangien du modèle électrofaible	141
11.1.3	Spectre de la théorie : secteur bosonique	142
11.1.4	Commentaires	144
11.1.5	Spectre de la théorie : secteur fermionique	144
11.1.6	Commentaires généraux	146
11.2	Interactions électromagnétiques	146
11.2.1	Interaction électromagnétique des fermions	147
11.2.2	Interaction électromagnétique des bosons	148
11.2.3	Interactions faibles	148
11.3	Les quarks et le Modèle Standard	150
11.3.1	Groupe de jauge et champs du Modèle Standard	151
11.3.2	Termes de Yukawa et matrice de Kobayashi-Maskawa	152
A	Exercices	157

Ce cours a pour objectif de donner une image générale de la théorie quantique de champs, ou *quantum field theory* (QFT) en anglais. L'élément clef est la mise en commun de la théorie quantique et de la relativité restreinte. En découle un champ d'application extrêmement large qui s'articule autour de trois domaines principaux :

- La physique des particules élémentaires et de leurs interactions, résumé par le Modèle Standard ;
- Le formalisme de la physique de la matière condensée, avec des applications telles que la supraconductivité, la superfluidité, les transitions de phase ;
- La physique de l'univers proche du Big Bang : fluctuations primordiales dont provient la formation de la structure de l'univers, évaporation des trous noirs (rayonnement de Hawking), etc. ;

On se concentrera ici sur le premier domaine. La première partie élabore pas à pas les notions essentielles : champs classiques libres, quantification et champs quantiques libres, classifications des différents types de champs, symétries discrètes et continues. Dans la seconde partie, on introduira les interactions fondamentales entre ces champs. En particulier, on établira la théorie des diagrammes de Feynman, qui permettront de calculer des temps de vie ou des sections efficaces. On posera les principes qui régissent la construction de Lagrangiens, ce qui permettra alors de jeter les bases du Modèle Standard de la physique des particules. On exposera ce dernier dans ses grandes lignes à la toute fin de ce cours.

On obtiendra alors une image générale de l'ensemble des interactions fondamentales à l'exception de la gravitation. Le problème d'une théorie quantique de la gravitation est toujours ouvert et fait l'objet de recherches intenses : on parle en général de physique au-delà du Modèle Standard (*physics beyond the SM*).

Remerciements Je tiens à remercier chaleureusement mon collègue François Genoud pour sa relecture attentive de ces notes et ses commentaires tant pédagogiques que conceptuels. Nous espérons tous deux que ce polycopié sera de quelque aide à ses lecteurs.

Bibliographie

1. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Cambridge University Press, 1995
2. M. E. Peskin et D. V. Schröder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, Perseus Books Publishing, 1995
3. N. N. Bogoliubov, D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields (Interscience Monographs in Physics and Astronomy)*, John Wiley & Sons, 1959
4. J. D. Drell, S. D. Bjorken, *Relativistic Quantum Mechanics (International Series in Pure & Applied Physics)*, McGraw-Hill College, 1965
5. J. P. Derendinger, *Théorie quantique des champs*, PPUR, 2001
6. D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*, John Wiley & Sons, 1987

Première partie

Les Champs Libres

Chapitre 1

Champs classiques et principe de moindre action

Après une brève introduction où nous définissons le système d'unités le plus simple qui est utilisé par la physique des hautes énergies, nous donnons une image générale du Modèle Standard de la physique des particules en guise de motivation. L'ensemble des concepts introduits ici sera développé en détail dans la suite du cours.

Avant d'attaquer le formalisme quantique, il est essentiel de comprendre le cas classique. La théorie quantique des champs provient de la quantification canonique du formalisme lagrangien classique relativiste. Les notions de mécanique analytique serviront donc de base à ce cours. En particulier, nous établirons les équations du mouvement associées à un Lagrangien quelconque à l'aide d'un principe variationnel fondamental en physique : le principe de moindre action¹.

1.1 Le système d'unités

En théorie quantique des champs, il est d'usage d'utiliser un système d'unités qui simplifie considérablement les expressions. En effet, il apparaît quatre unités différentes dans le SI :

- la longueur $[L]$ en m ,
- le temps $[t]$ en s ,
- la masse $[M]$ en kg ,
- la température $[T]$ en K .

Par ailleurs, il existe quatre constantes fondamentales, à savoir

- la vitesse de la lumière $c = 2.99 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$,
- la constante de Planck $\hbar = 1.05 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot s$,
- la constante de la gravitation $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$,
- la constante de Boltzmann $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16} \frac{\text{erg}}{K}$.

Il y a alors plusieurs choix possibles. Le plus 'extrême' d'entre eux, utilisé essentiellement en gravitation quantique et en théorie des cordes, consiste à poser $c = \hbar = G = k_B = 1$, auquel cas toutes les grandeurs deviennent sans dimension. Pour la suite de ce cours, on fera le choix de poser

$$c = \hbar = k_B = 1 \quad (1.1)$$

et de tout exprimer dans une même unité d'énergie, le $GeV = 10^9 eV$. Rappelons qu'un eV (électron-volt) est l'énergie acquise par un électron accéléré par un potentiel de $1 V$. En utilisant les contraintes

¹aussi appelé principe de Maupertuis ou principe de Hamilton.

imposées par le choix des constantes sans dimension, on peut facilement retrouver les facteurs de conversion :

$$\begin{aligned} \text{longueur : } GeV^{-1} &= 1.97 \cdot 10^{-14} \text{ cm}, \\ \text{temps : } GeV^{-1} &= 6.58 \cdot 10^{-25} \text{ s}, \\ \text{masse : } GeV^{+1} &= 1.78 \cdot 10^{-24} \text{ g}, \\ \text{température : } GeV^{+1} &= 1.16 \cdot 10^{13} \text{ K}, \\ \text{action : } GeV^0, \end{aligned}$$

et de même pour toute autre unité.

1.2 Les interactions fondamentales

La théorie actuellement acceptée par la majeure partie de la communauté repose sur quatre interactions fondamentales :

- l’interaction gravitationnelle, la plus faible de toutes, mais à laquelle sont soumises toutes les particules ;
- l’interaction faible, qui est responsable par exemple de la désintégration β ou de la désintégration du muon :

$$\begin{aligned} n &\rightarrow p + e + \bar{\nu}_e, \\ \mu^+ &\rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu ; \end{aligned}$$

- l’interaction électromagnétique, responsable de la stabilité des atomes. Un processus typique serait par exemple la désintégration du pion :

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma ;$$

- l’interaction forte, qui joue un rôle essentiel dans la stabilité des noyaux atomiques.

On notera au passage que ce cours concerne exclusivement les trois dernières, la théorie quantique en présence de gravitation représentant précisément l’un des défis principaux de la physique moderne. En conséquence, la métrique utilisée sera toujours celle de Minkowski, qu’on dénotera par

$$\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1) .$$

Chacune de ces interactions est transmise par une ou plusieurs particules qu’on appelle les *médiateurs* :

- pour l’interaction gravitationnelle, le graviton, de masse nulle et d’hélicité ± 2 ;
- pour l’interaction faible, les trois bosons intermédiaires W^\pm et Z , massifs ($m \approx 100 \text{ GeV}$) et de spin 1 ;
- pour l’interaction électromagnétique, le photon γ de masse nulle et d’hélicité ± 1 ;
- pour l’interaction forte, huit gluons eux aussi sans masse et d’hélicité ± 1 .

Finalement, toutes les autres particules se divisent en deux classes, en fonction de leur sensibilité aux différentes interactions :

- les *leptons*, qui subissent l’interaction faible et électromagnétique. Ce sont

l’électron e	$m_e \simeq 0.5 \text{ MeV}$	son neutrino ν_e	$m_\nu \neq 0, m_\nu \lesssim 1 \text{ eV}$
le muon μ	$m_\mu \simeq 105 \text{ MeV}$	son neutrino ν_μ	
le tau τ	$m_\tau \simeq 1.8 \text{ GeV}$	son neutrino ν_τ	

Tous les leptons sont des fermions de spin $\frac{1}{2}$.

- les *hadrons*, qui participent aussi à l'interaction forte. Ils sont tous constitués de quarks et d'antiquarks en de multiples combinaisons possibles. On distingue
 - les baryons constitués de trois quarks,
 - les mésons, états liés d'un quark et d'un antiquark.

On connaît six types de quarks, réunis en deux groupes qui se différencient par leur charge électrique :

	$Q = +\frac{2}{3}$		$Q = -\frac{1}{3}$
Up u	$m_u \simeq 1.5 - 4.5 \text{ MeV}$	Down d	$m_d \simeq 5 - 8 \text{ MeV}$
Charm c	$m_c \simeq 1 - 1.4 \text{ GeV}$	Strange s	$m_s \simeq 80 - 155 \text{ MeV}$
Top t	$m_t \simeq 175 \text{ GeV}$	Bottom b	$m_b \simeq 4 - 4.5 \text{ GeV}$

A nouveau, tous les quarks sont des fermions de spin $\frac{1}{2}$.

- Le Modèle Standard postule en sus une particule supplémentaire, le boson de Higgs qui n'a pas encore été observé dans les accélérateurs. Il devrait normalement se manifester dans le futur LHC actuellement en construction au CERN.

La première partie de ce cours développera les bases nécessaires à la compréhension des différents types de particules (i.e. de champs), briques qui seront utilisées dans la seconde pour revenir en détails sur la structure et la classification esquissées ici. On notera que toute la matière stable qui nous entoure est constituée uniquement de protons (uud), de neutrons (udd) et d'électrons. Parallèlement, le nombre de hadrons instables est immense. L'objectif de ce cours est une compréhension des propriétés essentielles des particules élémentaires, de leurs interactions (i.e. des processus de collision) et de leur désintégration (i.e. de leur temps de vie). On obtiendra alors une image globale de cet univers grâce au Modèle Standard.

Pour atteindre cet objectif, il suffira d'appliquer le formalisme de la théorie quantique à des systèmes de champs classiques relativistes. Commençons donc par une brève révision de mécanique analytique.

1.3 Les formalismes lagrangien et hamiltonien

Alors que la mécanique quantique traditionnelle se base principalement sur le formalisme hamiltonien, c'est le Lagrangien qui joue un rôle central en théorie quantique des champs. Avant de développer la théorie classique des champs, nous rappelons sans démonstration les principaux résultats de mécanique analytique.

1.3.1 Mécanique analytique

Pour décrire un système physique à N degrés de liberté, on choisit un ensemble de N coordonnées généralisées $\{q_i\}_{i=1}^N$. Il existe alors une fonction de ces N variables, de leurs dérivées temporelles et éventuellement du temps, qui caractérise entièrement le système : le *Lagrangien*

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\{q_i\}, \{\dot{q}_i\}, t) .$$

On définit alors l'*action* par

$$S[\{q_i\}] := \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t) . \quad (1.2)$$

Toute l'information concernant le système est entièrement contenue dans cette fonction fondamentale.

On peut finalement énoncer le principe variationnel qui régit la dynamique. Etant données les conditions de bords $q_i(t_1) = q_i^{(in)}$ et $q_i(t_2) = q_i^{(out)}$, le *principe de moindre action* postule que le système évolue de telle sorte que l'action le long de la trajectoire physique soit extrémale (en général minimale), i.e.

$$\delta S = 0 \quad \text{sur une trajectoire physique.} \quad (1.3)$$

On en déduit aisément les N équations du mouvement, ou équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad i = 1 \dots N. \quad (1.4)$$

Une formulation équivalente du problème a été proposée par Hamilton. A partir du Lagrangien, on définit les N impulsions généralisées $\{p_i\}$, conjuguées aux coordonnées $\{q_i\}$, par

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1 \dots N. \quad (1.5)$$

L'Hamiltonien est alors défini comme la transformée de Legendre du Lagrangien :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\{q_i\}, \{p_i\}, t) = p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}, \quad (1.6)$$

où les \dot{q}_i sont implicitement considérés comme des fonctions des q_i et des p_i , au travers de l'éq. (1.5). Notons que dans cette formule et dans toute la suite de ce cours, on utilisera la convention de sommation d'Einstein. Du principe de moindre action et des définitions ci-dessus, on obtient un ensemble de $2N$ équations du premier ordre, équivalentes à (1.4), les équations de Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}, \quad (1.7)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i}. \quad (1.8)$$

Finalement, on peut écrire ces équations sous une forme qui met en lumière la structure algébrique de la physique :

$$\dot{q}_i = \{\mathcal{H}, q_i\}, \quad (1.9)$$

$$\dot{p}_i = \{\mathcal{H}, p_i\}, \quad (1.10)$$

où $\{A, B\} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} - \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} \right]$ est le crochet de Poisson des deux fonctions A et B .

1.3.2 Des points matériels aux champs classiques

Jusqu'ici, nous avons considéré un système à N degrés de liberté. La notion de *champ* apparaît lorsqu'à chaque point de l'espace \vec{x} , on associe un ou plusieurs nombres réels ou complexes. On passe de q_i , $i = 1 \dots N$, à $q_{\vec{x}}$, $\vec{x} \in \mathcal{D}$, où $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. On passe donc à un nombre infini non dénombrable de degrés de liberté. Il est d'usage d'utiliser une nouvelle notation

$$q_{\vec{x}} \equiv \phi(t, \vec{x})$$

$$\dot{q}_{\vec{x}} \equiv \dot{\phi}(t, \vec{x})$$

$$p_{\vec{x}} \equiv \pi(t, \vec{x})$$

Par exemple, en électrodynamique classique, on trouve les champs suivants :

$$\begin{aligned} A^\mu(t, \vec{x}) : & \quad \text{le 4-potentiel} \\ \vec{E}(t, \vec{x}) : & \quad \text{le champ électrique} \\ \vec{B}(t, \vec{x}) : & \quad \text{le champ d'induction} \end{aligned}$$

Finalement, l'évolution du champ est complètement caractérisée par la *densité lagrangienne* $\mathcal{L}(\phi(t, \vec{x}), \partial_\mu \phi(t, \vec{x}))$ qui produit le Lagrangien par une simple intégration :

$$\mathcal{L}[\phi, \partial_\mu \phi] := \int_{\mathcal{D}} d^3x \mathcal{L}(\phi(t, \vec{x}), \partial_\mu \phi(t, \vec{x})) . \quad (1.11)$$

L'action correspondant à ce champ se note alors :

$$S[\phi, \partial_\mu \phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(t, \vec{x}), \partial_\mu \phi(t, \vec{x})) , \quad (1.12)$$

où $d^4x = dt d^3x$ est la mesure d'intégration sur le 4-volume d'espace-temps.

Notons que le passage d'un indice discret à un indice continu a fait des grandeurs comme l'action et le Lagrangien (ce serait aussi le cas de l'Hamiltonien) non plus de simples fonctions des q_i , mais des *fonctionnelles réelles* des champs ϕ et $\partial_\mu \phi$.

A partir d'ici, on notera simplement x , voire x^μ , $\mu = 0, \dots, 3$, pour le couple (t, \vec{x}) , i.e. pour les coordonnées contravariantes.

Dérivée fonctionnelle Comme les objets mathématiques que nous devons traiter sont maintenant des fonctionnelles, il s'agit d'étendre la notion de dérivée à ces nouveaux objets. Nous en donnons ici une définition restreinte, mais qui sera suffisante pour la suite de l'exposé. Soit une fonctionnelle $F[\phi]$. On définit sa dérivée fonctionnelle $\frac{\delta F[\phi(x)]}{\delta \phi(y)}$ par la généralisation du quotient de Newton suivante :

$$\frac{\delta F[\phi(x)]}{\delta \phi(y)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[\phi(x) + \epsilon \delta(x - y)] - F[\phi(y)]}{\epsilon} , \quad (1.13)$$

et on remarque qu'en général, la dérivée fonctionnelle est une distribution. En particulier, on a

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} = \delta(x - y) . \quad (1.14)$$

Equations du mouvement Par une application du principe de moindre action, $\delta S = 0$, déduisons les équations du mouvement pour le champ. Soit $S[\phi, \partial_\mu \phi]$, l'action. Considérons une solution des équations du mouvement $\phi_0(x)$, et une perturbation $\delta \phi(x)$ de cette solution :

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \delta \phi(x)$$

qui satisfasse encore les conditions de bords, i.e. $\delta \phi(x) = 0$ pour $t = t_1$ et $t = t_2$. On exige de plus que la variation soit 'locale', i.e.

$$\delta \phi(x) \longrightarrow 0 \quad (|\vec{x}| \rightarrow +\infty) .$$

Calculons la variation de l'action liée à cette perturbation :

$$\begin{aligned}
\delta S &= S[\phi + \delta\phi, \partial_\mu(\phi + \delta\phi)] - S[\phi, \partial_\mu\phi] \\
&= \int d^4x \{ \mathcal{L}[\phi + \delta\phi, \partial_\mu\phi + \partial_\mu\delta\phi] - \mathcal{L}[\phi, \partial_\mu\phi] \} = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu\phi]} \delta[\partial_\mu\phi] \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu\phi]} \right] \delta\phi \right\} + \int d^3x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_0\phi]} \delta\phi \right\} \Big|_{t_1}^{t_2} + \int_\Sigma dt d\vec{\sigma} \cdot \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{\partial}\phi} \delta\phi \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu\phi]} \right] \right\} \delta\phi \equiv \int d^4x \left(\frac{\delta S}{\delta \phi} \right) \delta\phi,
\end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que la dérivation et la variation commutent, et où la quatrième égalité provient d'une intégration par partie et d'une application du théorème de la divergence ; le premier terme de surface disparaît puisqu'on a supposé que la variation satisfait toujours aux conditions de bord, et le second est nul puisque la variation est locale et que l'on peut prendre comme surface Σ une sphère dont on fait tendre le rayon vers l'infini. La variation $\delta\phi$ étant quelconque, on obtient l'équation d'Euler-Lagrange pour le champ ϕ :

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial [\partial_\mu\phi]} \right] = 0. \quad (1.15)$$

C'est l'équation fondamentale du mouvement pour le champ ϕ .

Formalisme hamiltonien On définit le champ $\pi(x)$, l'impulsion conjuguée au champ $\phi(x)$ par la formule

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}, \quad (1.16)$$

où $\dot{\phi} \equiv \partial_0\phi$. La *densité hamiltonienne* $\mathcal{H}(\phi(x), \partial_i\phi(x), \pi(x))$ est alors définie par

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}, \quad (1.17)$$

et l'Hamiltonien du système est une fonctionnelle des champs ϕ , $\partial_i\phi$ et π :

$$\mathcal{H}[\phi, \partial_i\phi, \pi] = \int d^3x \mathcal{H}(\phi(x), \partial_i\phi(x), \pi(x)). \quad (1.18)$$

On définit alors les crochets de Poisson pour des fonctionnelles $A[\phi, \pi]$ et $B[\phi, \pi]$ par

$$\{A, B\} = \frac{\delta A}{\delta \pi} \frac{\delta B}{\delta \phi} - \frac{\delta A}{\delta \phi} \frac{\delta B}{\delta \pi},$$

et on insiste sur le fait qu'il s'agit à nouveau de dérivées fonctionnelles. On a alors les relations canoniques suivantes :

$$\{\pi(t, \vec{x}), \phi(t, \vec{y})\} = \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}). \quad (1.19)$$

Les équations du mouvement sont alors

$$\dot{\phi} = \{\mathcal{H}, \phi\}, \quad (1.20)$$

$$\dot{\pi} = \{\mathcal{H}, \pi\}. \quad (1.21)$$

Bien qu'avec les éq. (1.15) et (1.20), nous ayons explicitement les équations du mouvement sous une forme extrêmement général, il s'avère en pratique qu'il est souvent plus aisé de revenir

au principe de Hamilton original pour dériver les équations du mouvement, donc de faire varier l'action directement et d'imposer qu'au premier ordre, la variation s'annule.

Rappelons que nous avons introduit ici la notion de champ et dérivé les équations du mouvement, tant à partir du Lagrangien que de l'Hamiltonien. Mais il s'agit toujours d'une théorie *classique*, aucune quantification du champ n'étant intervenue à ce stade. Appliquons ces résultats à deux exemples importants : l'électrodynamique classique et le champ scalaire classique. Nous en profitons pour illustrer la remarque ci-dessus.

1.3.3 Exemples

Les équations de Maxwell Rappelons quelques éléments d'électrodynamique dans le vide. La théorie repose entièrement sur le tenseur de Maxwell $F^{\mu\nu}$ (antisymétrique et deux fois contravariant), défini à partir du 4-potentiel A^μ :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (1.22)$$

Les deux premières équations de Maxwell sont alors automatiquement satisfaites :

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\nu F^{\rho\sigma} = 0 \iff \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \& \quad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \operatorname{rot} \vec{E} = 0. \quad (1.23)$$

Les deux dernières peuvent être réécrites de la manière suivante :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \iff \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad \& \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \operatorname{rot} \vec{B} = 0. \quad (1.24)$$

On montre maintenant que ce système d'équations peut être redérivé d'un Lagrangien et du principe de Hamilton. Soit le Lagrangien de l'électrodynamique

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (1.25)$$

Dérivons les équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \delta S &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} [F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu} + \delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] \right\} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{2} F_{\mu\nu} [\partial^\mu \delta A^\nu - \partial^\nu \delta A^\mu] \right\} \\ &= \int d^4x \{ -\partial^\nu F_{\mu\nu} \delta A^\mu \} = \int d^4x \{ \partial_\mu F^{\mu\nu} \} \delta A_\nu, \end{aligned}$$

où la dernière ligne est obtenue par une intégration par parties et l'antisymétrie de $F^{\mu\nu}$. En imposant que cette quantité s'annule, on retrouve bien les équations (1.24).

On a donc réussi à réduire le système relativement compliqué des équations de Maxwell pour les champs \vec{E} et \vec{B} à un simple et élégant principe variationnel. On voit une fois de plus ici la puissance du calcul variationnel en physique.

Dimensions : $[S] : GeV^0$, $[\mathcal{L}] : GeV^4$, $[A_\mu] : GeV^1$.

Le champ scalaire classique Un autre Lagrangien typique est celui du champ scalaire. Soit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4. \quad (1.26)$$

Alors

$$\delta S = \int d^4x \{ \partial_\mu \phi \partial^\mu \delta \phi - m^2 \phi \delta \phi - \lambda \phi^3 \delta \phi \} = \int d^4x \{ -\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi - \lambda \phi^3 \} \delta \phi,$$

d'où les équations du mouvement :

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi + \lambda \phi^3 = 0. \quad (1.27)$$

Dimensions : $[\mathcal{L}] : GeV^4$, $[\phi] : GeV^1$, $[m^2] : GeV^2$, $[\lambda] : GeV^0$.

On peut ici illustrer l'équivalence des formalismes lagrangien et hamiltonien. On a successivement :

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \partial_0 \phi \quad (1.28)$$

$$\implies \mathcal{H} = \pi^2 - \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial_i \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \quad (1.29)$$

$$\implies \mathcal{H} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4 \right\}, \quad (1.30)$$

où $\nabla \phi \equiv \partial_i \phi$. Les équations de Hamilton sont alors

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \{\mathcal{H}, \phi\} = \int d^3x \left\{ \frac{\pi^2(x)}{2}, \phi(y) \right\} = \int d^3x \pi \delta(x - y) = \pi; \\ \dot{\pi} &= \{\mathcal{H}, \pi\} = \int d^3x \left[\left\{ \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2, \pi \right\} + \left\{ \frac{1}{2} m^2 \phi^2, \pi \right\} + \left\{ \frac{\lambda}{4} \phi^4, \pi \right\} \right] = \nabla^2 \phi - m^2 \phi - \lambda \phi^3. \end{aligned}$$

On retrouve donc bien l'éq. (1.27).

Les deux exemples ci-dessus sont tout à fait représentatifs du genre de calculs qui apparaissent très souvent lorsqu'on dérive les équations du mouvement pour des champs quelconques (intégration par parties, montée et descente d'indices, ...). Il est donc important de bien comprendre les étapes effectuées ici, et le lecteur est vivement encouragé à refaire les calculs par lui-même.

Chapitre 2

Symétries continues et lois de conservation

Ce chapitre est consacré à l'un des concepts les plus importants en physique, et *a fortiori* en théorie des champs, les symétries et les lois de conservation. C'est même là le principe premier qui guide les physiciens lorsqu'ils tentent de proposer un nouveau Lagrangien, une nouvelle théorie. Parmi l'ensemble des symétries possibles, le groupe le plus important dans le cas des champs libres est le groupe de Poincaré (et de Lorentz), et en particulier ses sous-groupes, les translations temporelles et spatiales, les rotations. C'est en fonction des propriétés de transformation des champs sous l'action des opérateurs associés que l'on pourra alors établir une classification des champs : scalaire, vectoriel, tensoriel. Mais commençons par définir quelques concepts.

2.1 Rappels élémentaires sur les groupes

En théorie quantique des champs, toutes les transformations considérées forment des groupes, le plus souvent même des groupes de Lie. On rappelle donc ici quelques éléments essentiels de théorie des groupes.

Définition Soit G , un ensemble. Soit \circ , une application de $G \times G$ dans lui-même, i.e.

$$\circ : G \times G \longrightarrow G \quad (2.1)$$

$$(g_1, g_2) \longmapsto g_1 \circ g_2 \quad (2.2)$$

On appelle *groupe* le couple (G, \circ) , avec les axiomes suivants :

1. (associativité) $(g_1 \circ g_2) \circ g_3 = g_1 \circ (g_2 \circ g_3)$, $g_i \in G$
2. (élément neutre) $\exists e \in G$ tel que $g \circ e = e \circ g = g$, $\forall g \in G$
3. (inverses) $\forall g \in G$, $\exists g^{-1} \in G$ tel que $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$

le groupe sera qualifié d'*abélien* si, de plus, $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$, $g_1, g_2 \in G$.

En termes physiques, on réinterprète ces différents points de la manière suivante. Un élément d'un groupe représente une transformation appliquée au système. Le produit de deux transformations sera encore une transformation, l'élément neutre représente l'absence de transformation, et pour toute transformation, il en existe une autre qui ramène le système à son point de départ. Si le groupe est abélien, l'ordre dans lequel on effectue deux transformations n'importe pas.

Définition Soit (G, \circ) , un groupe. (G, \circ) est un *groupe de Lie* s'il constitue aussi une variété différentiable.

Autrement dit, chaque élément du groupe $g \in G$ peut être paramétrisé par un nombre fini¹ n de nombres réels $\alpha_1 \dots \alpha_n$, tels que la carte $g = g(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ soit infiniment différentiable².

De plus, on exigera que les opérations de groupe

$$\circ : G \times G \longrightarrow G, (g_1, g_2) \longmapsto g_1 \circ g_2, \quad (2.3)$$

$$^{-1} : G \longrightarrow G, g \longmapsto g^{-1}, \quad (2.4)$$

soient différentiables.

En physique, on choisira en général une paramétrisation telle que $\alpha = 0$ corresponde à l'élément neutre du groupe.

2.2 Groupes de Poincaré et de Lorentz

L'invariance de Poincaré (ou de Lorentz) est l'un des principes les plus solidement ancrés dans les théories physiques. Elle reflète le principe de la relativité restreinte, associé à l'invariance de la vitesse de la lumière dans tous les référentiels en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. Les symétries, et en particulier celle de Lorentz, sont le principe premier lors de la construction de Lagrangiens en théorie des champs.

Définition On montre en géométrie différentielle élémentaire que lors d'une transformation de coordonnées $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, la métrique $g_{\mu\nu}$ se transforme selon la loi suivante :

$$g_{\mu\nu}(x) \longrightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x). \quad (2.5)$$

Le *groupe de Poincaré* est l'ensemble des transformations qui laissent la métrique de Minkowski invariante. L'intégration de l'éq. (2.5) montre qu'elles peuvent toujours s'écrire de la manière suivante :

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad \text{où} \quad \eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

C'est la généralisation du groupe de Galilée compatible avec la constance de la vitesse de la lumière postulée par Einstein. On dénotera les éléments de ce groupe par le couple (Λ, a) . On laisse au lecteur le soin de vérifier qu'il s'agit bien ici d'un groupe pour les opérations suivantes :

$$(\Lambda_2, a_2) \circ (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, a_2 + \Lambda_2 a_1), \quad (2.7)$$

$$(\Lambda, a)^{-1} = (\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1} a). \quad (2.8)$$

En utilisant l'éq. (2.6), on montre que la matrice Λ n'a que 6 composantes indépendantes. En effet, la caractérisation des Λ se réécrit matriciellement

$$\Lambda \in \mathcal{L} \iff \Lambda^T \eta \Lambda = \eta, \quad (2.9)$$

A cela, il faut ajouter les 4 composantes de a^μ . Le groupe de Poincaré est donc un groupe à 10 paramètres.

Le *groupe de Lorentz* \mathcal{L} est le sous-groupe du groupe de Poincaré pour la valeur particulière $a^\mu = 0$, i.e. sans les translations dans l'espace-temps. C'est donc un groupe à seulement 6 paramètres.

¹En fait, on peut aussi considérer des variétés de dimension infinies, mais nous n'en utiliserons pas dans le cadre de ce cours.

²Attention, on utilise ici un léger abus de notation, usuel pourtant. Le lecteur intéressé pourra se référer, par exemple au livre de M. Nakahara 'Geometry, Topology and Physics' pour plus de détails.

Propriétés À partir de la condition énoncée dans (2.6), on voit immédiatement que Λ satisfait aux deux contraintes suivantes :

$$(\det \Lambda)^2 = 1 \quad (2.10)$$

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 \Lambda^i_0 \Lambda^i_0 \quad (2.11)$$

En conséquence, le groupe de Lorentz contient 4 composantes connexes, notées \mathcal{L}_+^\uparrow , \mathcal{L}_-^\uparrow , \mathcal{L}_+^\downarrow et \mathcal{L}_-^\downarrow , selon que $\det \Lambda = \pm 1$ et $\Lambda^0_0 \geq 1$ ou $\Lambda^0_0 \leq -1$. On a donc le tableau suivant :

\mathcal{L}_+^\uparrow	$\Lambda^0_0 \geq 1$ et $\det \Lambda = +1$
\mathcal{L}_-^\uparrow	$\Lambda^0_0 \geq 1$ et $\det \Lambda = -1$
\mathcal{L}_+^\downarrow	$\Lambda^0_0 \leq 1$ et $\det \Lambda = +1$
\mathcal{L}_-^\downarrow	$\Lambda^0_0 \leq 1$ et $\det \Lambda = -1$

Seule la première de ces composantes forme un groupe (elle est la seule qui contienne l'identité), et on l'appelle le groupe de Lorentz *propre orthochrone*. On peut à nouveau distinguer ici deux sous-groupes importants :

- Les rotations pures, de la forme

$$\Lambda = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathcal{O} & \\ 0 & & & \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad \mathcal{O}^T \mathcal{O} = \mathbb{I}. \quad (2.12)$$

- Les boosts purs le long d'un axe fixé. Par exemple, le long de \hat{x} :

$$\Lambda = \left(\begin{array}{cccc} \gamma & -\gamma v & 0 & 0 \\ -\gamma v & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (2.13)$$

Ce sont les transformations qui représentent un changement de référentiel entre deux systèmes de coordonnées en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. On notera ici que l'ensemble des boosts purs le long d'axes arbitraires (i.e. il n'y a pas d'axe fixé a priori) ne forme pas un groupe, puisqu'en général, le produit de deux boosts est la combinaison d'un boost et d'une rotation.

Finalement, on note déjà ici que les autres composantes connexes du groupe de Lorentz ne sont pas reliées de manière continue à l'identité. \mathcal{L}_-^\uparrow contient \mathcal{P} , l'inversion spatiale, \mathcal{L}_+^\downarrow l'inversion temporelle \mathcal{T} , alors que la combinaison des deux $\mathcal{PT} \in \mathcal{L}_-^\downarrow$. Ce sont des symétries discrètes qui n'entrent pas dans le cadre établi jusqu'ici et sur lesquelles nous reviendrons plus tard dans ce cours. On remarquera finalement que l'ensemble du groupe de Lorentz peut s'écrire :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_+^\uparrow \circ \{\mathbb{I}, \mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{PT}\}. \quad (2.14)$$

Scalars, vecteurs et tenseurs On donne ici une définition très pragmatique de ces notions. Une définition plus abstraite pourrait être donnée dans le cadre de la géométrie différentielle, mais nous préférons ne pas entrer dans ces détails ici.

On considère une transformation de Lorentz Λ (ou plus généralement de Poincaré (Λ, a)). On peut alors définir les notions de scalaire, de vecteur contravariant et de tenseur deux fois contravariant en fonction de la manière dont ces grandeurs se transforment lors d'un changement de référentiel, en $(3+1)$ dimensions :

Scalaire	1 fonction $S(x)$	$S'(x') = S(x)$
Vecteur contravariant	4 fonctions $A^\mu(x)$	$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x)$
Tenseur deux fois contravariant	16 fonctions $g^{\mu\nu}(x)$	$g'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta g^{\alpha\beta}$

et ainsi de suite pour les tenseurs d'ordres supérieurs. Nous rencontrerons par la suite des champs scalaire, comme le boson de Higgs, et des champs vectoriels, comme le potentiel-vecteur de l'électrodynamique. Bien qu'on puisse considérer des champs tensoriels d'ordre supérieur, comme le graviton, nous n'en parlerons pas ici. Enfin, il existe aussi des champs dit spinoriels, mais ils sont liés à une tout autre représentation du groupe de Lorentz que nous introduirons en temps voulu.

Ces bases étant acquises, retournons à la physique.

2.3 Les symétries

2.3.1 Définition

On étudie un système de N champs $\phi_i(x)$, $i = 1 \dots N$, caractérisé par le Lagrangien $\mathcal{L}[\phi_i, \partial_\mu \phi_i]$. Soit une transformation du système, i.e. un élément d'un certain groupe de Lie, définie par M paramètres réels $\alpha^{(j)} \in \mathcal{I}$, où $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$. Dénotons par α l'ensemble des paramètres. Sous l'action de cette transformation, tant les coordonnées que les champs sont modifiés :

$$\begin{cases} x^\mu & \longrightarrow x'^\mu = f(x^\mu, \alpha) , \\ \phi_i(x) & \longrightarrow \phi'_i(x') = F_i(\phi(x), \alpha) . \end{cases} \quad (2.15)$$

La transformation est une *symétrie* du système si l'action est invariante, i.e.

$$\int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x)) = \int_{f(\Omega, \alpha)} d^4x' \mathcal{L}(\phi'_i(x'), \partial'_\mu \phi'_i(x')) , \quad (2.16)$$

où on a noté $\partial'_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x'^\mu}$, et où $f(\Omega, \alpha)$ est l'image par la transformation du domaine Ω .

Exemples

- (Champ scalaire réel) Soit $\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$. On laisse le soin au lecteur de vérifier que ce système est invariant sous la transformation suivante (translation dans l'espace-temps) :

$$\begin{cases} x^\mu & \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu \\ \phi(x) & \longrightarrow \phi'(x') = \phi(x) . \end{cases}$$

- (Champs scalaire complexe) Soit $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi$. Le système est alors invariant par rapport aux changements de phase :

$$\begin{cases} x^\mu & \longrightarrow x'^\mu = x^\mu , \\ \phi(x) & \longrightarrow \phi'(x') = e^{i\alpha} \phi(x) . \end{cases}$$

2.3.2 Transformations infinitésimales

Choisissons une paramétrisation de la transformation telle que $\alpha = 0$ soit l'identité, i.e. $f(x^\mu, 0) = x^\mu$ et $F_i(\phi(x), 0) = \phi(x)$. Puisque la transformation est continue, considérons une transformation infinitésimale $\alpha^{(j)} \ll 1$. Il existe alors Md fonctions $f_{(j)}^\mu(x)$, où d est la dimension de l'espace-temps, et MN autres fonctions $C_{i(j)}(x)$ telles que la transformation s'écrive au premier ordre

$$\begin{cases} x^\mu & \longrightarrow x'^\mu = x^\mu - \sum_{j=1}^M f_{(j)}^\mu(x) \alpha^{(j)} , \\ \phi_i(x) & \longrightarrow \phi'_i(x') = \phi_i(x) + \sum_{j=1}^M C_{i(j)}(x) \alpha^{(j)} . \end{cases} \quad (2.17)$$

On notera que l'indice j n'est pas a priori un indice de Lorentz, d'où la notation entre parenthèses.

Exemples Reprenons les exemples ci-dessus :

- Translations : $f_{(j)}^\mu(x) = -\delta_{(j)}^\mu$ et $C_{i(j)}(x) = 0$.
- Changement de phase : Pour une transformation infinitésimale,

$$\phi'(x') = e^{i\alpha} \phi(x) \approx (1 + i\alpha) \phi(x) .$$

C'est donc une transformation à un paramètre, nous pouvons laisser tomber l'indice (j) . Alors $f^\mu(x) = 0$ et $C_i(x) = i\phi(x)$.

2.3.3 Le théorème de Noether : lois de conservation

A l'aide de ces outils, nous pouvons maintenant démontrer le théorème de Noether, dont le contenu est simple et extrêmement puissant :

A chaque symétrie du système correspond une grandeur conservée au cours de l'évolution.

Plus précisément, en reprenant les notations de la section précédente, on a

$$\partial_\mu \Theta_{(j)}^\mu = 0 , \quad (2.18)$$

pour le courant (de Noether)

$$\Theta_{(j)}^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} C_{i(j)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \phi_{i,\nu} f_{(j)}^\nu - f_{(j)}^\mu \mathcal{L} , \quad (2.19)$$

avec la notation traditionnelle $\phi_{,\mu} \equiv \partial_\mu \phi$.

Preuve Par l'équation (2.17), la transformation des champs et des coordonnées est déjà connue. A l'aide de cette dernière, commençons par calculer la matrice Jacobienne de la transformation au premier ordre dans les paramètres α :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} &= \delta_\nu^\mu - \partial_\nu f_{(j)}^\mu \alpha^{(j)} , \\ \Rightarrow \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} &= \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right)^{-1} = \delta_\mu^\nu + \partial_\mu f_{(j)}^\nu \alpha^{(j)} + \mathcal{O}(\alpha^2) . \end{aligned}$$

En utilisant ceci, on obtient alors les dérivées des champs :

$$\begin{aligned} \partial_\mu \phi_i(x) &\longrightarrow \partial'_\mu \phi'_i(x') = \partial_\nu \phi'_i(x') \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \left(\partial_\nu \phi_i(x) + \partial_\nu C_{i(j)}(x) \alpha^{(j)} \right) \left(\delta_\mu^\nu + \partial_\mu f_{(j)}^\nu(x) \alpha^{(j)} \right) + \mathcal{O}(\alpha^2) \\ &= \partial_\mu \phi_i(x) + \partial_\mu C_{i(j)}(x) \alpha^{(j)} + \partial_\nu \phi_i(x) \partial_\mu f_{(j)}^\nu(x) \alpha^{(j)} + \mathcal{O}(\alpha^2) . \end{aligned}$$

D'autre part, de la formule bien connue

$$\det A = \exp [\text{Tr}(\ln A)] ,$$

on obtient le jacobien de la transformation :

$$d^4 x' = \det \left(\frac{Dx'}{Dx} \right) d^4 x = \left(1 - \partial_\mu f_{(j)}^\mu \alpha^{(j)} \right) d^4 x + \mathcal{O}(\alpha^2) .$$

On peut alors considérer la variation de l'action sous l'effet de la transformation (au premier ordre, on omet dans ce qui suit le $\mathcal{O}(\alpha^2)$ qui devrait normalement figurer partout) :

$$\begin{aligned}
S' - S &= \int d^4x \left\{ \left(1 - \partial_\mu f_{(j)}^\mu \alpha^{(j)} \right) \left[\mathcal{L}(\phi_i, \partial_\rho \phi_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} C_{i(j)} \alpha^{(j)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \left(\partial_\mu C_{i(j)} + \partial_\mu f_{(j)}^\nu \partial_\nu \phi_i \right) \alpha^{(j)} \right] \right\} - \int d^4x \mathcal{L}[\phi_i, \partial_\rho \phi_i] \\
&= \int d^4x \left\{ -\partial_\mu f_{(j)}^\mu \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\rho \phi_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} C_{i(j)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \left(\partial_\mu C_{i(j)} + \partial_\mu f_{(j)}^\nu \partial_\nu \phi_i \right) \right\} \alpha^{(j)} \\
&= \int d^4x \left\{ \partial_\mu \left[-f_{(j)}^\mu \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\rho \phi_i) \right] + f_{(j)}^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\rho \phi_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} C_{i(j)} \right. \\
&\quad \left. + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} C_{i(j)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} C_{i(j)} + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \partial_\nu \phi_i f_{(j)}^\nu \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \partial_\nu \phi_i \right] f_{(j)}^\nu \right\} \alpha^{(j)} \\
&= \int d^4x \left\{ \partial_\mu \left[-f_{(j)}^\mu \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\rho \phi_i) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} C_{i(j)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\mu}} \partial_\nu \phi_i f_{(j)}^\nu \right] \right. \\
&\quad \left. + f_{(j)}^\mu \partial_\mu \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\rho \phi_i) - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \partial_\mu \phi_i \right] f_{(j)}^\mu \right\} \alpha^{(j)},
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans la troisième égalité les équations du mouvement. On constate alors que les termes qui ne sont pas des 4-divergences s'annulent mutuellement :

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\rho \phi_i) - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \partial_\mu \phi_i \right] &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \partial_\mu \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\rho}} \partial_\mu \partial_\rho \phi_i - \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \right] \partial_\mu \phi_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{i,\nu}} \partial_\nu \partial_\mu \phi_i \\
&= 0, \quad \text{en utilisant à nouveau les équations du mouvement.}
\end{aligned}$$

Par définition, si la transformation est une symétrie du système, alors

$$\delta S = S' - S = \int d^4x \partial_\mu \Theta_{(j)}^\mu \alpha^{(j)} = 0,$$

et on obtient bien le résultat énoncé dans (2.18) et (2.19). \blacklozenge

On peut finalement exprimer ce résultat sous une forme où la conservation d'une charge est plus explicite. Si les champs décroissent vers zéro à l'infini, on peut intégrer (2.18) sur une boule $\mathcal{B}(r)$ dont on fait tendre le rayon vers l'infini, et obtenir

$$\partial_\mu \Theta_{(j)}^\mu = 0 \quad \implies \quad 0 = \int_{\mathcal{B}(r)} d^3x \left\{ \partial_i \Theta_{(j)}^i + \partial_0 \Theta_{(j)}^0 \right\} = \underbrace{\int_{\partial \mathcal{B}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{\Theta}_{(j)}}_{\rightarrow 0 \text{ (} r \rightarrow \infty \text{)}} + \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}(r)} d^3x \Theta_{(j)}^0.$$

D'où la conservation des M charges $Q_{(j)}$:

$$\frac{d}{dt} Q_{(j)} = 0, \quad \text{où} \quad Q_{(j)} = \int d^3x \Theta_{(j)}^0. \quad (2.20)$$

Un cas particulier de ce théorème de Noether, bien connu du lecteur familier avec l'électrodynamique classique, est la conservation du 4-courant $j^\mu = (\rho, \vec{j})$. On comprend dès lors la terminologie utilisée dans le cadre général, puisqu'alors $Q = \int d^3x \rho$. On verra plus tard que cette grandeur conservée est l'expression de la symétrie de jauge $U(1)$ de l'électrodynamique (classique et quantique).

Exemples Donnons quelques exemples simples en mécanique analytique. Soit un système de N particules interagissant au travers d'un potentiel central :

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{q}}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|) . \quad (2.21)$$

Dans ce cas simple, on a N 'champs' qui ne dépendent que d'un seul paramètre : $q_i(t)$. Comme il ne s'agit pas ici de champs au sens de 'fonctions d'espace', il ne sera pas nécessaire d'intégrer sur tout l'espace pour obtenir la charge proprement dite.

1. Les translations dans le temps : $t \longrightarrow t + \Delta t$. Alors la seule fonction non triviale est $f^0 = 1$, d'où l'unique courant

$$\Theta_{(1)}^0 = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{q}}_i^2 - \left[\sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{q}}_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|) \right] = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{2} \dot{\vec{q}}_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V(|\vec{q}_i - \vec{q}_j|) . \quad (2.22)$$

On reconnaît immédiatement l'énergie du système.

2. Les translations dans l'espace : $\vec{q}_i \longrightarrow \vec{q}_i + \vec{\alpha}$, qu'on doit considérer ici comme une transformation des champs. On a donc $C_{i(j)} = \delta_{i(j)}$ et $f_{(j)}^\mu = 0$, d'où les trois courants associés :

$$\vec{\Theta} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{q}}_i . \quad (2.23)$$

C'est bien sûr la quantité de mouvement.

3. Les rotations autour de l'axe \hat{z} :

$$\begin{aligned} q_i^1 &\longrightarrow q_i^1 + q_i^2 \theta , \\ q_i^2 &\longrightarrow q_i^2 - q_i^1 \theta , \\ q_i^3 &\longrightarrow q_i^3 . \end{aligned}$$

D'où :

$$f_{(j)}^\mu = 0 , \quad C_i^{(1)} = q_i^2 , \quad C_i^{(2)} = -q_i^1 .$$

Le courant de Noether est donc :

$$\Theta = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^1} q_i^2 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i^2} q_i^1 \right\} = \sum_{i=1}^N m_i (\dot{q}_i^1 q_i^2 - \dot{q}_i^2 q_i^1) = \sum_{i=1}^N (\vec{p}_i \wedge \vec{q}_i)_z . \quad (2.24)$$

On obtient la conservation du moment cinétique selon l'axe \hat{z} .

La conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement et du moment cinétique ne sont donc que l'expression, respectivement, de l'homogénéité du temps, de l'espace et l'isotropie de l'espace. Ce résultat, valable évidemment en toute généralité puisqu'il est l'expression du premier principe de la thermodynamique, réapparaîtra à de nombreuses reprises dans la suite de ce cours.

Ce cadre général étant maintenant posé, nous pouvons commencer l'étude des champs libres proprement dite. Les chapitres suivants s'organisent naturellement en fonction des différents types de champ que l'on peut définir sur la base de leurs propriétés lors d'une transformation de Lorentz. Ce sera d'abord le champ scalaire, puis le champ vectoriel et finalement le champ spinoriel, pour lequel nous devons développer une nouvelle représentation du groupe de Lorentz.

Chapitre 3

Le champ scalaire

Après ces considérations d'ordre mathématique, nous pouvons maintenant nous tourner vers la théorie du champ scalaire, le plus simple du point de vue des transformations de Lorentz. Nous allons tout d'abord traiter le formalisme classique, puis attaquer le problème de la quantification canonique de la théorie. Ce chapitre joue un rôle central, puisque l'ensemble des démarches, des principes qui régissent la construction du Lagrangien au processus de quantification, seront ensuite reprises avec les modifications qui s'imposent pour d'autres champs : vectoriel, spinoriel.

3.1 Lagrangien ; équations du mouvement

Commençons par définir le champ scalaire par son comportement lors d'une transformation de Poincaré. $\phi(x)$ est un champ scalaire s'il est invariant sous $(\Lambda, a) : \phi'(x') = \phi(x)$. Pour construire la densité lagrangienne, on requière pour le Lagrangien les conditions suivantes :

1. qu'il soit relativiste, i.e. invariant par rapport aux transformations de Lorentz ;
2. qu'il soit aussi simple que possible ; en particulier qu'il soit au maximum quadratique dans les champs, de telle sorte que les équations du mouvement qui en découlent soient linéaires ;
3. que l'évolution temporelle soient complètement déterminée par les conditions initiales $\phi(0, \vec{x})$ et $\dot{\phi}(0, \vec{x})$. Le théorème de Cauchy impose alors que les équations du mouvement soient des équations différentielles du second ordre. Finalement, par les équations d'Euler-Lagrange, ceci impose que le Lagrangien ne contienne pas de dérivées par rapport au temps d'ordre supérieur à un.

Le Lagrangien le plus général compatible avec ces contraintes est alors

$$\mathcal{L} = C_1 \phi(x) + C_2 \phi^2(x) + C_3 \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) . \quad (3.1)$$

On peut alors par des redéfinitions du champ poser $C_1 = 0$ puis $C_3 = \frac{1}{2}$, ce qui laisse un seul paramètre libre dans la densité lagrangienne. Le Lagrangien du champ scalaire le plus simple s'écrit canoniquement

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) . \quad (3.2)$$

Finalement, on trouve l'action du champ scalaire :

$$S[\phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) \right\} . \quad (3.3)$$

On trouve aisément les dimensions des objets apparaissant ici : $[\phi] : GeV$, $[m^2] : GeV^2$.

Considérons alors les équations du mouvement pour le Lagrangien (3.2).

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x \{ \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \delta\phi \partial_\nu \phi(x) - m^2 \phi \delta\phi \} \\ &= \int d^4x \{ -\partial_\mu \partial^\mu \phi - m^2 \phi \} \delta\phi .\end{aligned}$$

On obtient alors l'équation de Klein-Gordon :

$$(\square + m^2) \phi(x) = 0 , \quad (3.4)$$

où $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu \equiv \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$. Insistons encore ici sur le fait que ces développements sont toujours dans un cadre classique.

Avant de poursuivre avec les invariants dynamiques, nous construisons l'Hamiltonien de la théorie. On déduit successivement le moment conjugué à $\phi(x)$

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \phi} = \partial^0 \phi \equiv \dot{\phi}(x) , \quad (3.5)$$

puis la densité hamiltonienne

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 , \quad (3.6)$$

où $\vec{\nabla} \equiv (\partial_1, \partial_2, \partial_3)$.

Remarque sur la constante $C_3 = -\frac{1}{2}m^2$ On comprend à ce stade la raison du choix de notation de cette constante. Premièrement, la dimension de m est bien celle d'une masse. De plus, pour avoir un état fondamental bien défini, l'Hamiltonien doit être borné inférieurement. On voit ici que cela est équivalent à la condition $m^2 \geq 0$, ce qui est trivial si $m \in \mathbb{R}$. Attention, ceci ne sera plus forcément le cas lorsqu'on aura introduit des interactions. Il s'agira même de l'élément clé du mécanisme de Higgs (cf le chapitre 10).

3.2 Invariants dynamiques

On cherche maintenant les grandeurs conservées du champ scalaire. Il suffit pour cela d'identifier les symétries de l'action et d'en déduire les courants de Noether associés. Par construction, l'action est invariante par rapport au groupe de Poincaré : celui-ci ayant dix paramètres indépendants, il existe aussi dix grandeurs conservées.

1. Les quatre translations :

$$\begin{cases} x^\mu & \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + a^\mu , \\ \phi(x) & \longrightarrow \phi'(x') = \phi(x) ; \end{cases} \quad (3.7)$$

d'où les fonctions $f_{(\nu)}^\mu = \delta_{(\nu)}^\mu$ et $C_{(\nu)} = 0$. Une application directe de l'éq (2.19) donne alors les courants de Noether T_{ν}^μ :

$$T_{\nu}^\mu = \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - \delta_{\nu}^\mu \mathcal{L} . \quad (3.8)$$

C'est le tenseur énergie-impulsion, associé à l'homogénéité de l'espace-temps. On trouve alors les quatre charges conservées par une simple intégration :

($\nu = 0$) L'énergie du champ scalaire :

$$E = \int d^3x T_{00} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right\}. \quad (3.9)$$

On retrouve bien la fonction hamiltonienne, mais exprimée en fonction des variables ϕ et $\partial_\mu \phi$.

($\nu = i$) On trouve ici la quantité de mouvement du champ scalaire :

$$P^i = \int d^3x T^{0i} = \int d^3x \partial^0 \phi \partial^i \phi,$$

i.e., en abaissant l'indice i ,

$$\vec{P} = - \int d^3x \left[\dot{\phi} \vec{\nabla} \phi \right]. \quad (3.10)$$

2. Les trois rotations. Choisissons une rotation d'angle θ autour de l'axe \hat{z} :

$$\begin{cases} x^0 & \longrightarrow x'^0 = x^0, \\ x^1 & \longrightarrow x'^1 = x^1 \cos \theta - x^2 \sin \theta \approx x^1 - x^2 \theta, \\ x^2 & \longrightarrow x'^2 = x^1 \sin \theta + x^2 \cos \theta \approx x^1 \theta + x^2, \\ x^3 & \longrightarrow x'^3 = x^3, \\ \phi(x) & \longrightarrow \phi'(x') = \phi(x). \end{cases} \quad (3.11)$$

Par un calcul direct, vérifions que cette transformation est bien une symétrie du champ. Soit la matrice jacobienne $\mathcal{J}^\mu_\nu = \left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right)$. On voit immédiatement que son déterminant est égal à 1, et donc $d^4x' = d^4x$. De plus $\partial'_\nu = (\mathcal{J}^{-1})^\mu_\nu \partial_\mu$ et $\partial'^\mu = \mathcal{J}^\mu_\nu \partial^\nu$. On a donc

$$\partial'_\mu \phi'(x') \partial'^\mu \phi'(x') = (\mathcal{J}^{-1})^\nu_\mu \partial_\nu \phi(x) \mathcal{J}^\mu_\rho \partial^\rho \phi(x) = \delta^\nu_\rho \partial_\nu \phi \partial^\rho \phi = \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi,$$

ce qui finit de montrer qu'il s'agit bien d'une symétrie.

Les seules fonctions non nulles sont dans ce cas $f_3^1 = x^2$ et $f_3^2 = -x^1$. Ainsi, le courant de Noether m_3 associé s'exprime comme

$$m_3^\mu = \partial^\mu \phi (\partial_1 \phi x^2 - \partial_2 \phi x^1) - f_3^\mu \mathcal{L}. \quad (3.12)$$

La charge conservée est la troisième composante du moment cinétique :

$$\begin{aligned} M_3 &= \int d^3x m_3^0 = \int d^3x \{ \partial^0 \phi (\partial_1 \phi x^2 - \partial_2 \phi x^1) \} \\ &\stackrel{(3.10)}{=} \int d^3x \{ -p^1 \cdot x^2 + p^2 \cdot x^1 \}, \end{aligned}$$

où \vec{p} est la densité de quantité de mouvement, voir l'éq. (3.10). On retrouve alors l'expression bien connue

$$M_3 = \int d^3x [\vec{x} \wedge \vec{p}]_3. \quad (3.13)$$

3. Les boosts. Il s'agit ici des trois courants engendrés par les trois derniers paramètres du groupe de Poincaré. Bien qu'on puisse formellement les écrire, on ne connaît pas leur signification physique. Nous n'allons donc pas nous pencher plus avant sur cette question.

La théorie classique du champ scalaire est maintenant totalement connue : nous avons déterminé successivement l'action, les équations du mouvement, puis les invariants dynamiques essentiels. Nous allons pouvoir passer à la quantification du champ.

3.3 Théorie quantique du champ scalaire

On présente ici le processus de quantification canonique du champ, qui repose de manière essentielle sur la quantification canonique de la mécanique ordinaire. L'étape centrale dans ce cas étant la promotion des couples de variables conjuguées p et q en opérateurs symétriques agissant sur un espace de Hilbert bien défini.

3.3.1 Quantification des champs

En théorie des champs, les variables dont dépend l'Hamiltonien sont les champs π et ϕ . Plaçons-nous à un certain temps *fixé* t et introduisons les *opérateurs de champ* $\hat{\phi}(\vec{x})$ et $\hat{\pi}(\vec{y})$ auxquels on impose les relations de commutation au temps t :

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y}) \right] = i\delta(\vec{x} - \vec{y}) , \quad (3.14)$$

et

$$\left[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\phi}(\vec{y}) \right] = 0 , \quad \left[\hat{\pi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y}) \right] = 0 . \quad (3.15)$$

Si cette étape est aisée à écrire, elle est conceptuellement non triviale. En particulier se pose maintenant le problème d'exhiber un espace de Hilbert sur lequel agissent ces opérateurs. Il s'avère que pour obtenir un espace bien défini, il est impératif de quantifier le système dans un volume fini \mathcal{V} avant de passer à la limite $\mathcal{V} \rightarrow +\infty$ (qu'on dénommera par la suite *limite thermodynamique*). Nous choisirons ici une boîte cubique \mathcal{B} de côté $0 < L < +\infty$. On pourra alors parler de la transformée de Fourier des champs définis dans la boîte, et quantifier un ensemble discret de modes du champ.

Soit l'espace $L^2([0, L]^3) = L^2(\mathcal{B})$. Choisissons comme base orthonormée dans cet espace l'ensemble des fonctions propres de l'opérateur auto-adjoint impulsion, avec des conditions de bord périodiques. Il s'agit bien évidemment de la base de Fourier, i.e.

$$\psi_{\vec{k}} = \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k}\vec{x}} , \quad \text{où } \vec{k} = (k^1, k^2, k^3) , \quad \text{et } k^i = \frac{2\pi n_i}{L}, \quad n_i \in \mathbb{N} . \quad (3.16)$$

N'importe quel champ $\phi \in L^2(\mathcal{B})$ peut alors être décomposé sur cette base :

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\{\vec{k}\}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \varphi_{\vec{k}} , \quad \text{où } \varphi_{\vec{k}} = \frac{1}{L^{3/2}} \int d^3y e^{-i\vec{k}\vec{y}} \phi(\vec{y}) . \quad (3.17)$$

Si le champ ϕ est réel, ses coefficients de Fourier satisfont à une condition de symétrie bien connue :

$$\phi(\vec{x}) = \phi^*(\vec{x}) \implies \varphi_{\vec{k}} = \varphi_{-\vec{k}}^* . \quad (3.18)$$

On fait de même pour l'impulsion généralisée :

$$\pi(\vec{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\{\vec{k}\}} e^{i\vec{k}\vec{x}} \varpi_{\vec{k}} , \quad \varpi_{\vec{k}} = \varpi_{-\vec{k}}^* . \quad (3.19)$$

Finalement, nous aurons aussi besoin de l'expression correspondant à une distribution δ :

$$\delta^{(3)}(\vec{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\{\vec{k}\}} \frac{1}{L^{3/2}} e^{i\vec{k}\vec{x}} . \quad (3.20)$$

Exprimons maintenant l'Hamiltonien en fonction des nouvelles variables $\varphi_{\vec{k}}$ et $\varpi_{\vec{p}}$. On a

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} d^3x \pi^2(\vec{x}) &= \frac{1}{L^3} \sum_{\{\vec{k}\}} \varpi_{\vec{k}} \sum_{\{\vec{p}\}} \varpi_{\vec{p}} \underbrace{\int_{\mathcal{B}} d^3x e^{i\vec{x}(\vec{k}+\vec{p})}}_{=L^3\delta^3(\vec{k},-\vec{p})} = \sum_{\{\vec{k}\}} \varpi_{\vec{k}} \varpi_{\vec{k}}^* ; \\ \Rightarrow \int_{\mathcal{B}} d^3x \phi^2(\vec{x}) &= \sum_{\{\vec{k}\}} \varphi_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}}^* ; \\ \int_{\mathcal{B}} d^3x (\partial_i \phi(\vec{x}))^2 &= \frac{1}{L^3} \sum_{\{\vec{k}\}} i k_i \varphi_{\vec{k}} \sum_{\{\vec{p}\}} i p_i \varphi_{\vec{p}} \int_{\mathcal{B}} d^3x e^{i\vec{x}(\vec{k}+\vec{p})} = \sum_{\{\vec{k}\}} k_i^2 \varphi_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}}^* , \end{aligned}$$

où on a utilisé la propriété de symétrie pour les champs réels. En regroupant tout ceci, on obtient l'Hamiltonien

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{\{\vec{k}\}} \left[\varpi_{\vec{k}} \varpi_{\vec{k}}^* + \left(|\vec{k}|^2 + m^2 \right) \varphi_{\vec{k}} \varphi_{\vec{k}}^* \right] . \quad (3.21)$$

On peut maintenant revenir à la quantification de la théorie à partir de cette formulation dans l'espace de Fourier. A nouveau, l'idée de base est de faire des champs $\varphi_{\vec{k}}$ et $\varpi_{\vec{p}}$ des opérateurs de champ $\hat{\varphi}_{\vec{k}}$ et $\hat{\varpi}_{\vec{p}}$. Les relations de commutation qu'il s'agit d'imposer alors découlent directement des équations (3.14) et (3.15). En utilisant la transformée de Fourier inverse, on trouve :

$$[\hat{\varphi}_{\vec{k}}, \hat{\varpi}_{\vec{p}}] = \frac{1}{L^3} \int_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{B}} d^3x d^3y \left\{ e^{-i\vec{k}\vec{x}} e^{-i\vec{p}\vec{y}} \left[\hat{\phi}(\vec{x}), \hat{\pi}(\vec{y}) \right] \right\} \stackrel{!}{=} \frac{i}{L^3} \int_{\mathcal{B}} d^3x e^{-i\vec{x}(\vec{k}+\vec{p})} .$$

D'où les relations de commutation fondamentales :

$$[\hat{\varphi}_{\vec{k}}, \hat{\varpi}_{\vec{p}}] = i \delta_{\vec{k}, -\vec{p}} , \quad (3.22)$$

et

$$[\hat{\varphi}_{\vec{k}}, \hat{\varphi}_{\vec{p}}] = 0 , \quad [\hat{\varpi}_{\vec{k}}, \hat{\varpi}_{\vec{p}}] = 0 . \quad (3.23)$$

On constate donc que le champ conjugué à $\hat{\varphi}_{\vec{k}}$ est bien $\hat{\varpi}_{-\vec{k}}$, et non $\hat{\varpi}_{\vec{k}}$. L'Hamiltonien quantique, opérateur central pour la théorie s'écrit donc :

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\{\vec{k}\}} \left[\hat{\varpi}_{\vec{k}} \hat{\varpi}_{\vec{k}}^* + \left(|\vec{k}|^2 + m^2 \right) \hat{\varphi}_{\vec{k}} \hat{\varphi}_{\vec{k}}^* \right] . \quad (3.24)$$

3.3.2 Construction explicite de l'espace de Hilbert

On introduit maintenant de nouveaux opérateurs $\hat{a}_{\vec{k}}$ et $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$, qui a priori ne permettent qu'une réécriture particulièrement simple de l'Hamiltonien, mais qui s'avèreront très utiles pour la construction de l'espace de Hilbert.

Commençons par remarquer l'analogie formelle de l'Hamiltonien (3.24) avec celui d'un ensemble infini d'oscillateurs harmoniques quantiques. En effet,

$$\hat{\mathcal{H}}_{o.h.} = \frac{\vec{p}^2}{2M} + \frac{1}{2} M \omega^2 \vec{x}^2 .$$

L'Hamiltonien du champ scalaire correspond donc à un ensemble d'oscillateurs harmoniques quantiques indépendants de 'masse' $M = 1$ et de fréquence $\omega_{\vec{k}} = \varepsilon_{\vec{k}} := \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$. Par analogie avec

ce cas simple, définissons les opérateurs suivants :

$$\hat{a}_{\vec{k}} := \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}} (\varepsilon_{\vec{k}} \hat{\varphi}_{\vec{k}} + i \hat{\omega}_{\vec{k}}) , \quad (3.25)$$

$$\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}} (\varepsilon_{\vec{k}} \hat{\varphi}_{-\vec{k}} - i \hat{\omega}_{-\vec{k}}) . \quad (3.26)$$

En inversant ces relations, on obtient :

$$\hat{\varphi}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}} (\hat{a}_{\vec{k}} + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger) , \quad (3.27)$$

$$i \hat{\omega}_{\vec{k}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{\vec{k}}}{2}} (\hat{a}_{\vec{k}} - \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger) . \quad (3.28)$$

On vérifie facilement que ces définitions impliquent automatiquement les conditions de réalité pour les champs $\hat{\varphi}_{\vec{k}}$ et $\hat{\omega}_{\vec{k}}$. De plus, on trouve les relations de commutations des nouveaux opérateurs par un calcul direct :

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] = \frac{1}{2} (-i [\hat{\varphi}_{\vec{k}}, \hat{\omega}_{-\vec{p}}] + i [\hat{\omega}_{\vec{k}}, \hat{\varphi}_{-\vec{p}}]) ,$$

et on laisse le soin au lecteur de vérifier que tous les autres commutateurs sont nuls. On obtient donc des relations de commutation analogues à celles de l'oscillateur harmonique quantique :

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{p}} , \quad (3.29)$$

et

$$[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{p}}] = 0 , \quad [\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger] = 0 . \quad (3.30)$$

On peut dès lors exprimer l'Hamiltonien comme fonction de ces nouveaux opérateurs :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \frac{1}{2} \sum_{\{\vec{k}\}} \left[\frac{\varepsilon_{\vec{k}}}{2} (\hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger - \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{-\vec{k}} - \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{-\vec{k}}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon_{\vec{k}}^2}{2\varepsilon_{\vec{k}}} (\hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{-\vec{k}} + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger + \hat{a}_{-\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{-\vec{k}}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\{\vec{k}\}} \varepsilon_{\vec{k}} [\hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}] = \sum_{\{\vec{k}\}} \varepsilon_{\vec{k}} \left[\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right] , \end{aligned}$$

où pour obtenir la deuxième égalité on a renommé l'indice $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ dans le second terme. Une fois encore, on constate que cette expression correspond formellement à une infinité d'oscillateurs harmonique découplés, d'énergies $\varepsilon_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$.

Finalement, pour construire l'espace de Hilbert H de la théorie, on postule l'existence d'un état $|0\rangle \in H$ avec la propriété fondamentale

$$\hat{a}_{\vec{k}} |0\rangle = 0 \quad \forall \vec{k} . \quad (3.31)$$

Soit alors l'état $|N\rangle = |n_1, n_2, \dots\rangle$ sur lequel on définit l'action des opérateurs $\hat{a}_{\vec{k}}$ et $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ de la manière suivante :

$$\hat{a}_{k_j}^\dagger |N\rangle = \sqrt{n_j + 1} |n_1, n_2, \dots, n_j + 1, \dots\rangle , \quad (3.32)$$

$$\hat{a}_{k_j} |N\rangle = \begin{cases} \sqrt{n_j} |n_1, n_2, \dots, n_j - 1, \dots\rangle & \text{si } n_j \geq 1 , \\ 0 & \text{si } n_j = 0 . \end{cases} \quad (3.33)$$

On pourrait vérifier que ces définitions font bien de $\hat{a}_{\vec{k}}$ et $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ des opérateurs adjoints l'un de l'autre. Notons aussi que les états $|N\rangle$ sont obtenus par définition à partir de $|0\rangle \in H$ par applications successives d'opérateurs de type $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$:

$$|N\rangle \propto \prod_{j \in \mathbb{N}^3} \left(\hat{a}_{\vec{k}_j}^\dagger \right)^{n_j} |0\rangle. \quad (3.34)$$

Soient maintenant $N, M \in \mathbb{N}^\infty$. Alors on a les relations d'orthogonalité suivantes :

$$\langle N|M\rangle \neq 0 \iff N = M. \quad (3.35)$$

Définissons finalement l'espace H , qu'on dénommera *espace de Fock* et qu'on notera \mathcal{F} , comme l'espace engendré par les vecteurs $|0\rangle$ et $|N\rangle$:

$$\mathcal{F} = \text{ev}(\{|0\rangle\} \cup \{|N\rangle\}). \quad (3.36)$$

Finalement, on constate que les états $|N\rangle$ sont tous des états propres de l'opérateur Hamiltonien :

$$\hat{\mathcal{H}}|N\rangle = \sum_j n_j \varepsilon_{\vec{k}_j} + \frac{1}{2} \sum_{\{\vec{k}\}} \varepsilon_{\vec{k}}. \quad (3.37)$$

En particulier, l'état $|0\rangle$ est l'état d'énergie minimale du système.

Interprétation On peut à ce point donner une interprétation physique de tous les éléments introduits jusqu'ici. L'état $|0\rangle$ correspond à l'état du vide de la théorie. Les opérateurs $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ et $\hat{a}_{\vec{k}}$ sont alors respectivement des opérateurs de *création* et d'*annihilation* d'une particule dans l'état indexé par \vec{k} , d'énergie $\varepsilon_{\vec{k}}$. Enfin, l'état $|N\rangle$ est l'état à $N = \sum_j n_j$ particules dont n_j sont dans l'état \vec{k}_j . De plus, comme les opérateurs de création commutent tous entre eux (voir l'éq. (3.30)), l'état $|N\rangle$ est symétrique par rapport à l'échange de deux particules : on est donc en présence d'un système de *bosons*. De plus, tout état de l'espace de Fock pourra s'écrire comme une combinaison linéaire des états à N particules :

$$\mathcal{F} \ni |\Psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \sum_{\{\vec{k}_1\}} \psi(\vec{k}_1) \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2!}} \sum_{\{\vec{k}_1\}, \{\vec{k}_2\}} \psi(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_2}^\dagger |0\rangle + \dots, \quad (3.38)$$

où les fonctions $\psi(\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n)$ sont complètement symétriques, puisque les opérateurs $\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger$ commutent. Leur signification est claire : ψ_0 est l'amplitude de probabilité de mesurer le système dans l'état du vide, $\psi(\vec{k}_1)$ l'amplitude de probabilité de mesurer le système dans un état qui correspond à une particule de quantité de mouvement \vec{k}_1 , etc. En effet,

$$\langle \vec{k} | \Psi \rangle = \sum_{\{\vec{k}_1\}} \psi(\vec{k}_1) \langle 0 | \hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger | 0 \rangle = \sum_{\{\vec{k}_1\}} \psi(\vec{k}_1) \left\{ \underbrace{\langle 0 | \hat{a}_{\vec{k}_1}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}} | 0 \rangle}_{=0} + \delta_{\vec{k}, \vec{k}_1} \underbrace{\langle 0 | 0 \rangle}_{=1} \right\} = \psi(\vec{k}).$$

L'équivalent de la fonction d'onde de la mécanique quantique est donc un vecteur à nombre infini dénombrable de composantes, dont chacune est une suite de nombres complexes : $(\psi_0, \psi(\vec{k}), \psi(\vec{k}, \vec{p}), \dots)$.

Peut-être le lecteur attentif a-t-il noté un problème important qui surgit dans l'éq. (3.37) : en raison du deuxième terme, cette expression est infinie. On constate de plus que cette composante divergente correspond exactement à l'énergie de l'état $|0\rangle$, i.e. l'énergie du vide. On peut alors

formellement renormaliser cette expression en soustrayant à l'Hamiltonien une quantité opposée, ce qui revient simplement à shifter l'ensemble du spectre d'énergie. On posera donc pour la suite

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\{\vec{k}\}} \varepsilon_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}. \quad (3.39)$$

Finalement, un calcul analogue à celui qui a mené à cet Hamiltonien produit une expression semblable pour l'opérateur quantité de mouvement :

$$\hat{P}_j = - \int d^3x \hat{\pi}(x) \partial_j \hat{\phi}(x) = \sum_{\{\vec{k}\}} i k_j \hat{\omega}_{\vec{k}} \hat{\phi}_{\vec{k}}^* = \sum_{\{\vec{k}\}} k_j \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}}. \quad (3.40)$$

On constate ainsi que $\hat{\mathcal{H}}$ et \hat{P}_j commutent et que les états $|N\rangle$ forment un ensemble d'états propres communs à l'Hamiltonien et à la quantité de mouvement, d'où leur intérêt fondamental.

3.3.3 Limite thermodynamique

En utilisant les équations (3.27), (3.28) et la décomposition de Fourier des champs, donnons une expression explicite des opérateurs $\hat{\phi}(\vec{x})$ et $\hat{\pi}(\vec{x})$:

$$\hat{\phi}(\vec{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\{\vec{k}\}} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}} \left(\hat{a}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{x}} \right), \quad (3.41)$$

$$\hat{\pi}(\vec{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\{\vec{p}\}} i \sqrt{\frac{\varepsilon_{\vec{p}}}{2}} \left(-\hat{a}_{\vec{p}} e^{i\vec{p}\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger e^{-i\vec{p}\vec{x}} \right). \quad (3.42)$$

On va maintenant passer à la limite $L \rightarrow \infty$. Cette limite fait naturellement passer d'un ensemble discret de points dans l'espace réciproque \vec{k} à un continuum d'états. En particulier, les sommes deviendront des intégrales et les δ de Kronecker seront remplacés par des δ de Dirac.

– (d'une somme à une intégrale)

$$\sum_{\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} \Delta \vec{k} \frac{1}{\Delta \vec{k}} = \sum_{\vec{k}} \Delta \vec{k} \frac{1}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \Delta n} = \sum_{\vec{k}} \Delta \vec{k} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3k.$$

– (de Kronecker à Dirac)

$$1 = \sum_{\vec{k}} \delta_{\vec{k}, \vec{p}} \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3k \mu \delta(\vec{k} - \vec{p}) = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \mu,$$

d'où $\mu = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$ et donc $\delta_{\vec{k}, \vec{p}} \rightsquigarrow \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3 \delta(\vec{k} - \vec{p})$ ($L \rightarrow \infty$).

– (opérateurs de création et d'annihilation) A partir des résultats ci-dessus, on constate que le commutateur $[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{p}}^\dagger]$ devient explicitement dépendant de L . Autrement dit, il n'est pas proprement défini dans cette limite. Pour palier ce défaut, on définit les nouveaux opérateurs $\hat{a}(\vec{k})$ par

$$\hat{a}(\vec{k}) = \sqrt{2L^3 \varepsilon_{\vec{k}}} \hat{a}_{\vec{k}} \iff \hat{a}_{\vec{k}} = \frac{1}{\sqrt{2L^3 \varepsilon_{\vec{k}}}} \hat{a}(\vec{k}). \quad (3.43)$$

Ces nouveaux opérateurs satisfont à des relations de commutation bien définies dans la limite qui nous intéresse, puisque

$$[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{p})] = (2\pi)^3 2\varepsilon_{\vec{k}} \delta(\vec{k} - \vec{p}). \quad (3.44)$$

La raison pour laquelle on a aussi ‘ajouté’ le facteur $\sqrt{2\varepsilon_{\vec{k}}}$ deviendra claire par la suite, lorsqu’on montrera que c’est ce choix particulier qui rend la théorie Lorentz-invariante dans la limite $L \rightarrow \infty$.

Ainsi dans cette limite, on obtient finalement les expressions suivantes, c’est la fin de la quantification du champ scalaire :

$$\hat{\phi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{\vec{k}}} \left\{ \hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} + \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} \right\} ; \quad (3.45)$$

$$\hat{\pi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{\vec{k}}} (-i\varepsilon_{\vec{k}}) \left\{ \hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} - \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} \right\} ; \quad (3.46)$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{\vec{k}}} \varepsilon_{\vec{k}} \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) ; \quad (3.47)$$

$$\hat{P}^j = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{\vec{k}}} k^j \hat{a}^\dagger(\vec{k}) \hat{a}(\vec{k}) . \quad (3.48)$$

Invariance de Lorentz On montre que la mesure d’intégration obtenue, à savoir $\frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{\vec{k}}}$, est une bonne mesure, dans le sens qu’elle est invariante par rapport aux transformations de Lorentz. En effet, on sait que $\delta^4(k_\mu k^\mu - m^2)$ est une grandeur pseudo-scalaire¹. On peut alors écrire² :

$$\delta^{(4)}(k_\mu k^\mu - m^2) = \delta(k_0 k^0 - \vec{k}^2 - m^2) = \delta(k_0 k_0 - \varepsilon_{\vec{k}}^2) = \frac{1}{|2\varepsilon_{\vec{k}}|} [\delta(k^0 - \varepsilon_{\vec{k}}) + \delta(k^0 + \varepsilon_{\vec{k}})] .$$

Alors on a l’égalité

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \delta^4(k_\mu k^\mu - m^2) f(k^2) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{\vec{k}}} f(k^2) \Big|_{k^0 = \varepsilon_{\vec{k}}} ,$$

pour toute fonction scalaire invariante $f(k_\mu k^\mu)$. La grandeur d^4k étant aussi pseudo-scalaire, le membre de gauche est scalaire, i.e. invariant par rapport au groupe de Lorentz. On en déduit que le membre de droite l’est aussi, et donc en particulier que la mesure qui découle du choix (3.43) est bien invariante, l’intégrant devant être pris sur la surface d’énergie $k^0 = \varepsilon_{\vec{k}}$.

3.3.4 Représentation de Heisenberg

Jusqu’ici, nous avons quantifié la théorie à un instant t fixé. On pourrait continuer ainsi et faire porter l’évolution sur les états de l’espace de Fock. En théorie des champs, on préfère généralement travailler en représentation de Heisenberg, où l’évolution temporelle est portée par les opérateurs agissant sur l’espace de Hilbert.

Pour un opérateur $\hat{A}(t)$ défini sur \mathcal{F} , on rappelle que l’équation d’évolution est donnée par

$$i \frac{d}{dt} \hat{A}_H(t) = [\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}_H(t)] , \quad (3.49)$$

où l’indice H indique qu’il s’agit de l’opérateur en représentation de Heisenberg, par opposition à celui dans la représentation de Schrödinger qui n’évolue pas. La solution de cette équation peut formellement être écrite de la manière suivante :

$$\hat{A}_H(t) = \hat{U}_t^\dagger \hat{A}(0) \hat{U}_t , \quad \text{où} \quad \hat{U}_t = e^{-i\hat{\mathcal{H}}t} . \quad (3.50)$$

¹On rappelle qu’une grandeur \mathcal{X} est dite *pseudo-scalaire* si lors d’une transformation de Lorentz Λ , elle se transforme comme $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}' = \det \Lambda \mathcal{X}$.

²On se souvient de la propriété suivante : $\delta(f(x)) = \sum_j \frac{1}{|f'(x_j)|} \delta(x - x_j)$, où $f(x_j) = 0$.

Ainsi, pour l'opérateur de champ $\hat{\phi}(t, \vec{x})$, on obtient

$$\hat{\phi}_H(t, \vec{x}) = e^{i\hat{\mathcal{H}}t} \hat{\phi}_S(\vec{x}) e^{-i\hat{\mathcal{H}}t} . \quad (3.51)$$

Mais on a

$$e^{\gamma \hat{a} \hat{a}^\dagger} \hat{a} e^{-\gamma \hat{a} \hat{a}^\dagger} = e^{-\gamma} \hat{a} \quad \text{et} \quad e^{\gamma \hat{a} \hat{a}^\dagger} \hat{a}^\dagger e^{-\gamma \hat{a} \hat{a}^\dagger} = e^{\gamma} \hat{a}^\dagger . \quad (3.52)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\gamma} \left(e^{\gamma \hat{a} \hat{a}^\dagger} \hat{a} e^{-\gamma \hat{a} \hat{a}^\dagger} \right) &= e^{\gamma \hat{a} \hat{a}^\dagger} (\hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{a} \hat{a} \hat{a}^\dagger) e^{-\gamma \hat{a} \hat{a}^\dagger} = -e^{\gamma \hat{a} \hat{a}^\dagger} \hat{a} e^{-\gamma \hat{a} \hat{a}^\dagger} \\ \implies e^{\gamma \hat{a} \hat{a}^\dagger} \hat{a} e^{-\gamma \hat{a} \hat{a}^\dagger} &= e^{-\gamma} \hat{a} , \end{aligned}$$

et de même pour le conjugué. On a utilisé la condition initiale suivante $\left(e^{\gamma \hat{a} \hat{a}^\dagger} \hat{a} e^{-\gamma \hat{a} \hat{a}^\dagger} \right) \Big|_{\gamma=0} = \hat{a}$. En appliquant ce résultat à l'éq. (3.51), on obtient le champ $\hat{\phi}(t, \vec{x})$ en représentation de Heisenberg :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_H(t, \vec{x}) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ e^{i\hat{\mathcal{H}}t} \hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} e^{-i\hat{\mathcal{H}}t} + e^{i\hat{\mathcal{H}}t} \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} e^{-i\hat{\mathcal{H}}t} \right\} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ e^{-i\varepsilon(k)t} \hat{a}(\vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{x}} + e^{i\varepsilon(k)t} \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\vec{x}} \right\} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ \hat{a}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right\} \Big|_{k^0=\varepsilon(k)} . \end{aligned}$$

De même, on trouve le champ conjugué $\hat{\pi}(t, \vec{x})$. On a finalement complètement résolu le problème du champ quantique régit par le Lagrangien (3.2), y compris l'évolution temporelle :

$$\hat{\phi}_H(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ \hat{a}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right\} ; \quad (3.53)$$

$$\hat{\pi}_H(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} (-i\varepsilon(k)) \left\{ \hat{a}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} - \hat{a}^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right\} , \quad (3.54)$$

$$\text{avec } k^0 \equiv \varepsilon(k) .$$

Remarques

- On constate que le champ de Heisenberg vérifie l'équation du mouvement classique : l'équation de Klein-Gordon est valable aussi bien en théorie classique et en représentation de Heisenberg de la théorie quantique. En effet,

$$\begin{aligned} (\square + m^2) \hat{\phi}_H(t, \vec{x}) &= (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ \hat{a}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right\} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ \hat{a}(k) \underbrace{[(-ik_\mu)(-ik^\mu) + m^2]}_{=-\varepsilon(k)^2 + \vec{k}^2 + m^2 = 0} e^{-ik_\mu x^\mu} + h.c \right\} = 0 . \end{aligned}$$

- Des expression pour les champs $\hat{\phi}_H(t, \vec{x})$ et $\hat{\pi}_H(t, \vec{x})$, on voit immédiatement que ce sont bien des scalaires.
- On a $\hat{\pi}_H(t, \vec{x}) = \partial_t \hat{\phi}_H(t, \vec{x})$; on retrouve aussi à ce niveau l'équation classique, mais entre les opérateurs quantiques en représentation de Heisenberg.

3.3.5 Le spin du champ scalaire

On montre en théorie quantique générale que le moment cinétique total \vec{M} , associé à l'isotropie de l'espace, peut être décomposé en deux termes de nature différente :

$$\vec{M} = \vec{S} + \vec{L}, \quad (3.55)$$

où \vec{L} est le moment cinétique orbital, qui dépend de la quantité de mouvement et de la position de la particule par rapport à un point arbitrairement fixé, et où \vec{S} est le spin, ou moment cinétique intrinsèque, qui ne dépend d'aucun de ces paramètres, mais seulement de la nature de la particule en question. Montrons que le spin du champ scalaire est nul, et donc que le moment cinétique total se réduit au moment orbital.

Nous procédons par une approche algébrique. Calculons

$$\begin{aligned} [M_i, \hat{\phi}(\vec{x})] &= - \int d^3y \epsilon_{ijk} [\hat{\pi}(\vec{y}) \partial_j \hat{\phi}(\vec{y}) y_k, \hat{\phi}(\vec{x})] = - \int d^3y \epsilon_{ijk} [\hat{\pi}(\vec{y}), \hat{\phi}(\vec{x})] \partial_j \hat{\phi}(\vec{y}) y_k \\ &= i \epsilon_{ijk} \partial_j \hat{\phi}(\vec{x}) x_k. \end{aligned}$$

A l'aide de cette relation, calculons l'action de M_i sur un état quelconque à une particule. Une expression générale est donnée par

$$|\Psi\rangle = \int d^3x \chi(\vec{x}) \hat{\phi}(\vec{x}) |0\rangle, \quad (3.56)$$

où $\chi(\vec{x}) \in L^2(\mathbb{R})$ est l'équivalent de la fonction d'onde en mécanique quantique, avec la normalisation appropriée. Comme $M_i|0\rangle = 0$, on trouve :

$$\begin{aligned} M_i |\Psi\rangle &= M_i \int d^3x \chi(\vec{x}) \hat{\phi}(\vec{x}) |0\rangle \\ &= \int d^3x \chi(\vec{x}) \{ [M_i, \hat{\phi}(\vec{x})] + \hat{\phi}(\vec{x}) M_i \} |0\rangle = \int d^3x \chi(\vec{x}) i \epsilon_{ijk} \partial_j \hat{\phi}(\vec{x}) x_k |0\rangle \\ &= \int d^3x \left\{ i \epsilon_{ijk} (\partial_j \chi(\vec{x}) x_k + \chi(\vec{x}) \delta_{kj}) \hat{\phi}(\vec{x}) \right\} |0\rangle \\ &= \int d^3x \left[\left(\vec{x} \wedge \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right) \chi(\vec{x}) \right] \hat{\phi}(\vec{x}) |0\rangle. \end{aligned} \quad (3.57)$$

On voit donc clairement par l'action de l'opérateur moment cinétique sur la fonction d'onde que seul existe un moment cinétique orbital. Le champ scalaire n'a pas de moment cinétique intrinsèque : c'est un champ de spin 0. Ce résultat aurait d'ailleurs pu être attendu déjà de l'expression initiale. En effet, l'opérateur \vec{M} ne contient qu'un seul terme qui dépend explicitement de la position \vec{x} , et donc du choix arbitraire de l'origine : il n'a donc pas de partie intrinsèque.

3.3.6 Résumé de la démarche

A ce stade, on en a essentiellement terminé avec la théorie (classique et quantique) du champ scalaire. Rappelons les étapes principales de la démarche de ce chapitre, puisque la logique sera tout à fait similaire dans l'étude des autres champs.

1. Construire un Lagrangien classique à partir d'un nombre restreint de principes fondamentaux (en particulier les symétries).
2. Identifier toutes les symétries de l'action.
3. En déduire les invariants dynamiques, i.e. les grandeurs conservées lors de l'évolution.

4. Calculer les impulsions conjuguées de la théorie.
5. Construire l'Hamiltonien classique.
6. Remplacer les champs classiques par des opérateurs de champs quantiques agissant sur un certain espace de Hilbert.
7. Trouver leur représentation en fonction d'opérateurs de création et d'annihilation.
8. Construire l'espace de Fock.
9. Exprimer les invariants dynamiques en fonction des $\hat{a}(k)$ et $\hat{a}^\dagger(k)$.
10. En déduire les nombres quantiques caractéristiques du champ.

3.4 Le champ scalaire complexe

Nous avons considéré jusqu'à présent des champs réels. Il s'avère qu'il est aussi possible de travailler avec des fonctions complexes. Cette extension au plan complexe est même essentielle, puisqu'une nouvelle symétrie apparaît, l'invariance de jauge $U(1)$, dont découle la conservation de la charge.

3.4.1 Lagrangien et quantification

Pour construire le Lagrangien, il suffit d'imposer les mêmes contraintes qui ont conduit à (3.2), et d'exiger de plus que la densité lagrangienne obtenue soit réelle. En effet, cette dernière induit directement l'Hamiltonien et donc l'énergie qui est une grandeur réelle. On obtient ainsi

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi(x)^* \partial^\mu \phi(x) - m^2 \phi^*(x) \phi(x) . \quad (3.58)$$

Pour comprendre ce que représente physiquement ce Lagrangien, effectuons le changement de variables (unitaire) suivant :

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \phi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} , \quad (3.59)$$

où les nouveaux champs $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$ sont désormais pris purement réels. On s'est ainsi ramené au cas précédent, puisque le Lagrangien s'écrit maintenant

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2) \right] \partial^\mu \left[\frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \right] - m^2 \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 - i\phi_2) \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i\phi_2) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 - \frac{1}{2} m^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_2^2 . \end{aligned} \quad (3.60)$$

Le champ complexe est donc équivalent à un ensemble de deux champs réels, indépendants et de même masse, sans spin. Pour quantifier la théorie, on pourra alors suivre pas à pas la démarche de la section précédente. En bref, on imposera les relations de commutation suivantes entre les opérateurs de champ :

$$[\hat{\phi}_i(\vec{x}), \hat{\pi}_j(\vec{y})] = i\delta_{ij}\delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (3.61)$$

On pourra alors décomposer les champs sur leurs modes de Fourier qui satisferont

$$[\hat{\varphi}_{i\vec{k}}, \hat{\varpi}_{j\vec{p}}] = i\delta_{ij}\delta_{\vec{k}, -\vec{p}} . \quad (3.62)$$

Finalement, on introduira deux familles d'opérateurs de création et d'annihilation, associées chacune à l'un des deux champs :

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_1(x) &\rightsquigarrow \hat{a}_1(k), \hat{a}_1^\dagger(k), \\ \hat{\phi}_2(x) &\rightsquigarrow \hat{a}_2(k), \hat{a}_2^\dagger(k),\end{aligned}$$

et les commutateurs deviennent alors naturellement :

$$[\hat{a}_{i\vec{k}}, \hat{a}_{j\vec{p}}^\dagger] = \delta_{ij} \delta_{\vec{k}, \vec{p}}. \quad (3.63)$$

Nous notons ici que nous avons évidemment omis les commutateurs triviaux. La nature des particules ainsi créées devient très claire lorsqu'on étudie leurs nombres quantiques associés aux différentes symétries du système décrit par le Lagrangien (3.58).

3.4.2 Symétries : la charge électrique

Comme dans le cas du champ scalaire réel, le groupe de Poincaré est clairement un groupe de symétrie du système. Mais l'extension de l'ensemble des valeurs des champs au plan complexe et l'exigence de réalité du Lagrangien a fait apparaître une nouvelle symétrie : les changements de phase

$$\begin{cases} x^\mu &\longrightarrow x'^\mu = x^\mu, \\ \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x') = e^{-i\alpha} \phi(x), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.64)$$

On verra plus tard que ce cas est le premier exemple de la théorie plus générale des symétries de jauge, essentielles pour la construction du Modèle Standard. Il s'agit ici de la symétrie abélienne $U(1)$.

En utilisant la transformation (3.59), on constate que les changements de phase correspondent à des rotations dans l'espace ϕ_1, ϕ_2 . En effet, on obtient

$$\begin{cases} \phi_1(x) &\longrightarrow \phi'_1(x') = \phi_1(x) \cos \alpha - \phi_2(x) \sin \alpha, \\ \phi_2(x) &\longrightarrow \phi'_2(x') = \phi_1(x) \sin \alpha + \phi_2(x) \cos \alpha. \end{cases} \quad (3.65)$$

Pour obtenir le courant de Noether associé, écrivons les transformations (3.64) sous forme infinitésimale, en considérant ϕ et son conjugué comme deux champs indépendants :

$$\begin{cases} \phi(x) &\longrightarrow \phi'(x') = \phi(x) - i\alpha \phi(x), \\ \phi^*(x) &\longrightarrow \phi'^*(x') = \phi^*(x) + i\alpha \phi^*(x), \end{cases} \quad (3.66)$$

d'où $C_1 = -i\phi$ et $C_2 = i\phi^*$. En appliquant le théorème de Noether, on trouve alors

$$\Theta^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} C_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*_{,\mu}} C_2 = -i [(\partial^\mu \phi^*) \phi - \phi^* (\partial^\mu \phi)],$$

qu'on notera souvent

$$\Theta^\mu = i\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi, \quad (3.67)$$

avec la définition évidente de $\overleftrightarrow{\partial}_\mu$. En termes des champs réels ϕ_i :

$$\Theta^\mu = \phi_2 \partial^\mu \phi_1 - \phi_1 \partial^\mu \phi_2. \quad (3.68)$$

On en déduit la charge conservée :

$$Q = \int d^3x \Theta_0 = \int d^3x \{ \phi_2 \partial_0 \phi_1 - \phi_1 \partial_0 \phi_2 \}. \quad (3.69)$$

A ce stade-ci de la discussion, il n'est pas évident que cette grandeur correspond effectivement à la charge électrique standard. Ceci n'apparaîtra que lorsqu'on traitera l'électrodynamique quantique en interaction et que la symétrie $U(1)$ fournira le courant électrique bien connu des équations de Maxwell.

3.4.3 Les antiparticules

Avec ce premier exemple du champ complexe apparaît naturellement un élément essentiel en théorie quantique des champs : les antiparticules, qu'on va caractériser dans cette section.

Par analogie directe avec le champ scalaire réel, on peut immédiatement écrire les expressions de l'Hamiltonien et de la quantité de mouvement en termes d'opérateurs de création et d'annihilation :

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \varepsilon_{\vec{k}} \left\{ \hat{a}_1^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_1(\vec{k}) + \hat{a}_2^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_2(\vec{k}) \right\} ; \quad (3.70)$$

$$\hat{P} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} \vec{p} \left\{ \hat{a}_1^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_1(\vec{p}) + \hat{a}_2^\dagger(\vec{p}) \hat{a}_2(\vec{p}) \right\} . \quad (3.71)$$

Quant à la charge, on trouve

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ \hat{a}_2(k) e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}_2^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right\} \times \\ &\quad \times \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} i\varepsilon_{\vec{p}} \left\{ -\hat{a}_1(p) e^{-ip_\mu x^\mu} + \hat{a}_1^\dagger(p) e^{ip_\mu x^\mu} \right\} - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} i\varepsilon_{\vec{p}} (2\pi)^3 \left\{ -\hat{a}_2(k) \hat{a}_1(p) e^{-i(k_0+p_0)x^0} \delta(\vec{k} + \vec{p}) \right. \\ &\quad + \hat{a}_2(k) \hat{a}_1^\dagger(p) e^{-i(k_0-p_0)x^0} \delta(\vec{k} - \vec{p}) \\ &\quad - \hat{a}_2^\dagger(k) \hat{a}_1(p) e^{i(k_0-p_0)x^0} \delta(\vec{k} - \vec{p}) \\ &\quad \left. + \hat{a}_2^\dagger(k) \hat{a}_1^\dagger(p) e^{i(k_0+p_0)x^0} \delta(\vec{k} + \vec{p}) \right\} - (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \frac{i}{2} \left\{ \hat{a}_2(k) \hat{a}_1(-k) + \hat{a}_2(k) \hat{a}_1^\dagger(k) - \hat{a}_2^\dagger(k) \hat{a}_1(k) + \hat{a}_2^\dagger(k) \hat{a}_1^\dagger(-k) \right. \\ &\quad \left. - \hat{a}_1(k) \hat{a}_2(-k) - \hat{a}_1(k) \hat{a}_2^\dagger(k) + \hat{a}_1^\dagger(k) \hat{a}_2(k) - \hat{a}_1^\dagger(k) \hat{a}_2^\dagger(-k) \right\} \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} i \left\{ \hat{a}_1^\dagger(k) \hat{a}_2(k) - \hat{a}_2^\dagger(k) \hat{a}_1(k) \right\} . \end{aligned}$$

Remarques Utilisons une notation matricielle pour les opérateurs ci-dessus :

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger & \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\vec{k}} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\vec{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} ; \quad (3.72)$$

$$\hat{P} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger & \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{k} & 0 \\ 0 & \vec{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} ; \quad (3.73)$$

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \begin{pmatrix} \hat{a}_1^\dagger & \hat{a}_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \end{pmatrix} . \quad (3.74)$$

On constate donc que si l'Hamiltonien et la quantité de mouvement sont diagonaux par rapport aux indices 1, 2, la charge ne l'est pas. En particulier, cela signifie que les états $|N\rangle$ à nombre donné

de particules ne sont pas des états propres de la charge. Les particules, telle qu'elles ont été définies jusqu'ici, n'ont donc pas de charge électrique bien définie. On va donc chercher une transformation adaptée des opérateurs \hat{a} , qui rendent les trois opérateurs ci-dessus diagonaux.

Définition Soient un couple d'opérateurs $(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ tel que $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$. On appelle *transformation de Bogoliubov*, une transformation

$$\begin{cases} \hat{b} &= A\hat{a}^\dagger + B\hat{a} + C, \\ \hat{b}^\dagger &= B^*\hat{a}^\dagger + A^*\hat{a} + C^*, \end{cases} \quad (3.75)$$

telle que les nouveaux opérateurs soient encore des opérateurs de création et d'annihilation, i.e. avec $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1$. On montre facilement que c'est le cas si et seulement si

$$|A|^2 - |B|^2 = -1.$$

Appliquons alors une transformation de Bogoliubov à notre système de deux champs $\hat{a}_1^\dagger, \hat{a}_2^\dagger$. Choisissons

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 + i\hat{a}_2), & \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1^\dagger - i\hat{a}_2^\dagger), \\ \hat{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1 - i\hat{a}_2), & \hat{b}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_1^\dagger + i\hat{a}_2^\dagger). \end{aligned} \quad (3.76)$$

Les relations inverses s'écrivent

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a} + \hat{b}), & \hat{a}_1^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger), \\ \hat{a}_2 &= \frac{-i}{\sqrt{2}} (\hat{a} - \hat{b}), & \hat{a}_2^\dagger &= \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{a}^\dagger - \hat{b}^\dagger). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Réexprimons les termes bilinéaires apparaissant dans les éq. (3.72), (3.73) et (3.74) :

$$\begin{aligned} \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 &= \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{b}^\dagger \hat{b}, \\ \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 &= -i (\hat{a}^\dagger \hat{a} - \hat{b}^\dagger \hat{b}); \end{aligned}$$

d'où les expressions suivantes :

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \varepsilon_{\vec{k}} \left\{ \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) + \hat{b}(k)^\dagger \hat{b}(k) \right\}; \quad (3.78)$$

$$\hat{P} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \vec{k} \left\{ \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) + \hat{b}(k)^\dagger \hat{b}(k) \right\}; \quad (3.79)$$

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ \hat{a}^\dagger(k) \hat{a}(k) - \hat{b}(k)^\dagger \hat{b}(k) \right\}. \quad (3.80)$$

L'objectif initial est atteint : par rapport aux nouveaux opérateurs \hat{a} et \hat{b} , tant l'Hamiltonien et la quantité de mouvement que la charge sont diagonaux. L'espace de Fock est maintenant engendré par deux nouvelles familles d'opérateurs de créations : $\hat{a}^\dagger(k)$ et $\hat{b}^\dagger(k)$. Analysons les propriétés de ces particules à partir des opérateurs diagonaux ci-dessus. D'un côté,

$$\hat{\mathcal{H}} \hat{a}^\dagger(k)|0\rangle = \varepsilon_{\vec{k}} \hat{a}^\dagger(k)|0\rangle \quad \text{et} \quad \hat{Q} \hat{a}^\dagger(k)|0\rangle = \hat{a}^\dagger(k)|0\rangle, \quad (3.81)$$

et de l'autre,

$$\hat{\mathcal{H}} \hat{b}^\dagger(k)|0\rangle = \varepsilon_{\vec{k}} \hat{b}^\dagger(k)|0\rangle \quad \text{et} \quad \hat{Q} \hat{b}^\dagger(k)|0\rangle = -\hat{b}^\dagger(k)|0\rangle. \quad (3.82)$$

Les particules ‘ a ’ et ‘ b ’ possèdent donc la même énergie et la même quantité de mouvement, mais une charge (électrique) opposée. On parle alors d’*antiparticules*. L’opérateur $\hat{a}^\dagger(k)$ crée donc une particule de quantité de mouvement \vec{k} , d’énergie $\varepsilon_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ et de charge $Q = +1$ (c’est la valeur propre de \hat{Q}), alors que $\hat{b}^\dagger(k)$ est un créateur d’une antiparticule de même quantité de mouvement \vec{k} et d’énergie $\varepsilon_{\vec{k}} = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$ mais de charge $Q = -1$.

La suite des opérations de ce chapitre peut paraître suprenante au lecteur non encore habitué à la théorie quantique des champs. En particulier, la notion de particule semble ne pas être clairement définie. Il faut bien comprendre ici qu’une particule ne se définit qu’à partir des nombres quantiques qui lui sont associés. Pour cela, on doit donc trouver une base dans l’espace de Hilbert pour laquelle les invariants dynamiques du champ soient tous diagonaux. C’est finalement là l’essence de la théorie quantique.

Avant de conclure ce chapitre, nous donnons encore explicitement la représentation de l’opérateur de champ $\hat{\phi}(x)$ dans la nouvelle base. Nous ne donnons pas le calcul ici ; on trouve après quelques manipulations triviales

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ \hat{a}(k) e^{-ikx} + \hat{b}(k)^\dagger e^{ikx} \right\} . \quad (3.83)$$

Passons maintenant à une représentation plus compliquée du groupe de Lorentz : le champ vectoriel.

Chapitre 4

Le champ vectoriel

Après le champ scalaire, nous allons étudier le champ vectoriel A^μ , qu'on définit à partir de ses propriétés par rapport aux transformations de Lorentz :

$$A'^\mu(x') = \Lambda^\mu_\nu A^\nu(x) . \quad (4.1)$$

Propriété Tout champ vectoriel peut être décomposé de la manière suivante :

$$A^\mu(x) = A^{(l)\mu}(x) + A^{(tr)\mu}(x) , \quad (4.2)$$

où $A^{(l)\mu}(x)$ est tel qu'il existe un autre champ $\phi(x)$ pour lequel

$$A^{(l)\mu}(x) = \partial^\mu \phi(x) , \quad (4.3)$$

et $A^{(tr)\mu}(x)$ est à divergence nulle :

$$\partial_\mu A^{(tr)\mu}(x) = 0 . \quad (4.4)$$

On appellera $A^{(l)\mu}(x)$ la *partie longitudinale* de $A^\mu(x)$, et $A^{(tr)\mu}(x)$ sa *partie transverse*. Cette dénomination provient de l'analyse de Fourier. En effet, dans l'espace réciproque, les équations ci-dessus deviennent

$$\begin{aligned} A_k^{(l)\mu} &= k^\mu \phi_k , \\ k_\mu A_k^{(tr)\mu} &= 0 . \end{aligned}$$

Le champ longitudinal est donc orienté selon k , alors que le champ transverse lui est orthogonal.

Nous commençons par étudier le champ vectoriel massif, dont on verra qu'il possède dans l'espace tridimensionnel \mathbb{R}^3 les deux composantes longitudinale et transverse. Le champ non massif s'en distingue précisément profondément par le fait qu'il est purement transverse.

4.1 Le champ vectoriel massif

4.1.1 Construction de la densité lagrangienne

Afin de décrire le système, nous devons bien évidemment commencer par construire l'action pour le champ vectoriel. Pour cela, reprenons les contraintes imposées lors de l'établissement de la densité lagrangienne du champ scalaire, à savoir invariance de Lorentz, linéarité des équations

du mouvement et dépendance dans les champs et leurs dérivées premières par rapport au temps uniquement. La fonctionnelle la plus générale compatible avec ces contraintes peut s'écrire

$$\mathcal{L} = C_1 A_\mu A^\mu + C_2 \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + C_3 \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + C_4 \partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu + C_5 \partial_\mu A^\mu . \quad (4.5)$$

On peut considérablement simplifier cette expression. Considérons l'action, i.e. l'intégrale sur tout l'espace-temps de cette densité. Premièrement, le dernier terme peut être éliminé par une application directe du théorème de Gauss. De plus, les deux termes précédents sont en fait équivalents après une double intégration par partie. En effet,

$$\partial_\mu A^\mu \partial_\nu A^\nu \rightsquigarrow -\partial_\nu \partial_\mu A^\mu A^\nu \rightsquigarrow \partial_\nu A^\mu \partial_\mu A^\nu = \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu .$$

Finalement, on redéfinit les constantes C_i restantes pour obtenir l'expression suivante :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \alpha \partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2} \beta \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu . \quad (4.6)$$

Equations du mouvement Il est alors aisé de déduire les équations du mouvement :

$$\delta S = 0 \iff -\alpha \partial_\mu \partial^\mu A_\nu - \beta \partial_\nu \partial^\mu A_\mu + m^2 A_\nu = 0 . \quad (4.7)$$

Il est utile pour la suite de donner une expression explicite des quatre équations ci-dessus pour les indices spatiaux et temporel :

$$\begin{aligned} (\nu = 0) \quad & -\alpha \partial_t^2 A_0 - \beta \partial_t^2 A_0 + \alpha \nabla^2 A_0 - \beta \partial_t \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + m^2 A_0 = 0 \\ & \iff (\alpha + \beta) \ddot{A}_0 = \alpha \nabla^2 A_0 - \beta \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}} + m^2 A_0 ; \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} (\nu = i) \quad & -\alpha \partial_t^2 A_i + \alpha \nabla^2 A_i - \beta \partial_i \dot{A}_0 - \beta \partial_i \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + m^2 A_i = 0 \\ & \iff \alpha \ddot{\vec{A}} = \alpha \nabla^2 \vec{A} + \beta \vec{\nabla} \dot{A}_0 + \beta \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + m^2 \vec{A} . \end{aligned} \quad (4.9)$$

Fonction hamiltonienne Avant de poursuivre, calculons la densité d'énergie. Une fois encore, il suffit de calculer le courant de Noether associé aux translations dans le temps. On a $f_0^\mu = \delta_0^\mu$, d'où

$$\begin{aligned} T_0^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{,\mu}^\nu} A_{,\rho}^\nu f_0^\rho - f_0^\mu \mathcal{L} \\ &= (\alpha \partial^\mu A^\nu + \beta \partial^\nu A^\mu) \partial_\rho A_\nu \delta_0^\rho - \delta_0^\mu \left(\frac{\alpha}{2} \partial_\rho A_\nu \partial^\rho A^\nu + \frac{\beta}{2} \partial_\rho A_\nu \partial^\nu A^\rho + \frac{m^2}{2} A_\rho A^\rho \right) . \end{aligned}$$

On trouve alors la densité d'énergie T_{00} au point (t, \vec{x}) :

$$\begin{aligned} T_{00} &= \alpha \partial_0 A^\nu \partial_0 A_\nu + \beta \partial^\nu A_0 \partial_0 A_\nu - \frac{\alpha}{2} \partial_\rho A_\nu \partial^\rho A^\nu - \frac{\beta}{2} \partial_\rho A_\nu \partial^\nu A^\rho - \frac{m^2}{2} A_\rho A^\rho \\ &= \alpha (\partial_0 A_0)^2 - \alpha (\partial_0 A_i)^2 + \beta (\partial_0 A_0)^2 - \beta (\partial_0 A_i \partial_i A_0) - \frac{\alpha}{2} (\partial_0 A_0)^2 + \frac{\alpha}{2} (\partial_0 A_i)^2 + \frac{\alpha}{2} (\partial_i A_0)^2 \\ &\quad - \frac{\alpha}{2} (\partial_i A_j)^2 - \frac{\beta}{2} (\partial_0 A_0)^2 + \frac{\beta}{2} (\partial_0 A_i \partial_i A_0) + \frac{\beta}{2} (\partial_i A_0 \partial_0 A_i) - \frac{\beta}{2} (\partial_i A_j \partial_j A_i) - \frac{m^2}{2} A_0^2 + \frac{m^2}{2} A_i^2 \\ &= \frac{1}{2} (\alpha + \beta) (\partial_0 A_0)^2 - \frac{1}{2} \alpha (\partial_0 A_i)^2 + \frac{1}{2} \alpha (\partial_i A_0)^2 - \frac{1}{2} \alpha (\partial_i A_j)^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} \beta (\partial_i A_j \partial_j A_i) - \frac{1}{2} m^2 A_0^2 + \frac{1}{2} m^2 A_i^2 . \end{aligned} \quad (4.10)$$

A l'aide de (4.10) et des équations (4.8) et (4.9), nous allons maintenant déduire le domaine des valeurs admissibles pour les paramètres α et β . Pour l'instant, nous allons considérer le cas $m^2 > 0$. La première exigence est naturellement la positivité de la densité d'énergie : en effet, la théorie sera bien définie pour autant qu'elle possède un état d'énergie minimale, stable. Or on constate que si ceci ne posait aucun problème pour le champ scalaire à la condition d'avoir m réel, ce n'est plus le cas ici, puisqu'il apparaît plusieurs signes négatifs dans (4.10). En particulier, montrons que si les champs $A_0(t, \vec{x})$, $\dot{A}_0(t, \vec{x})$, $\vec{A}(t, \vec{x})$, et $\dot{\vec{A}}(t, \vec{x})$ étaient choisis indépendamment, alors l'énergie pourrait toujours être négative, quel que soit le choix des paramètres libres du Lagrangien. Prenons successivement (par exemple)

$$\begin{aligned}
\bullet A_\mu \text{ indépendants de } (t, \vec{x}) & \Rightarrow T_{00} = -\frac{1}{2}m^2 A_0^2 + \frac{1}{2}m^2 A_i^2 & \Rightarrow m^2 = 0 ; \\
\bullet A_0 = A_1 = A_2 = 0 \text{ et } A_3 = A_3(t) & \Rightarrow T_{00} = -\frac{1}{2}\alpha (\partial_t A_3)^2 & \Rightarrow \alpha \leq 0 ; \\
\bullet A_1 = A_2 = A_3 = 0 \text{ et } A_0 = A_0(x^3) & \Rightarrow T_{00} = \frac{1}{2}\alpha (\partial_3 A_0)^2 & \Rightarrow \alpha \geq 0 ; \\
\bullet A_0 = A_1 = A_2 = 0 \text{ et } A_3 = A_3(x^3) & \Rightarrow T_{00} = -\frac{1}{2}\beta (\partial_3 A_3 \partial_3 A_3) & \Rightarrow \beta \leq 0 ; \\
\bullet A_1 = A_2 = A_3 = 0 \text{ et } A_0 = A_0(t) & \Rightarrow T_{00} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) (\partial_0 A_0)^2 & \Rightarrow \beta \geq 0 .
\end{aligned}$$

Ainsi, si l'on suppose qu'il est possible de choisir les champs de manière indépendante, et que parallèlement, on impose la positivité de la densité d'énergie, alors l'espace des paramètres possibles se réduit à $\alpha = 0$, $\beta = 0$ et $m^2 = 0$. Le Lagrangien est alors uniformément nul, le système n'existe pas.

En conclusion, il est donc indispensable d'avoir une ou plusieurs contraintes entre les champs qui restreignent les choix possibles, et ne permettent donc pas la suite proposée ci-dessus. Tournons-nous alors vers les équations du mouvement (4.8) et (4.9).

Ces équations sont des équations différentielles du second ordre par rapport au temps. Elles constituent donc *a priori* un problème régulier de Cauchy, dont on sait par le théorème de Cauchy-Lipchitz que la solution est entièrement caractérisée par les conditions initiales $A_0(0, \vec{x})$, $\dot{A}_0(0, \vec{x})$, $\vec{A}(0, \vec{x})$ et $\dot{\vec{A}}(0, \vec{x})$, auxquelles il est possible de conférer une valeur arbitraire. Mais nous venons de voir que ceci est incompatible avec une fonctionnelle énergie définie positive. On en conclut donc que les équations du mouvement ne peuvent pas former un problème régulier de Cauchy et qu'au moins l'une d'entre elles doit se réduire à une simple contrainte. Pour cela, il y a trois possibilités :

1. $\alpha + \beta = 0$, $\alpha = 0$; ceci est totalement inintéressant, puisqu'alors $\alpha = \beta = 0$, et les équations du mouvement se réduisent $m^2 A_\mu = 0$, et le champ n'a donc pas de dynamique.
2. $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha = 0$; on obtient alors $\beta \neq 0$ et $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\beta \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu$. On montre que la théorie que l'on obtient est simplement celle d'un champ scalaire. Pour cela, posons

$$A_\mu = B_\mu + \partial_\mu \phi, \quad \text{avec} \quad \partial^\nu B_\nu = 0 .$$

Le Lagrangien devient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\beta (\partial_\mu B_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \phi) (\partial^\nu B^\mu + \partial^\nu \partial^\mu \phi) + \frac{1}{2}m^2 (B_\mu + \partial_\mu \phi) (B^\mu + \partial^\mu \phi) \\
&= \frac{1}{2}\beta [\partial_\mu B_\nu \partial^\nu B^\mu + \partial_\mu B_\nu \partial^\nu \partial^\mu \phi + \partial_\mu \partial_\nu \phi \partial^\nu B^\mu + \partial_\mu \partial_\nu \phi \partial^\nu \partial^\mu \phi] \\
&\quad + \frac{1}{2}m^2 [B_\mu B^\mu + B_\mu \partial^\mu \phi + \partial_\mu \phi B^\mu + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi] .
\end{aligned}$$

On peut alors effectuer des intégrations par parties dans l'action pour déplacer l'action des opérateurs dérivées. Il suffit d'utiliser la condition de divergence nulle du champ B_μ pour constater que les seuls termes essentiels dans la densité lagrangienne sont

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\beta \partial_\mu \partial_\nu \phi \partial^\mu \partial^\nu \phi + \frac{1}{2}m^2 B_\mu B^\mu + \frac{1}{2}m^2 \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (4.11)$$

En faisant varier l'action par rapport aux champs ϕ et B_μ , on obtient aisément les équations du mouvement suivantes :

$$m^2 B_\mu = 0, \quad (4.12)$$

$$\left(\square - \frac{m^2}{\beta}\right) \square \phi = 0. \quad (4.13)$$

Le champ B_μ est donc uniformément nul, et l'équation (4.13) se réduit à une équation de Klein-Gordon pour le champ $\xi = \square \phi$. On a donc montré que pour ce choix des paramètres, le Lagrangien original ne décrit rien de plus qu'un champ scalaire réel. Il ne reste donc qu'un seul cas :

3. $\alpha + \beta = 0$, $\alpha \neq 0$; on verra que ce cas fournit effectivement une nouvelle et bonne théorie. Faisons le choix pratique $\alpha = -1$, et donc $\beta = +1$. Définissons le nouveau tenseur $F_{\mu\nu}$ à partir des dérivées du champ A_μ

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (4.14)$$

dont on remarque au passage qu'il est antisymétrique : $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$.

La densité lagrangienne s'écrit alors

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu. \quad (4.15)$$

Finalement on laisse au lecteur le soin de vérifier que les équations du mouvement obtenues sont

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0, \quad \nu = 0, \dots, 3. \quad (4.16)$$

On les appelle *équations de Proca*.

4.1.2 Nombre de champs indépendants

Développons maintenant la théorie associée au Lagrangien (4.15). Commençons par réécrire les équations du mouvement en composantes :

$$0 = (m^2 - \nabla^2) A_0 - \vec{\nabla} \cdot \dot{\vec{A}}; \quad (4.17)$$

$$\ddot{\vec{A}} = \nabla^2 \vec{A} - \vec{\nabla} \dot{A}_0 - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - m^2 \vec{A}. \quad (4.18)$$

De plus prenons la divergence de l'équation de Proca. Comme $F^{\mu\nu}$ est antisymétrique, on a $\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, et donc

$$(4.16) \implies \partial_\nu A^\nu = 0. \quad (4.19)$$

Le champ vectoriel massif est donc un champ purement transverse dans l'espace-temps. Notons cependant qu'il ne l'est pas par rapport à l'espace tridimensionnel \mathbb{R}^3 : $\partial_i A^i \neq 0$. En général, on réserve la terminologie transverse pour ce dernier cas. On verra dans la suite de cette section que le champ massif possède aussi bien une composante longitudinale que transverse.

On observe donc que les huit champs $A^\mu(x)$ et $\dot{A}^\mu(x)$ ne sont plus indépendants, puisqu'il existe maintenant deux équations de contrainte, à savoir $\dot{A}_0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ et l'éq. (4.17). En effet, cette dernière n'a plus le statut d'équation du mouvement pour la composante '0' du champ, puisqu'elle ne contient plus de dérivée temporelle de A^0 . Elle permettra simplement d'extraire algébriquement $A^0(t, \vec{x})$, connaissant $A^i(t, \vec{x})$ et $\dot{A}^i(t, \vec{x})$.

Pour spécifier une solution des équations du mouvement, il suffira donc de fixer indépendamment les *six* champs $A^i(t, \vec{x})$ et $\dot{A}^i(t, \vec{x})$. C'est là la différence avec l'analyse du début de ce chapitre, où un choix arbitraire des paramètres du Lagrangien conduisait à l'indépendance de huit champs. C'est précisément cette nouveauté qui fait que l'énergie est désormais une grandeur définie positive.

4.1.3 Invariants dynamiques : énergie et quantité de mouvement

Pour donner une expression de ces deux invariants, on considère les translation d'espace-temps et on applique le théorème de Noether. Commençons par calculer

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\nu{}_{,\mu}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\alpha\beta}} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu A^\nu)} = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \left(\delta_\alpha^\mu \eta_{\beta\gamma} \delta_\nu^\gamma - \delta_\beta^\mu \eta_{\alpha\gamma} \delta_\nu^\gamma \right) \\ &= -\frac{1}{2} F^{\mu\beta} \eta_{\beta\nu} + \frac{1}{2} F^{\alpha\mu} \eta_{\alpha\nu} = -\frac{1}{2} F^\mu{}_\nu + \frac{1}{2} F_\nu{}^\mu = -F^\mu{}_\nu. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Le tenseur énergie-impulsion du champ vectoriel massif est donc

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\sigma{}_{,\mu}} A^\sigma{}_{,\nu} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L},$$

ou encore

$$T^\mu{}_\nu = -F^\mu{}_\sigma \partial_\nu A^\sigma - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}. \quad (4.21)$$

On en tire alors la nouvelle expression pour la densité d'énergie :

$$\begin{aligned} T_{00} &= -F_{0\mu} \partial_0 A^\mu + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu \\ &= F_{0i} \partial_0 A_i - \frac{1}{4} (F_{0i})^2 - \frac{1}{4} (F_{i0})^2 + \frac{1}{4} (F_{ij})^2 - \frac{1}{2} m^2 A_0^2 + \frac{1}{2} m^2 A_i^2 \\ &= F_{0i} \partial_0 A_i - \frac{1}{2} (F_{0i})^2 + \frac{1}{4} (F_{ij})^2 - \frac{1}{2} m^2 A_0^2 + \frac{1}{2} m^2 A_i^2, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $F_{\mu\mu} = 0$ par antisymétrie (pas de sommation sur μ ici). Par ailleurs, de l'équation de Proca on tire $A^0 = -\frac{1}{m^2} \partial_\mu F^{\mu 0} = -\frac{1}{m^2} \partial_i F^{i0}$ et donc $A_0 = \frac{1}{m^2} (\partial_i F_{i0})$. De la définition du tenseur $F_{\mu\nu}$, on a aussi $\partial_0 A_i = F_{0i} + \partial_i A_0$. D'où

$$\begin{aligned} T_{00} &= F_{0i} (F_{0i} + \partial_i A_0) - \frac{1}{2} (F_{0i})^2 + \frac{1}{4} (F_{ij})^2 - \frac{1}{2m^2} (\partial_i F_{i0})^2 + \frac{1}{2} m^2 A_i^2 \\ &= \frac{1}{2} (F_{0i})^2 + F_{0i} \partial_i A_0 + \frac{1}{4} (F_{ij})^2 - \frac{1}{2m^2} (\partial_i F_{i0})^2 + \frac{1}{2} m^2 A_i^2. \end{aligned}$$

Finalement, l'énergie totale sera l'intégrale de cette expression sur tout l'espace. On peut alors intégrer par partie le second terme pour obtenir :

$$F_{0i} \partial_i A_0 \rightsquigarrow -\partial_i F_{0i} \left(\frac{1}{m^2} \partial_j F_{j0} \right) = \frac{1}{m^2} (\partial_i F_{0i})^2,$$

et l'énergie totale est donc simplement

$$E = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (F_{0i})^2 + \frac{1}{2m^2} (\partial_i F_{i0})^2 + \frac{1}{4} (F_{ij})^2 + \frac{1}{2} m^2 A_i^2 \right\} \geq 0. \quad (4.22)$$

Le but est donc atteint : l'énergie est une fonctionnelle définie positive. La théorie aura donc un état fondamental stable et bien défini. Le Lagrangien que nous avons proposé peut donc être considéré comme un bon Lagrangien.

Avant de passer à la suite, utilisons l'éq. (4.21) pour donner l'expression de la quantité de mouvement du champ vectoriel :

$$P_i = \int d^3x T^0_i = \int d^3x \{-F^0_j \partial_i A^j\} \implies \vec{P} = \int d^3x \{F^0_j \vec{\nabla} A^j\}. \quad (4.23)$$

Pour pouvoir lancer la procédure de quantification, nous aurons finalement besoin des impulsions conjuguées et de l'Hamiltonien. Le champ B^μ , conjugué à A^μ est donné par

$$B^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu}. \quad (4.24)$$

En particulier, $B^0 \equiv 0$, ce qui n'est pas surprenant : il est le conjugué d'un champ qui n'est pas un véritable degré de liberté de la théorie. La densité hamiltonienne est alors immédiate : $\mathcal{H} = (\partial_0 A_\mu) B^\mu - \mathcal{L}$, et on obtient ainsi l'Hamiltonien de la théorie :

$$\mathcal{H} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} B_i^2 + \frac{1}{2m^2} (\partial_i B_i)^2 + \frac{1}{2} m^2 A_i^2 + \frac{1}{4} F_{ij}^2 \right\}, \quad (4.25)$$

où $B_i = F_{i0}$. On constate donc encore une fois que l'Hamiltonien est égal à l'énergie, et qu'il est défini positif pour autant que $m^2 \geq 0$. La quantité de mouvement dans ces nouvelles variables s'écrit alors

$$\vec{P} = \int d^3x \{B_i \vec{\nabla} A^i\}. \quad (4.26)$$

Résumons brièvement ce qui a été fait jusqu'ici. Partant de la densité lagrangienne la plus générale compatible avec les contraintes de symétrie et de simplicité qu'on s'est imposées, on a constaté que l'énergie associée à ce Lagrangien n'était pas définie positive en général. En étudiant la structure des équations du mouvement qui en découlaient, on a pu définir sous quelles conditions la théorie obtenue est une théorie satisfaisante, où ce problème disparaît. Nous avons alors pu conclure que le champ vectoriel massif est à divergence nulle (dans \mathbb{R}^4), et donc que le nombre de champs indépendants de la théorie n'est que de trois (du point de vue lagrangien). Enfin, nous avons construit dans le formalisme hamiltonien les deux invariants les plus importants : l'énergie et la quantité de mouvement.

4.1.4 Quantification

La quantification de la théorie suit pour l'essentiel ce qui a été fait dans le cas du champ scalaire. On n'entrera donc plus dans certains détails techniques traités au chapitre précédent. On commence par promouvoir tous les degrés de liberté dynamiques comme opérateurs satisfaisant les relations de commutation canoniques :

$$[\hat{A}_i(\vec{x}), \hat{B}_j(\vec{y})] = i\delta_{ij}\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.27)$$

Il est important de noter ici que la composante '0' des champs n'est pas considérée, puisqu'on a précisément démontré dans la partie précédente que A_0 ne constitue pas un vrai degré de liberté du champ. On n'a donc à nouveau que six opérateurs fondamentaux dans la théorie du champ vectoriel massif (i.e. trois paires de champs conjugués).

Comme dans le cas scalaire, on va quantifier la théorie à un instant t fixé et dans une boîte de grandeur L , de sorte à pouvoir travailler avec les modes de Fourier. On écrit pour commencer

$$\hat{A}_i(\vec{x}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\{\vec{k}\}} \sum_{n=1}^3 e^{i\vec{k}\vec{x}} \hat{\varphi}_{\vec{k}}^{(n)} e_i^{(n)}(\vec{k}), \quad (4.28)$$

$$\hat{B}_j(\vec{y}) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\{\vec{p}\}} \sum_{n=1}^3 e^{i\vec{p}\vec{y}} \hat{\omega}_{\vec{p}}^{(n)} e_j^{(n)}(\vec{p}), \quad (4.29)$$

$$(4.30)$$

avec les conditions de réalité $\hat{\varphi}_{\vec{k}}^{(n)*} e_i^{(n)}(\vec{k}) = \hat{\varphi}_{-\vec{k}}^{(n)} e_i^{(n)}(-\vec{k})$ et $\hat{\omega}_{\vec{k}}^{(n)*} e_j^{(n)}(\vec{k}) = \hat{\omega}_{-\vec{k}}^{(n)} e_j^{(n)}(-\vec{k})$. On a donc décomposé chaque mode de Fourier sur une base, *a priori* quelconque $\{\vec{e}^{(1)}, \vec{e}^{(2)}, \vec{e}^{(3)}\}$ de \mathbb{R}^3 , qui peut être différente pour chaque valeur de \vec{k} . Un choix intéressant et révélateur d'un point de vue de la signification physique de la théorie sera alors de prendre :

$$\vec{e}^{(3)}(\vec{k}) = \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}; \quad \vec{e}^{(1)}(\vec{k}) \perp \vec{e}^{(2)}(\vec{k}) \perp \vec{e}^{(3)}(\vec{k}),$$

c'est-à-dire trois vecteurs unité, spatialement orthogonaux entre eux et dont le troisième pointe dans la direction de \vec{k} . Au vu de cette configuration, on appellera *transverses* les deux vecteurs $\vec{e}^{(1)}$ et $\vec{e}^{(2)}$, alors que $\vec{e}^{(3)}$ sera dit *longitudinal*. Tous les éléments qui vont apparaître par la suite, que ce soient les opérateurs de champ eux-même ou les invariants dynamiques, pourront toujours être décomposés selon ce schéma qui fait écho à la décomposition proposée en tout début de ce chapitre. Construisons par exemple l'Hamiltonien. On a

$$\begin{aligned} m^2 \int d^3x \hat{A}_i^2 &= \sum_{n, \{\vec{k}\}} m^2 \hat{\varphi}_{\vec{k}}^{(n)} \hat{\varphi}_{\vec{k}}^{(n)*}; \\ \int d^3x \hat{B}_i^2 &= \sum_{n, \{\vec{k}\}} \hat{\omega}_{\vec{k}}^{(n)} \hat{\omega}_{\vec{k}}^{(n)*}; \\ \frac{1}{m^2} \int d^3x \left(\partial_i \hat{B}_i \right)^2 &= \sum_{\{\vec{k}\}} \frac{|\vec{k}|^2}{m^2} \hat{\omega}_{\vec{k}}^{(3)} \hat{\omega}_{\vec{k}}^{(3)*}; \\ \frac{1}{4} \int d^3x \hat{F}_{ij}^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\{\vec{k}\}} |\vec{k}|^2 \sum_{n=1}^2 \hat{\varphi}_{\vec{k}}^{(n)} \hat{\varphi}_{\vec{k}}^{(n)*}. \end{aligned}$$

Nous donnons le calcul explicite pour le troisième terme uniquement, le reste étant plus simple et

donc laissé en exercice :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m^2} \int d^3x \left(\partial_i \hat{B}_i \right)^2 &= \frac{1}{m^2 L^3} \int d^3x \left\{ \sum_{\{\vec{k}\}, \{\vec{p}\}} \sum_{n,m=1}^3 \sum_{a,b=1}^3 (-ik_a) (-ip_b) e^{i(\vec{k}+\vec{p})\vec{x}} \hat{\omega}_{\vec{k}}^{(n)} e_a^{(n)}(\vec{k}) \hat{\omega}_{\vec{p}}^{(m)} e_b^{(m)}(\vec{p}) \right\} \\
&= -\frac{1}{m^2} \sum_{\{\vec{k}\}, \{\vec{p}\}} \sum_{n,m=1}^3 \sum_{a,b=1}^3 \delta_{\vec{k}, -\vec{p}} k_a p_b \hat{\omega}_{\vec{k}}^{(n)} e_a^{(n)}(\vec{k}) \hat{\omega}_{\vec{p}}^{(m)} e_b^{(m)}(\vec{p}) \\
&= -\frac{1}{m^2} \sum_{\{\vec{k}\}, n, m, a, b} k^a (-k^b) \hat{\omega}_{\vec{k}}^{(n)} \hat{\omega}_{-\vec{k}}^{(m)} e_a^{(n)}(\vec{k}) e_b^{(m)}(-\vec{k}) \\
&= -\frac{1}{m^2} \sum_{\{\vec{k}\}, n, m} \underbrace{\left[\vec{k} \cdot \vec{e}^{(n)}(\vec{k}) \right]}_{|\vec{k}| \delta_3^{(n)}} \underbrace{\left[(-\vec{k}) \cdot \vec{e}^{(m)}(-\vec{k}) \right]}_{|\vec{k}| \delta_3^{(m)}} \hat{\omega}_{\vec{k}}^{(n)} \hat{\omega}_{-\vec{k}}^{(m)} = \sum_{\{\vec{k}\}} \frac{|\vec{k}|^2}{m^2} \hat{\omega}_{\vec{k}}^{(3)} \hat{\omega}_{\vec{k}}^{(3)*} ,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité provient de la définition des vecteurs $\vec{e}^{(i)}$ et des conditions de réalité établies plus haut. On peut maintenant écrire l'Hamiltonien :

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\{\vec{k}\}} \sum_{n=1}^2 \left[\hat{\omega}_{\vec{k}}^{(n)} \hat{\omega}_{\vec{k}}^{(n)*} + \left(|\vec{k}|^2 + m^2 \right) \hat{\varphi}_{\vec{k}}^{(n)} \hat{\varphi}_{\vec{k}}^{(n)*} \right] + \frac{1}{2} \sum_{\{\vec{k}\}} \left[\frac{|\vec{k}|^2 + m^2}{m^2} \hat{\omega}_{\vec{k}}^{(3)} \hat{\omega}_{\vec{k}}^{(3)*} + m^2 \hat{\varphi}_{\vec{k}}^{(3)} \hat{\varphi}_{\vec{k}}^{(3)*} \right] . \quad (4.31)$$

La premier terme correspond clairement à la partie transverse des champs, alors que la seconde est longitudinale. A ce point-ci, effectuons une transformation canonique sur la partie longitudinale :

$$\hat{\varphi}^{(3)} \longrightarrow \frac{1}{m} \hat{\omega}^{(3)} , \quad (4.32)$$

$$\hat{\omega}^{(3)} \longrightarrow -m \hat{\varphi}^{(3)} , \quad (4.33)$$

On vérifie immédiatement que les nouveaux champs satisfont toujours les relations de commutation canoniques, à savoir $[\hat{\varphi}_{\vec{k}}^{(3)}, \hat{\omega}_{\vec{p}}^{(3)}] = i \delta_{\vec{k}, -\vec{p}}$. De plus, l'Hamiltonien devient alors exactement celui de trois champs scalaires indépendants tels que rencontrés dans le chapitre précédent. Cette remarque est essentielle, puisqu'elle permet alors de connaître immédiatement la théorie quantique associée, l'ensemble du travail ayant déjà été fait. On introduira donc les trois familles d'opérateurs de création et d'annihilation associés à chacun des champs et qui satisferont naturellement

$$[\hat{a}_{(n)\vec{k}}, \hat{a}_{(m)\vec{p}}^\dagger] = \delta_{\vec{k}, \vec{p}} \delta_{n, m} , \quad (4.34)$$

et

$$[\hat{a}_{(n)\vec{k}}, \hat{a}_{(m), \vec{p}}] = 0 , \quad [\hat{a}_{(n)\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{(m)\vec{p}}^\dagger] = 0 . \quad (4.35)$$

On pourra alors construire l'espace de Fock associés à ces trois types de particules, et écrire l'Hamiltonien dans ces nouvelle variables. Après renormalisation, on trouvera

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{\{\vec{k}\}} \varepsilon_{\vec{k}} \sum_{n=1}^3 \hat{a}_{(n)\vec{k}}^\dagger \hat{a}_{(n)\vec{k}} , \quad (4.36)$$

et on constate donc que la démarche suivie ici produit naturellement un Hamiltonien diagonal par rapport aux trois champs.

On pourra de même passer à la limite d'une boîte de dimension infinie. Finalement, pour chacun des trois champs, la représentation de Heisenberg de la théorie sera en tout point identique à celle du champ scalaire. On peut donc exprimer à ce stade les champs fondamentaux de la théorie en terme d'opérateurs de création et d'annihilation. En prenant en compte la transformation (4.32), on peut immédiatement écrire les égalités suivantes à partir des éq. (3.53) et (3.54).

$$\begin{aligned} \hat{A}(t, \vec{x}) = & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ \sum_{n=1}^2 \vec{e}^{(n)}(k) \left[\hat{a}_{(n)}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}_{(n)}^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right] \right. \\ & \left. + \frac{-i\varepsilon(k)}{m} \vec{e}^{(3)}(k) \left[\hat{a}_{(3)}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} - \hat{a}_{(3)}^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}(t, \vec{x}) = & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ \sum_{n=1}^2 (-i\varepsilon(k)) \vec{e}^{(n)}(k) \left[\hat{a}_{(n)}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} - \hat{a}_{(n)}^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right] \right. \\ & \left. - m \vec{e}^{(3)}(k) \left[\hat{a}_{(3)}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}_{(3)}^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Afin d'obtenir une expression plus symétrique, on effectue finalement une transformation de Bogoliubov (qui ne modifiera pas les expressions de l'Hamiltonien ou de la quantité de mouvement)

$$\begin{cases} \hat{a}_{(3)}(k) & \longrightarrow & i\hat{a}_{(3)}(k), \\ \hat{a}_{(3)}^\dagger(k) & \longrightarrow & -i\hat{a}_{(3)}^\dagger(k), \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \hat{A}(t, \vec{x}) = & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ \sum_{n=1}^2 \vec{e}^{(n)}(k) \left[\hat{a}_{(n)}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}_{(n)}^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right] \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon(k)}{m} \vec{e}^{(3)}(k) \left[\hat{a}_{(3)}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}_{(3)}^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right] \right\}; \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} \hat{B}(t, \vec{x}) = & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} (-i\varepsilon(k)) \left\{ \sum_{n=1}^2 \vec{e}^{(n)}(k) \left[\hat{a}_{(n)}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} - \hat{a}_{(n)}^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right] \right. \\ & \left. + \frac{m}{\varepsilon(k)} \vec{e}^{(3)}(k) \left[\hat{a}_{(3)}(k) e^{-ik_\mu x^\mu} - \hat{a}_{(3)}^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Notons encore que pour tout k , la base de vecteurs $\{\vec{e}^{(i)}(k)\}$ forme une base orthonormée de \mathbb{R}^3 . De plus, on a explicitement la décomposition des vecteurs de champ en partie longitudinale ($n = 3$) et partie transverse ($n = 1, 2$).

Les expressions ci-dessus sont individuellement relativistes, mais elles ne décrivent que les composantes spatiales des champs. Pour avoir une théorie explicitement relativiste, calculons l'expression du champ $A_0(x)$ à partir de l'éq. (4.39) et de l'équation de contrainte (4.17), reste de l'équation du mouvement pour $\nu = 0$. On a

$$(4.17) \quad \implies \quad \hat{A}_0 = (m^2 - \nabla^2)^{-1} \left[\vec{\nabla} \partial_t \hat{A} \right].$$

Dans l'espace de Fourier, $\partial_j \hat{A}^j$ devient $ik_j \hat{A}_k^j$, et donc $\partial_i \hat{A}^i = \partial_i \hat{A}^{(l)i}$. De plus, l'inverse de l'opérateur différentiel $(m^2 - \nabla^2)$ est trivial. En effet, soit $f(x) = \int d^3k \tilde{f}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$; alors

$$\begin{aligned} (m^2 - \nabla^2) f(x) &= \int d^3k \tilde{f}_{\vec{k}} \left(m^2 - \sum_{j=1}^3 (ik^j)(ik^j) \right) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} = \int d^3k \tilde{f}_{\vec{k}} (m^2 + |\vec{k}|^2) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}; \\ \Rightarrow (m^2 - \nabla^2)^{-1} &= \frac{1}{m^2 + |\vec{k}|^2}, \quad \text{en représentation de Fourier.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_0 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \frac{1}{m^2 + |\vec{k}|^2} \frac{\varepsilon(k)}{m} \bar{e}^{(3)i}(k) \left[(-ik_0)(ik_i) \hat{a}_{(3)} e^{-ik_\mu x^\mu} + (ik_0)(-ik_i) \hat{a}_{(3)}^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \frac{1}{m^2 + |\vec{k}|^2} \frac{\varepsilon(k)^2}{m} \underbrace{\left(\bar{e}^{(3)i}(k) k_i \right)}_{=|\vec{k}|} \left[\hat{a}_{(3)} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}_{(3)}^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right] \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \frac{|\vec{k}|}{m} \left[\hat{a}_{(3)} e^{-ik_\mu x^\mu} + \hat{a}_{(3)}^\dagger(k) e^{ik_\mu x^\mu} \right], \end{aligned} \quad (4.41)$$

où on a utilisé $|\vec{k}|^2 + m^2 = \varepsilon(k)^2$. Introduisons alors trois *quadrivecteurs de polarisation*

$$\begin{cases} e_\mu^{(1)}(\vec{k}) &= (0, 1, 0, 0), \\ e_\mu^{(2)}(\vec{k}) &= (0, 0, 1, 0), \\ e_\mu^{(3)}(\vec{k}) &= \left(\frac{|\vec{k}|}{m}, 0, 0, \frac{\varepsilon(k)}{m} \right), \end{cases} \quad (4.42)$$

à l'aide desquels on peut décrire le champ vectoriel sous une forme très compacte :

$$\hat{A}_\mu(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \sum_{n=1}^3 e_\mu^{(n)}(k) \left[\hat{a}_{(n)}(k) e^{-ik \cdot x} + \hat{a}_{(n)}^\dagger(k) e^{ik \cdot x} \right], \quad (4.43)$$

avec $k \cdot x \equiv k_\nu x^\nu$. Notons que le nombre de degrés de liberté du champ est complètement explicite ici : il suffit de seulement trois tels quadrivecteurs pour décrire complètement les quatre composantes du champ vectoriel massif. On verra plus loin que la situation est totalement différente dans le cas non massif (le photon).

Propriétés des vecteurs $e_\mu^{(n)}$ Les vecteurs de polarisation satisfont deux propriétés fondamentales, à savoir

$$1. \quad e_\mu^{(n)} e^{\mu(m)} = -\delta^{nm}. \quad (4.44)$$

$$2. \quad \sum_{n=1}^3 e_\mu^{(n)} e_\nu^{(n)} = -\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2} \right). \quad (4.45)$$

La preuve de ces identités est triviale, il suffit de vérifier qu'elles sont vraies dans la base utilisée à l'éq. (4.42). En particulier, dans cette base, $k = (\varepsilon(k), 0, 0, |\vec{k}|)$. La théorie étant covariante par rapport aux transformations de Lorentz, ces égalités resteront vraies lors d'un changement de coordonnées. La première équation montre que la base est orthonormée par rapport au produit scalaire dans l'espace de Minkowski, alors que la seconde est une relation de fermeture légèrement modifiée.

4.1.5 Le spin du champ vectoriel massif

Alors que le champ scalaire décrivait des particules de spin 0, nous montrons dans cette section que les particules décrites par un champ vectoriel sont des bosons de spin 1 : elles possèdent donc un moment cinétique intrinsèque. Pour cela, la démarche est simple, il suffit d'identifier l'opérateur associé aux rotations par le théorème de Noether et d'en extraire la partie indépendante d'un point de référence spatial. On pourra ainsi séparer les parties orbitale et intrinsèque.

Par simplicité, choisissons une rotation autour de l'axe 3 et écrivons-la directement sous forme infinitésimale :

$$\begin{cases} x^0 \longrightarrow x'^0 = x^0, \\ x^1 \longrightarrow x'^1 = x^1 + x^2\theta \implies f_3^1 = -x^2, \\ x^2 \longrightarrow x'^2 = -x^1\theta + x^2 \implies f_3^2 = x^1, \\ x^3 \longrightarrow x'^3 = x^3. \end{cases} \quad (4.46)$$

Par définition, les lois de transformation des composantes du champ vectoriel sont les même que pour les coordonnées, i.e.

$$\begin{cases} A^0 \longrightarrow A'^0 = A^0, \\ A^1 \longrightarrow A'^1 = A^1 + A^2\theta \implies C_3^1 = A^2, \\ A^2 \longrightarrow A'^2 = -A^1\theta + A^2 \implies C_3^2 = -A^1, \\ A^3 \longrightarrow A'^3 = A^3. \end{cases} \quad (4.47)$$

En utilisant l'éq. (4.20), on peut alors écrire simplement le courant associé, qui sera naturellement la troisième composante du moment cinétique :

$$\begin{aligned} m_3^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{,\mu}^\nu} C_3^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{,\mu}^\nu} A_{,\rho}^\nu f_3^\rho - f_3^\mu \mathcal{L} \\ &= -F_1^\mu A^2 + F_2^\mu A^1 + F_{\nu}^\mu \partial_1 A^\nu x^2 - F_{\nu}^\mu \partial_2 A^\nu x^1 - f_3^\mu \mathcal{L} \end{aligned}$$

On sera en particulier intéressé à la composante $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} m_3^0 &= -F_1^0 A^2 + F_2^0 A^1 + F_{\nu}^0 \partial_1 A^\nu x^2 - F_{\nu}^0 \partial_2 A^\nu x^1 = -B_1 A_2 + B_2 A_1 - B_{\nu} \partial_1 A^\nu x^2 + B_{\nu} \partial_2 A^\nu x^1 \\ &= (-B_1 A_2 + B_2 A_1) - (B_i \partial_1 A^i x^2 - B_i \partial_2 A^i x^1), \quad \text{puisque } B_0 = 0. \end{aligned}$$

Définissons alors à partir de l'éq. (4.26) la densité de quantité de mouvement $\vec{p} = B_i \vec{\nabla} A^i$. La densité de moment cinétique total est donc

$$\vec{m} = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{x} \wedge \vec{p}. \quad (4.48)$$

On pourrait ici appliquer cet opérateur à un état quelconque à une particule comme on l'a fait dans le cas scalaire. Il apparaît cependant clairement que cet opérateur est constitué de deux composantes dont la seconde correspond exactement au cas scalaire et dépend explicitement d'un point de référence et de l'impulsion : il s'agit clairement du moment cinétique orbital. La première est nettement plus intéressante, puisqu'elle décrit le spin du champ vectoriel : c'est le moment cinétique intrinsèque qui ne dépend que du champ lui-même. On définit naturellement l'opérateur quantique de spin par

$$\hat{S} = \int d^3x \left(\hat{A} \wedge \hat{B} \right). \quad (4.49)$$

Etudions quelque peu l'algèbre des \hat{S}_i . En particulier, calculons ses constantes de structures :

$$\begin{aligned}
[\hat{S}_i, \hat{S}_j] &= \int d^3x d^3y \epsilon_{iab} \epsilon_{jcd} [\hat{A}^a \hat{B}^b, \hat{A}^c \hat{B}^d] \\
&= \int d^3x d^3y \epsilon_{iab} \epsilon_{jcd} \left\{ \hat{A}^a [\hat{B}^b, \hat{A}^c] \hat{B}^d + \hat{A}^c [\hat{A}^a, \hat{B}^d] \hat{B}^b \right\} \\
&= i \int d^3x \left\{ \left(-\epsilon_{iab} \epsilon_{jbd} \hat{A}^a \hat{B}^d \right) + \left(\epsilon_{iab} \epsilon_{jca} \hat{A}^c \hat{B}^b \right) \right\} \\
&= i \int d^3x \left\{ \left(-\hat{A}_j \hat{B}_i + \hat{A}^a \hat{B}^a \delta_{ij} \right) + \left(\hat{A}_i \hat{B}_j - \hat{A}^b \hat{B}^b \delta_{ij} \right) \right\} = i \int d^3x \left(\hat{A}_i \hat{B}_j - \hat{A}_j \hat{B}_i \right) \\
&= i \int d^3x \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \hat{A}^l \hat{B}^m = i \epsilon_{ijk} \hat{S}_k,
\end{aligned}$$

où on a utilisé à deux reprises l'identité $\epsilon_{aij} \epsilon_{akl} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}$. On trouve bien les relations de commutation des moments cinétiques :

$$[\hat{S}_i, \hat{S}_j] = i \epsilon_{ijk} \hat{S}_k. \quad (4.50)$$

Un calcul similaire conduirait à

$$[\hat{S}_i, \hat{A}_j(x)] = i \epsilon_{ijk} \hat{A}_k(x). \quad (4.51)$$

De même, en écrivant \hat{S}_i en termes d'opérateurs de création et d'annihilation, on trouve

$$[\hat{S}_i, \hat{a}_{(p)}^\dagger] = i \epsilon_{ipm} \hat{a}_{(m)}^\dagger. \quad (4.52)$$

Définissons maintenant le nouvel opérateur *spin total* $\hat{\vec{S}}^2 = \sum_{i=1}^3 \hat{S}_i^2$. De la dernière égalité, on obtient directement le spin total du champ vectoriel :

$$\begin{aligned}
\sum_i \hat{S}_i \hat{S}_i \hat{a}_{(p)}^\dagger |0\rangle &= \sum_i \hat{S}_i i \epsilon_{ipm} \hat{a}_{(m)}^\dagger |0\rangle + \sum_i \hat{S}_i \hat{a}_{(p)}^\dagger \underbrace{\hat{S}_i |0\rangle}_{=0} \\
&= - \sum_i \epsilon_{ipm} \epsilon_{iml} \hat{a}_{(l)}^\dagger |0\rangle = \sum_i \underbrace{\epsilon_{imp} \epsilon_{iml}}_{=2\delta_{pl}} \hat{a}_{(l)}^\dagger |0\rangle = 2 \hat{a}_{(p)}^\dagger |0\rangle.
\end{aligned} \quad (4.53)$$

Ainsi, les états à une particule sont des états propres de $\hat{\vec{S}}^2$ pour la valeur propre 2. Les particules associées au champ vectoriel massif sont donc bien de spin¹ 1.

Les opérateurs de spin en main, il est aussi plus aisé de donner une signification aux indices de polarisation (n). En effet

$$\hat{S}_3 \hat{a}_{(3)}^\dagger |0\rangle = 0, \quad (4.54)$$

$$\hat{S}_3 \left(\hat{a}_{(1)}^\dagger + i \hat{a}_{(2)}^\dagger \right) |0\rangle = + \left(\hat{a}_{(1)}^\dagger + i \hat{a}_{(2)}^\dagger \right) |0\rangle, \quad (4.55)$$

$$\hat{S}_3 \left(\hat{a}_{(1)}^\dagger - i \hat{a}_{(2)}^\dagger \right) |0\rangle = - \left(\hat{a}_{(1)}^\dagger - i \hat{a}_{(2)}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (4.56)$$

Il est donc clair que modulo quelque transformation de Bogoliubov, les indices (n) correspondent aux trois différents états de spin possibles pour la particule vectorielle. En particulier, l'opérateur $\hat{a}_{(3)}^\dagger$ crée une particule dans un état de spin orthogonal à \vec{k} . On verra dans la partie suivante que le cas du champ sans masse est différent de ce point de vue-là.

¹On rappelle qu'étant donnée la valeur propre s de \vec{S}^2 , on définit en mécanique quantique le spin j de la particule par $s = j(j+1)$

4.2 Le champ vectoriel sans masse

Nous attaquons maintenant le dernier cas de champ vectoriel libre : $m^2 = 0$. On observant les résultats obtenus dans la section précédente, on constate immédiatement que la théorie du champ vectoriel devient singulière pour cette valeur particulière du paramètre. Certes, on peut simplement poser $m^2 = 0$ dans le Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (4.57)$$

mais ceci est impossible tant dans l'Hamiltonien que dans les diverses expressions obtenues pour les champs. On est donc obligé de reconsidérer complètement la théorie.

En bref, on atteindra les conclusions suivantes : dans toutes les expressions ci-dessus, il suffira de remplacer $\varepsilon(k)$ par $|\vec{k}|$, et d'annuler tous les termes avec un indice de polarisation (3). Si la première partie de la procédure semble logique, la seconde l'est moins, puisqu'on supprime encore un degré de liberté du champ. C'est qu'il apparaît dans le cas non massif une nouvelle symétrie : la symétrie de jauge. Mais analysons la situation en détails.

4.2.1 Théorie classique

L'action associée à (4.57) produit les équations du mouvement

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (4.58)$$

que l'on peut réécrire en composantes :

$$\begin{aligned} (\nu = 0) \quad \partial_i F^{i0} &= 0 \\ \iff \partial_i \partial^i A^0 - \partial_i \partial^0 A^i &= 0; \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} (\nu = j) \quad \partial_\mu F^{\mu j} &= 0 \\ \iff \partial_0 \partial^0 A^j + \partial_i \partial^i A^j - \partial_0 \partial^j A^0 - \partial_i \partial^j A^i &= 0. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Décomposons alors le champ vectoriel A^j en parties transverse et longitudinale² : $A^j = \partial^j \phi + A^{(tr)j}$. Les équations du mouvement deviennent alors :

$$\begin{aligned} (4.59) \quad \implies \quad -\nabla^2 A_0 + \partial_0 \nabla^2 \phi &= 0, \quad \text{car} \quad \partial_i A^{(tr)i} = 0, \\ (4.60) \quad \implies \quad \begin{cases} \partial_0 \partial^0 A^{(tr)j} + \nabla^2 A^{(tr)j} &= 0, \\ \partial_0 \partial^0 \partial^j \phi - \nabla^2 \partial^j \phi - \partial_0 \partial^j A^0 + \partial^j \nabla^2 \phi &= 0. \end{cases} \end{aligned}$$

On obtient donc le système

$$A_0 = \partial_0 \phi, \quad (4.61)$$

$$\partial_0 \partial^0 A^{(tr)j} + \nabla^2 A^{(tr)j} = 0, \quad (4.62)$$

$$\partial_0 \partial^0 \partial^j \phi - \nabla^2 \partial^j \phi = 0. \quad (4.63)$$

Mais (4.61) et (4.63) ne sont pas indépendantes. En effet, (4.63) $\Rightarrow \partial^0 \partial^j (\partial_0 \phi - A_0) = 0$, qui est forcément satisfaite sachant (4.61). L'ensemble de quatre équations pour les quatre champs A_0 , ϕ , $A^{(tr)1}$ et $A^{(tr)2}$ n'est donc pas prédictif pour deux d'entre eux. D'un point de vue mathématique, on résout le problème en choisissant arbitrairement une fonction ϕ , dont on déduit $A_0 = \partial_0 \phi$ et $A_i^{(l)} = \partial_i \phi$. Il suffira alors de résoudre les équations dynamiques pour les deux composantes

²On sait déjà de l'analyse précédente que A^0 n'est pas indépendant, raison pour laquelle il suffit de décomposer la partie spatiale de A^μ .

transverses du champ. D'un point de vue physique, ce choix arbitraire apparaît tout à fait naturel, puisque le champ ϕ disparaît totalement du Lagrangien, et que c'est dans cette dernière fonction qu'est contenue toute l'information physique. En effet

$$F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 = \partial_0 (\partial_i \phi + A_i^{(tr)}) - \partial_i \partial_0 \phi = \partial_0 A_i^{(tr)} ; \quad (4.64)$$

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = \partial_i (\partial_j \phi + A_j^{(tr)}) - \partial_j (\partial_i \phi + A_i^{(tr)}) = \partial_i A_j^{(tr)} - \partial_j A_i^{(tr)} . \quad (4.65)$$

En particulier, les champs physiquement mesurables que sont le champ électrique \vec{E} et le champ d'induction \vec{B} ne dépendent pas de la composante longitudinale ϕ . On fera donc le choix particulièrement simple :

$$\phi = 0 \implies A_0 = 0, A_i^{(l)} = 0, \text{ et donc } A_i = A_i^{(tr)} . \quad (4.66)$$

On vient de montrer de manière tout à fait pédestre mais explicite que le champ vectoriel sans masse est un champ purement transverse. En particulier, cela implique qu'il ne lui reste que *deux degrés de liberté*, et non plus trois comme dans le cas du champ massif.

4.2.2 Une nouvelle symétrie : la symétrie de jauge

Montrons que ce qu'on vient d'observer n'est pas une pure coïncidence, mais la conséquence plus fondamentale d'une nouvelle symétrie du Lagrangien. Considérons les transformations suivantes :

$$\begin{cases} x^\mu & \longrightarrow x'^\mu = x^\mu , \\ A_\mu(x) & \longrightarrow A'_\mu(x') = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) . \end{cases} \quad (4.67)$$

On montre facilement que le tenseur $F_{\mu\nu}$ est invariant sous cette transformation. Comme $\partial'_\mu = \partial_\mu$, on a en effet

$$F'_{\mu\nu}(x') = \partial_\mu A'_\nu(x') - \partial_\nu A'_\mu(x') = \partial_\mu A_\nu(x) + \partial_\mu \partial_\nu \alpha(x) - \partial_\nu A_\mu(x) - \partial_\nu \partial_\mu \alpha(x) = F_{\mu\nu}(x) , \quad (4.68)$$

et donc le Lagrangien et l'action sont invariants par rapport à ces transformations. Cette invariance est connue sous le nom de *symétrie de jauge*. Dans les termes utilisés dans la section précédente, on constate bien que la partie longitudinale peut être modifiée à volonté par un choix judicieux de la fonction $\alpha(x)$. En particulier, on peut ajuster $\alpha(x)$ de sorte à l'annuler partout : c'est ce qu'on appelle la *jauge de Coulomb*.

En résumé, nous avons obtenu les conclusions suivantes. Le choix $m^2 = 0$ dans le Lagrangien fait apparaître cette nouvelle symétrie de jauge qui rend la partie longitudinale du champ vectoriel absolument absente des champs physiques. On peut donc arbitrairement la choisir nulle et la théorie ne contient donc plus que *deux degrés de liberté transverses*, i.e. perpendiculaires à \vec{k} .

On verra lorsqu'on traitera l'électrodynamique quantique que le photon est précisément un champ de ce type. Le fait que le photon soit non massif est donc la cause des seulement deux états de polarisation (bien connus en optique classique), alors même que le champ est de 'spin' 1. C'est pourquoi on parlera en général d'*hélicité*, plutôt que de spin pour les particules sans masse.

On a ainsi résolu complètement le problème du champ vectoriel sans masse. On peut donc reprendre l'expression (4.25) de l'Hamiltonien, et simplement abandonner les termes longitudinaux. On peut alors librement poser $m^2 = 0$ pour obtenir l'expression de la densité hamiltonienne du champ vectoriel sans masse

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(B_i^{(tr)} \right)^2 + \frac{1}{4} (F_{ij})^2 , \quad (4.69)$$

qui a déjà été résolu. On peut donc utiliser tous les résultats trouvés pour $m^2 \neq 0$, en tracer les parties dépendantes de l'indice (3), i.e. tous les termes longitudinaux, puis poser $m = 0$: on obtient la théorie classique puis quantique pour le cas non massif. En particulier :

$$\hat{A}_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \sum_{n=1}^2 e_\mu^{(n)}(k) \left[\hat{a}_{(n)} e^{-ikx} + \hat{a}_{(n)}^\dagger e^{ikx} \right], \quad \text{où } e_i^{(m)}(k) k^i = 0. \quad (4.70)$$

Finalement,

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \varepsilon(k) \sum_{n=1}^2 \hat{a}_{(n)}^\dagger \hat{a}_{(n)} \quad \text{et} \quad \hat{\vec{P}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \vec{k} \sum_{n=1}^2 \hat{a}_{(n)}^\dagger \hat{a}_{(n)}. \quad (4.71)$$

En se référant aux équations (4.54)-(4.56), on constate finalement que l'hélicité ne peut plus qu'être soit parallèle, soit antiparallèle à la quantité de mouvement, la valeur propre 0 de l'opérateur de spin ayant été supprimée dans ce cas-ci. Voilà qui conclut notre discussion du champ vectoriel.

Chapitre 5

Le champ spinoriel

Nous avons jusqu'ici décrit et classifié les champs en fonction de leurs propriétés par rapport au groupe de Lorentz. Nous avons essentiellement travaillé avec la représentation directe du groupe de Lorentz sur l'espace de Minkowski, et pu ainsi mettre en évidence le champ scalaire, le champ vectoriel, et il serait possible de continuer ainsi avec des champs tensoriels d'ordres supérieurs. On verrait en particulier qu'un champ tensoriel d'ordre n sera toujours un champ bosonique de spin entier n . Afin de pouvoir décrire des champs de spin demi-entier, et ceci est essentiel puisque la plupart des particules élémentaires sont des fermions de spin $\frac{1}{2}$, il faut faire appel à une autre représentation du groupe de Lorentz. On verra dans ce chapitre que la représentation $SL(2, \mathbb{C})$ de \mathcal{L}_+^\uparrow nous permettra de décrire un nouveau type de champ, le *spineur*, qui est précisément un champ de spin demi-entier. Nous entamons donc ce chapitre par quelques éléments supplémentaires importants concernant le groupe de Lorentz.

5.1 Groupe de Lorentz et $SL(2, \mathbb{C})$

5.1.1 Représentation matricielle de l'espace de Minkowski

Nous commençons par montrer que l'espace de Minkowski, i.e. l'ensemble des vecteurs $x^\mu \in \mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire $(x, y) = \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu$, est isomorphe à un certain espace de matrices hermitiennes 2×2 . En effet, introduisons un ensemble complet de matrices hermitiennes 2×2 , les matrices de Pauli :

$$\tilde{\sigma}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\sigma}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

On montre aisément qu'elles forment une base de $MH(2, \mathbb{C})$, l'espace des matrices complexes hermitiennes 2×2 , vu comme \mathbb{R} -espace vectoriel. On pourrait aussi considérer l'ensemble équivalent¹

$$\sigma^\mu = (\tilde{\sigma}^0, -\tilde{\sigma}^1, -\tilde{\sigma}^2, -\tilde{\sigma}^3). \quad (5.2)$$

L'espace $MH(2, \mathbb{C})$ est isomorphe à \mathbb{R}^4 . En effet,

$$\begin{aligned} M : \mathbb{R}^4 &\longrightarrow MH(2, \mathbb{C}) \\ x^\mu &\longmapsto C = M(x) = x \cdot \tilde{\sigma} = \sigma_\mu x^\mu \equiv \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

¹Les conventions de signe et de placement des indices en haut ou en bas varient selon les auteurs.

est un isomorphisme. Après quelques manipulations, on trouve que l'application inverse est donnée par

$$\begin{aligned} M^{-1} : \text{MH}(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ C &\longmapsto x^\mu = M^{-1}(C)^\mu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\mu C) . \end{aligned}$$

En relation avec le groupe de Lorentz, on observe directement de l'expression de la matrice C que l'invariant de Lorentz fondamental, à savoir le carré d'un quadrivecteur est représenté sur $\text{MH}(2, \mathbb{C})$ par un simple déterminant :

$$x \cdot x = x_\mu x^\mu = \det C . \quad (5.3)$$

5.2 Représentation de \mathcal{L}_+^\uparrow sur $\text{MH}(2, \mathbb{C})$

La question qui se pose maintenant est de déterminer l'action du groupe de Lorentz sur les matrices $C \in \text{MH}(2, \mathbb{C})$. Autrement dit, on cherche la loi de transformation des matrices de $\text{MH}(2, \mathbb{C})$ qui corresponde à celle des coordonnées lors d'une transformation de Lorentz. Ce dernier étant entièrement caractérisé par le fait qu'il préserve la métrique de Minkowski, il suffit d'exiger que

1. $\text{MH}(2, \mathbb{C})$ soit stable par rapport à l'action du groupe,
2. le déterminant soit invariant par rapport à cette transformation, en raison de l'éq. (5.3).

On montre maintenant qu'il est possible de représenter une transformation de Lorentz par

$$C \longrightarrow C' = A^\dagger C A, \quad \text{où } A \in \text{SL}(2, \mathbb{C}), \quad (5.4)$$

$\text{SL}(2, \mathbb{C})$ étant le groupe des matrices 2×2 à coefficients complexes et de déterminant 1. En effet,

1. $(C')^\dagger = A^\dagger C^\dagger A = A^\dagger C A = C'$, et donc $C' \in \text{MH}(2, \mathbb{C})$,
2. $\det C' = \det(A^\dagger C A) = \det A^\dagger \det A \det C = |\det A|^2 \det C = \det C$, puisque $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \implies \det A = 1$.

Finalement, il est maintenant possible de construire explicitement l'application φ qui à toute matrice de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ associe un élément du groupe de Lorentz. En effet

$$\begin{aligned} x'^\mu &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\mu C') = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\mu A^\dagger C A) \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\mu A^\dagger \sigma_\nu x^\nu A) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\mu A^\dagger \sigma_\nu A) x^\nu . \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \varphi : \text{SL}(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{L} \\ A &\longmapsto \varphi(A) = [\Lambda(A)]^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\sigma}^\mu A^\dagger \sigma_\nu A) . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Avec les éq. (5.4) et (5.5), on a donc obtenu explicitement une nouvelle représentation du groupe de Lorentz par des matrices de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ agissant sur des éléments de $\text{MH}(2, \mathbb{C})$.

Remarque Le groupe $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ contient six paramètres : 2×4 paramètres réels moins deux conditions réelles pour le déterminant. C'est aussi le nombre de paramètres du groupe de Lorentz. On peut cependant noter que cette représentation ne recouvre que la composante propre orthochrone. En effet,

1. $\Lambda(A)^0_0 = \frac{1}{2} \text{Tr}(A^\dagger A) \geq 0$, c'est une transformation orthochrone ;
2. de plus, on peut vérifier que l'application $\varphi : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{L}$ est continue. Or pour $A = \mathbb{I}$, on trouve $[\Lambda(\mathbb{I})]^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu$, pour lequel $\det \Lambda = +1$. Le déterminant définissant aussi une application continue, l'application

$$\det \circ \varphi : A \longmapsto \det \Lambda(A)$$

l'est aussi, et la valeur du déterminant ne peut pas passer brusquement de $+1$ à -1 . Ainsi, lorsque A parcourt $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, les transformations $\Lambda(A)$ produites doivent donc rester dans la composante propre du groupe de Lorentz².

Finalement, on peut montrer que réciproquement,

$$\Lambda(A) = \Lambda(B) \implies B = \pm A,$$

autrement dit qu'à chaque transformation $\Lambda \in \mathcal{L}_+^\uparrow$ correspondent exactement deux matrices de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, à savoir A et $-A$. On vient donc de montrer que φ est un homomorphisme $2 \rightarrow 1$ de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ sur \mathcal{L}_+^\uparrow . Dans le cadre de la théorie des groupes, puisque $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ est simplement connexe, on l'appelle le *groupe de recouvrement universel* de \mathcal{L}_+^\uparrow . Le petit tableau suivant résume ce qui a été obtenu jusqu'ici :

$$\begin{array}{ccc} \text{SL}(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{L}_+^\uparrow \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{MH}(2, \mathbb{C}) & \xrightarrow{M^{-1}} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

où \downarrow signifie 'agit sur'.

Propriétés

1. Si A est unitaire, i.e. $AA^\dagger = \mathbb{I}$, on peut l'écrire en toute généralité $A = \cos \frac{\theta}{2} \sigma_0 - i \sin \frac{\theta}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{n}$ pour un certain vecteur unité \hat{n} . $\Lambda(A)$ est alors une rotation d'angle θ autour de l'axe défini par \hat{n} , i.e.

$$\begin{aligned} \Lambda(A)^0_0 &= 1 ; & \Lambda(A)^0_i &= \Lambda(A)^i_0 = 0 ; \\ \Lambda(A)^i_j &= \cos \theta \delta_{ij} + (1 - \cos \theta) n^i n^j + \sin \theta \varepsilon_{ijk} n^k . \end{aligned}$$

2. Si A est hermitienne, i.e. $A = A^\dagger$, on peut l'écrire en toute généralité $A = \cosh \frac{\phi}{2} \sigma_0 - \sinh \frac{\phi}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{m}$ pour un certain vecteur unité \hat{m} . $\Lambda(A)$ est alors un boost de vitesse $v = \tanh \phi$ le long de l'axe défini par \hat{m} , i.e.

$$\begin{aligned} \Lambda(A)^0_0 &= \cosh \phi ; & \Lambda(A)^0_i &= \Lambda(A)^i_0 = -\sinh \phi m^i ; \\ \Lambda(A)^i_j &= \delta_{ij} + (\cosh \phi - 1) m^i m^j . \end{aligned}$$

Nous n'allons pas démontrer ces propriétés. Le calcul est direct mais passablement lourd.

Enfin, mentionnons que toute matrice de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ peut se décomposer en un produit d'une matrice unitaire et d'une matrice hermitienne. Ainsi, tout élément du groupe de Lorentz est le produit d'une rotation pure et d'un boost pur. Mais revenons maintenant à la théorie des champs.

5.3 Le spineur de Dirac

5.3.1 Le spineur à deux composantes

Nous venons de construire une représentation du groupe de Lorentz par des matrices 2×2 de déterminant 1. Nous avons de même défini la représentation d'un quadrivecteur par une matrice

²On rappelle que \mathcal{L} n'est pas connexe et se décompose en quatre composantes connexes.

de $\text{MH}(2, \mathbb{C})$. Nous définissons maintenant deux nouveaux objets ψ et χ qui sont des vecteurs à deux composantes complexes et qu'on appelle *spinours*. Comme dans les cas précédents, c'est leur transformation par rapport au groupe de Lorentz qui permet de les caractériser :

$$\begin{cases} \psi(x) & \longrightarrow \psi'(x') = A\psi(x) , \\ \chi(x) & \longrightarrow \chi'(x') = A^*\chi(x) . \end{cases} \quad (5.6)$$

C'est ce qu'on appelle la représentation spinorielle du groupe de Lorentz.

Afin de construire un Lagrangien acceptable, il s'agit d'exhiber toutes les combinaisons bilinéaires de ces deux champs qui sont des scalaires par rapport au groupe de Lorentz. Pour cela, il est utile de connaître les relations suivantes, valables pour tout $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$:

$$A^\dagger \sigma_\nu A = \Lambda^\mu_\nu \sigma_\mu ; \quad (5.7)$$

$$A^T \mathcal{E} A = \mathcal{E} , \quad \text{où} \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (5.8)$$

Preuve

– On sait de l'éq. (5.5) que $\text{Tr}(\tilde{\sigma}^\rho A^\dagger \sigma_\nu A) = 2[\Lambda(A)]^\rho_\nu$. De plus,

$$\text{Tr}(\tilde{\sigma}^\rho \Lambda^\mu_\nu \sigma_\mu) = \text{Tr}(\sigma_\mu \tilde{\sigma}^\rho) \Lambda^\mu_\nu = \text{Tr}(\delta^\rho_\mu \mathbb{I}_2) \Lambda^\mu_\nu = 2\Lambda^\rho_\nu ,$$

où il faut se rappeler qu'on prend la trace par rapport à $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Ces deux équations étant valables pour $\rho = 0, 1, 2, 3$, on en déduit (5.7), puisque $\text{Tr}(M_1 M_2)$ est un produit scalaire et que l'ensemble de matrices de Pauli forme une base de $\text{MH}(2, \mathbb{C})$.

– (5.8) se montre par un calcul direct. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$; alors,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b & a \\ -d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \det A \\ -\det A & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{E} ,$$

puisque $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$.

Enfin, pour que ces combinaisons soient des vrais scalaires, elles doivent être de la forme

$$\begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix} .$$

En utilisant les éq. (5.7) et (5.8), et en tenant compte de cette dernière remarque, on peut successivement exhiber

1. des scalaires

$$\begin{cases} \psi^T \mathcal{E} \psi & \longrightarrow \psi^T A^T \mathcal{E} A \psi = \psi^T \mathcal{E} \psi , \\ \chi^\dagger \mathcal{E} \chi^* & \longrightarrow \chi^\dagger A^T \mathcal{E} A \chi^* = \chi^\dagger \mathcal{E} \chi^* , \\ \chi^\dagger \mathcal{E} \psi & \longrightarrow \chi^\dagger A^T \mathcal{E} A \psi = \chi^\dagger \mathcal{E} \psi , \\ \psi^\dagger \mathcal{E} \chi & \longrightarrow \psi^\dagger A^{T*} \mathcal{E} A^* \chi = \psi^\dagger \mathcal{E}^* \chi = \psi^\dagger \mathcal{E} \chi . \end{cases} \quad (5.9)$$

Mais seuls les deux derniers sont intéressants, puisque $\psi^T \mathcal{E} \psi = \chi^\dagger \mathcal{E} \chi^* = 0$, pour autant que les composantes de ces vecteurs commutent entre elles.

2. des vecteurs

$$\begin{cases} \psi^\dagger \sigma_\mu \psi & \longrightarrow \psi^\dagger A^\dagger \sigma_\mu A \psi = \Lambda^\nu_\mu \psi^\dagger \sigma_\nu \psi , \\ \chi^T \sigma_\mu \chi^* & \longrightarrow \chi^T A^\dagger \sigma_\mu A \chi^* = \Lambda^\nu_\mu \chi^T \sigma_\nu \chi^* , \\ \chi^T \sigma_\mu \psi & \longrightarrow \chi^T A^\dagger \sigma_\mu A \psi = \Lambda^\nu_\mu \chi^T \sigma_\nu \psi , \\ \psi^\dagger \sigma_\mu \chi^* & \longrightarrow \psi^\dagger A^\dagger \sigma_\mu A \chi^* = \Lambda^\nu_\mu \psi^\dagger \sigma_\nu \chi^* . \end{cases} \quad (5.10)$$

Armés de ces connaissances, on peut alors écrire le Lagrangien le plus général compatible avec les contraintes désormais habituelles. Si l'on ne considère que le champ ψ , on obtient

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \psi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi + h.c. , \quad (5.11)$$

où il est essentiel d'ajouter le conjugué hermitique pour assurer la réalité de la densité lagrangienne. On trouve facilement la dimension de ψ : $[\psi] = GeV^{3/2}$. On constate donc qu'il est impossible dans cette théorie simple d'ajouter un terme de masse, puisque $\psi^T \mathcal{E} \psi = 0$, du moins dans le cadre classique où les champs commutent. Il est donc essentiel de considérer les deux champs ensemble :

$$\mathcal{L} = C_1 \psi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi + C_2 \chi^T \sigma^\mu \partial_\mu \chi^* + \xi \chi^T \sigma^\mu \partial_\mu \psi - m \chi^\dagger \mathcal{E} \psi + h.c. , \quad (5.12)$$

où $[m] = GeV$; il s'agit bien d'un terme de masse. Le troisième terme peut être éliminé par une transformation des champs :

$$\begin{cases} \psi & \longrightarrow \alpha \psi + \beta \chi^* , \\ \chi^* & \longrightarrow \gamma \psi + \delta \chi^* . \end{cases} \quad (5.13)$$

De plus, observons le comportement du premier terme dans l'action :

$$\begin{aligned} & \int d^4x \left(C_1 \psi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi + C_1^* \partial_\mu \psi^\dagger \sigma^{\mu\dagger} \psi \right) \\ & \stackrel{p.p}{=} \int d^4x \left(C_1 \psi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi - C_1^* \psi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi \right) = \int d^4x \left(\Im [C_1] \psi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi \right) . \end{aligned}$$

La partie réelle des constantes C_i peut donc être éliminée par une simple intégration par parties. On écrira donc la densité lagrangienne générale comme

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \psi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi + \frac{i}{2} \chi^T \sigma^\mu \partial_\mu \chi^* - m \chi^\dagger \mathcal{E} \psi + h.c. . \quad (5.14)$$

On appelle cette expression le *Lagrangien de Dirac en représentation chirale*. Nous reviendrons plus tard sur cette dénomination et sa signification.

5.3.2 Le spineur de Dirac à quatre composantes

On introduit dans cette section le champ spinoriel proprement dit, dont on doit l'idée à P. A. M. Dirac. On définit à partir des deux spineurs ψ et χ un nouveau champ à quatre composantes Ψ :

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \\ \Psi_4(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(x) \\ \mathcal{E} \chi(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \chi_2(x) \\ -\chi_1(x) \end{pmatrix} . \quad (5.15)$$

De plus introduisons les *matrices de Dirac* γ^μ , qui sont 4×4 , définies par

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{\sigma}^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} . \quad (5.16)$$

Propriétés Ces matrices satisfont un certain nombre de propriétés intéressantes, dont on donne ici les principales :

1. $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}$,
2. $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$,

3. $\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$,
4. $(\gamma^0)^2 = \mathbb{I}$,
5. $(\gamma^i)^2 = -\mathbb{I}$,

On peut alors réécrire le Lagrangien (5.14) de la manière suivante :

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + h.c. - m \bar{\Psi} \Psi, \quad \text{où} \quad \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0. \quad (5.17)$$

Remarques

- Le lecteur pourra vérifier en exercice que
 1. $\bar{\Psi} \Psi$ est un scalaire,
 2. $\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi$ est un quadrivecteur.
- Le Lagrangien tel que nous l'avons écrit est explicitement hermitien. Intégrons par parties le second terme

$$\left[\frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi \right]^\dagger = -\frac{i}{2} \partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^{0\dagger} \Psi = -\frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \stackrel{p.p.}{\rightsquigarrow} \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi.$$

On écrira donc souvent le Lagrangien du champ spinoriel libre sous la forme suivante :

$$\mathcal{L} = i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m \bar{\Psi} \Psi. \quad (5.18)$$

Cette expression n'est plus explicitement hermitienne, mais équivalente à une forme hermitienne, et souvent plus simple à manipuler.

5.3.3 L'équation de Dirac

Chaque composante du champ Ψ étant complexe, elle représente deux degrés de liberté réels. Pour obtenir les équations du mouvement, on peut donc varier indépendamment Ψ et Ψ^\dagger dans l'action,

$$\delta S = \int d^4x \left\{ \frac{i}{2} \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu (\delta \Psi) - \frac{i}{2} \partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^{0\dagger} (\delta \Psi) + \frac{i}{2} (\delta \Psi^\dagger) \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - \frac{i}{2} \partial_\mu (\delta \Psi^\dagger) \gamma^{\mu\dagger} \gamma^{0\dagger} \Psi - m (\delta \Psi^\dagger) \gamma^0 \Psi - m \Psi^\dagger \gamma^0 (\delta \Psi) \right\},$$

d'où les équations du mouvement :

$$-\frac{i}{2} \partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu - \frac{i}{2} \partial_\mu \Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^{0\dagger} - m \Psi^\dagger \gamma^0 = 0,$$

la seconde étant simplement le conjugué complexe de celle-ci. Multiplions cette équation par $(\gamma^0)^{-1} = \gamma^0$. Comme

$$\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^{0\dagger} = -\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\mu = \gamma^\mu,$$

on obtient finalement l'équation de Dirac :

$$[i \gamma^\mu \partial_\mu - m] \Psi(x) = 0. \quad (5.19)$$

En composantes :

$$[i \gamma^\mu \partial_\mu - m \mathbb{I}_4]_{ab} \Psi_b = 0. \quad (5.20)$$

Remarque Il est important de noter ici que les indices a et b utilisés ne sont pas des indices de Lorentz. On prendra d'ailleurs $a, b \in \{1, 2, 3, 4\}$. Ils ne représentent pas les composantes d'un vecteur de l'espace-temps. On les appelle parfois indices de Dirac, et ce sont des indices dans l'espace des spineurs. C'est pourquoi on utilisera en général des lettres latines pour bien les différencier des indices de Lorentz. En particulier, les matrices de Dirac portent les deux types d'indices : la composante a, b de la matrice γ^μ se note $(\gamma^\mu)_{ab}$. L'indice μ , qui indique à quelle matrice on a affaire dans la famille est lorentzien (il faut changer de signe lorsqu'on monte ou descend des indices de type spatial), alors qu'à l'intérieur de cette matrice, chaque composante est indexée par une paire d'indices de Dirac. Ce problème apparaît souvent en théorie des champs : certains objets vivent dans des espaces différents et portent donc des indices de diverses natures aussi. Il est donc important de bien comprendre cette différence à ce stade, la situation devenant de plus en plus complexe par la suite.

5.3.4 La démarche historique

Historiquement, l'équation de Dirac ne découle pas du tout de la théorie des représentations du groupe de Lorentz comme on l'a brièvement montré ici. On donne dans cette section un aperçu de la démarche géniale de Dirac. On ne s'arrêtera pas sur les détails mathématiques et de rigueur.

Le problème fondamental qui se posait à la fin des années 1920 était l'incompatibilité de la mécanique quantique et de la relativité restreinte. En effet, l'équation de Schrödinger pour une particule libre

$$i\partial_t\psi(x) = -\frac{1}{2m}\partial_x^2\psi(x)$$

n'est que du premier ordre par rapport au temps, mais du second ordre par rapport aux variables d'espace. C'est pourtant cette propriété qui assure la conservation du courant de probabilité :

$$\frac{d}{dt} \int d^3x \psi^\star \psi = \int d^3x \left\{ \left(-\frac{i}{2m} \partial_x^2 \psi^\star \right) \psi + \psi^\star \left(\frac{i}{2m} \partial_x^2 \psi \right) \right\} = 0.$$

La première solution proposée fut de généraliser l'équation de Schrödinger en utilisant aussi des dérivées temporelles du second ordre. On obtient alors l'équation de Klein-Gordon

$$(\square + m^2) \psi(x) = 0.$$

Malheureusement, l'intégrale de $\psi^\star \psi$ n'est plus conservée par l'évolution temporelle. On trouve bien un invariant $\int d^3x \psi^\star \overleftrightarrow{\partial}_0 \psi$, mais on constate que ce dernier peut être négatif. Il ne peut donc plus être interprété comme une probabilité. La généralisation relativiste de l'équation de Schrödinger n'était donc pas si simple.

Dirac tente alors de réécrire l'opérateur de Klein-Gordon comme un produit de deux opérateurs différentiels du premier ordre dans toutes les variables d'espace-temps. Il pose

$$-(i\Gamma_\mu \partial^\mu - m)(i\Gamma_\nu \partial^\nu + m) = \Gamma_\mu \Gamma_\nu \partial^\mu \partial^\nu - i\Gamma_\mu \partial^\mu m + im\Gamma_\nu \partial^\nu + m^2 = \Gamma_\mu \Gamma_\nu \partial^\mu \partial^\nu + m^2 \stackrel{!}{=} (\square + m^2),$$

ce qui impose finalement

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu \partial^\mu \partial^\nu = \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu.$$

Comme $\partial^\mu \partial^\nu$ est symétrique, ceci est équivalent à

$$\Gamma_\mu \Gamma_\nu + \Gamma_\nu \Gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}, \quad (5.21)$$

ce qui est manifestement impossible à réaliser avec des scalaires. En conclusion, Γ_μ ne peut pas être un simple quadrivecteur, il faut chercher une représentation matricielle plus générale de (5.21). Un ensemble de quatre objets qui satisfont ces relations d'anticommutation, à savoir

$$\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}, \quad (5.22)$$

engendre ce qu'on appelle une *algèbre de Clifford*. On vérifie par un calcul direct à partir de l'éq. (5.16) que les matrices de Dirac γ^μ satisfont bien les relations d'anticommutation d'une telle algèbre. De plus, on voit ici qu'il sera possible de choisir d'autres représentations pour cette algèbre qui donneront différentes représentations du Lagrangien : représentation de Weyl, représentation chirale,...

Dirac a donc finalement trouvé une généralisation relativiste de l'équation de Schrödinger, qu'on peut écrire

$$i\partial_t\Psi = (-i\gamma^0\gamma^i\partial_i + m\gamma^0)\Psi, \quad (5.23)$$

cette solution étant tout à fait satisfaisante. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int d^3x \Psi^\dagger \Psi &= \int d^3x \{(\partial_t \Psi^\dagger) \Psi + \Psi^\dagger \partial_t \Psi\} \\ &= \int d^3x \{i(\partial_i \Psi^\dagger) (i\gamma^{i\dagger} \gamma^{0\dagger}) \Psi + im\Psi^\dagger \gamma^{0\dagger} \Psi - i\Psi^\dagger (-i)\gamma^0 \gamma^i \partial_i \Psi + (-i)m\Psi^\dagger \gamma^0 \Psi\} \\ &= \int d^3x \{- (\partial_i \Psi^\dagger) \gamma^0 \gamma^i \Psi + im\Psi^\dagger \gamma^0 \Psi - \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^i \partial_i \Psi - im\Psi^\dagger \gamma^0 \Psi\} = 0, \end{aligned}$$

après une intégration par parties, et l'utilisation de l'anticommutation des matrices γ^i et γ^0 . Comme $\Psi^\dagger \Psi$ est naturellement défini positif, on a retrouvé un candidat cohérent pour la densité de probabilité. Le problème est résolu.

Le prix de cette extension étant le fait que les objets qui apparaissent dans l'équation ne sont plus de simples nombres complexes, mais bien des matrices. Pour obtenir une équation du mouvement qui soit linéaire, il a fallu introduire des composantes supplémentaires à la 'fonction d'onde'. On verra tantôt que ces degrés de liberté supplémentaires ne sont rien d'autre que les antiparticules. C'est donc pour satisfaire à des exigences d'ordre purement mathématique que sont apparus pour la première fois ces objets étranges qui n'ont été observés expérimentalement qu'après que la théorie les eut prédits.

Avant de poursuivre, montrons encore que la plus petite représentation matricielle de l'algèbre de Clifford sur un espace-temps à 4 dimensions doit se faire par des matrices carrées 4×4 . Soient en effet les quatre matrices γ_μ , linéairement indépendantes et qui satisfont (5.22). Cherchons un ensemble de matrices linéairement indépendantes avec ces quatre premiers éléments, et qu'on peut construire à l'aide de sommes et de produits de ces derniers. On trouve

\mathbb{I}	une matrice,
γ_μ	quatre matrices,
$\sigma_{\mu\nu} = \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu$	six matrices,
$\gamma_5 = i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$	une matrice,
$\gamma_5 \gamma_\mu$	encore quatre matrices.

On a tout ici. En particulier, $\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu \propto \mathbb{I}$. De plus, $(\gamma^0)^2 = \mathbb{I}$ et $(\gamma^i)^2 = -\mathbb{I}$, on voit de même qu'il n'est plus possible d'ajouter d'autres combinaisons. On a engendré un ensemble de seize matrices linéairement indépendantes³. On est donc face à un espace de dimension 16, donc bien des

³On montre qu'elles sont bien linéairement indépendantes en notant qu'elles forment un ensemble orthogonal par rapport au produit scalaire défini par la trace du produit des matrices.

matrices au minimum 4×4 . Ainsi, chaque matrice dans cet espace pourra être décomposée de la manière suivante :

$$a\mathbb{I} + b^\mu \gamma_\mu + c^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} + d^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + e \gamma_5 .$$

5.4 Invariants dynamiques

Comme d'habitude, la première étape pour l'étude systématique de la théorie est la détermination des invariants dynamiques, en utilisant le théorème de Noether.

5.4.1 Le tenseur énergie-impulsion

Sous l'effet des translations d'espace-temps, le spineur reste invariant, i.e.

$$\begin{cases} x^\mu & \longrightarrow x'^\mu = x^\mu - a^\mu , \\ \Psi(x) & \longrightarrow \Psi'(x') = \Psi(x) . \end{cases} \quad (5.24)$$

Alors

$$\begin{aligned} T^\mu_\nu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} \Psi_{,\rho} \delta^\rho_\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi^\dagger_{,\mu}} \Psi^\dagger_{,\rho} \delta^\rho_\nu - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \\ &= \frac{i}{2} \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\nu \Psi - \frac{i}{2} \partial_\nu \Psi^\dagger \gamma^\mu \gamma^0 \Psi - \delta^\mu_\nu \left(\frac{i}{2} \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\rho \partial_\rho \Psi - \frac{i}{2} \partial_\rho \Psi^\dagger \gamma^\rho \gamma^0 \Psi - m \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi \right) . \end{aligned} \quad (5.25)$$

Pour trouver l'énergie et la quantité de mouvement, il suffit de traiter la ligne $\mu = 0$.

Impulsion On trouve facilement $T^0_j = \frac{i}{2} \Psi^\dagger \partial_j \Psi - \frac{i}{2} \partial_j \Psi^\dagger \Psi$; c'est la densité de quantité de mouvement. Ainsi

$$\vec{P} = -\frac{i}{2} \int d^3x \left(\Psi^\dagger \vec{\nabla} \Psi - \vec{\nabla} \Psi^\dagger \Psi \right) . \quad (5.26)$$

Energie De même,

$$\begin{aligned} T^0_0 &= \frac{i}{2} \Psi^\dagger \partial_0 \Psi - \frac{i}{2} \partial_0 \Psi^\dagger \Psi - \frac{i}{2} \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \partial_0 \Psi - \frac{i}{2} \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^j \partial_j \Psi \\ &\quad + \frac{i}{2} \partial_0 \Psi^\dagger \gamma^{0\dagger} \gamma^0 \Psi + \frac{i}{2} \partial_j \Psi^\dagger \gamma^{j\dagger} \gamma^0 \Psi + m \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi \\ &= -\frac{i}{2} \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^j \partial_j \Psi + \frac{i}{2} \partial_j \Psi^\dagger \gamma^{j\dagger} \gamma^0 \Psi + m \Psi^\dagger \gamma^0 \Psi = \frac{i}{2} (\partial_j \bar{\Psi} \gamma^j \Psi - \bar{\Psi} \gamma^j \partial_j \Psi) + m \bar{\Psi} \Psi , \end{aligned} \quad (5.27)$$

et donc

$$E = \int d^3x \left\{ \frac{i}{2} (\partial_j \bar{\Psi} \gamma^j \Psi - \bar{\Psi} \gamma^j \partial_j \Psi) + m \bar{\Psi} \Psi \right\} . \quad (5.28)$$

Il s'avère qu'on peut donner une expression plus simple de l'énergie, en utilisant les équations du mouvement. En effet,

$$\begin{aligned} E &= \int d^3x \left\{ \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi - \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi) + m \bar{\Psi} \Psi - \frac{i}{2} (\partial_0 \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi - \bar{\Psi} \gamma^0 \partial_0 \Psi) \right\} \\ &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} [(i \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi + m \bar{\Psi} \Psi) + (-i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + m \bar{\Psi} \Psi)] - \frac{i}{2} (\partial_0 \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi - \bar{\Psi} \gamma^0 \partial_0 \Psi) \right\} \\ &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \left[\underbrace{(i \partial_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu + m \bar{\Psi})}_{=0} \Psi + \bar{\Psi} \underbrace{(-i \gamma^\mu \partial_\mu + m)}_{=0} \right] - \frac{i}{2} (\partial_0 \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi - \bar{\Psi} \gamma^0 \partial_0 \Psi) \right\} , \end{aligned}$$

d'où l'expression suivante :

$$E = \int d^3x \left\{ \frac{i}{2} (\Psi^\dagger \partial_0 \Psi - \partial_0 \Psi^\dagger \Psi) \right\}. \quad (5.29)$$

Finalement, le lecteur pourra vérifier que cette expression est égale à l'Hamiltonien obtenu par une transformation de Legendre du Lagrangien. Les champs conjugués sont simplement

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}} = \frac{i}{2} \Psi^\dagger \quad \text{et} \quad \Pi^\dagger = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Psi}^\dagger} = -\frac{i}{2} \Psi. \quad (5.30)$$

A des facteurs numériques près, le conjugué au sens opératoire correspond dans ce cas-ci au conjugué au sens de la mécanique analytique.

5.4.2 Le moment cinétique

Le dernier sous-groupe intéressant des transformations de Lorentz est celui des rotations. Sous l'effet des rotations, tant les coordonnées que les champs vont être modifiés. Pour ce qui est des coordonnées, on peut reprendre les cas précédents et trouver directement les fonctions $f_3^1 = x^2$ et $f_3^2 = -x^1$. Pour les transformations du champ, la situation est plus intéressante. On considère la transformation d'un spineur de Dirac. A l'aide de l'éq. (5.6) et de la définition du spineur à quatre composantes, on peut écrire

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \mathcal{E}\chi \end{pmatrix} \longrightarrow \Psi' = \begin{pmatrix} A\psi \\ \mathcal{E}A^*\chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -\mathcal{E}A^*\mathcal{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \mathcal{E}\chi \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Par ailleurs, dans le cas d'une rotation d'angle θ autour de \hat{e}_3 , on connaît

$$A = \cos \frac{\theta}{2} \sigma_0 - i \sin \frac{\theta}{2} \sigma_3 = \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\theta}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\theta}{2}) \end{pmatrix}.$$

Sous forme infinitésimale :

$$A = \begin{pmatrix} 1 - i\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 1 + i\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad -\mathcal{E}A^*\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 - i\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 1 + i\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = A.$$

On peut donc écrire explicitement l'éq. (5.31) sous forme infinitésimale

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = \begin{pmatrix} 1 - i\frac{\theta}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + i\frac{\theta}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - i\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + i\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \Psi = \left(\mathbb{I} - i\frac{\theta}{2} \Sigma_3 \right) \Psi, \quad (5.32)$$

où $\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$. Ceci définit les fonctions $C_{(3)\Psi}$ qu'on va utiliser pour calculer le courant de Noether :

$$C_{(3)\Psi} = -i\frac{\theta}{2} \Sigma_3 \Psi, \quad \text{et} \quad C_{(3)\Psi^\dagger} = i\frac{\theta}{2} \Psi^\dagger \Sigma_3.$$

D'où

$$\begin{aligned} m_3^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} C_\Psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}^\dagger} C_{\Psi^\dagger} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}} \Psi_{,\nu} f_3^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi_{,\mu}^\dagger} \Psi_{,\nu}^\dagger f_3^\nu - f_3^\mu \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{4} \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \Sigma_3 \Psi + \frac{1}{4} \Psi^\dagger \Sigma_3 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \Psi + \frac{i}{2} \Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\nu \Psi f_3^\nu - \frac{i}{2} \partial_\nu \Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 \Psi f_3^\nu - f_3^\mu \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

La densité de moment cinétique par rapport aux rotations autour de l'axe 3 est donc

$$\begin{aligned}
m_3^0 &= \frac{1}{4} [\Psi^\dagger \Sigma_3 \Psi + \Psi^\dagger \Sigma_3 \Psi] + \frac{i}{2} [\Psi^\dagger (\partial_1 \Psi x^2 - \partial_2 \Psi x^1) - (\partial_1 \Psi^\dagger x^2 - \partial_2 \Psi^\dagger x^1) \Psi] \\
&= \frac{1}{2} \Psi^\dagger \Sigma_3 \Psi + \left[\frac{i}{2} (\Psi^\dagger \partial_1 \Psi - \partial_1 \Psi^\dagger \Psi) x^2 - \frac{i}{2} (\Psi^\dagger \partial_2 \Psi - \partial_2 \Psi^\dagger \Psi) x^1 \right] \\
&= \frac{1}{2} \Psi^\dagger \Sigma_3 \Psi - [\vec{p} \wedge \vec{x}]_3 .
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Pour obtenir une expression plus générale, on introduit les matrices $\Sigma_j = \begin{pmatrix} \sigma_j & 0 \\ 0 & \sigma_j \end{pmatrix}$, et on se convainc facilement que

$$\vec{M} = \int d^3x \left\{ \Psi^\dagger \frac{\vec{\Sigma}}{2} \Psi + \vec{x} \wedge \vec{p} \right\} . \tag{5.35}$$

On identifie immédiatement la partie orbitale \vec{L} , qui provient de la transformation des coordonnées, alors que les transformations du champ produisent le moment cinétique intrinsèque \vec{S} :

$$\vec{M} = \vec{L} + \vec{S} , \tag{5.36}$$

$$\text{où } \vec{L} = \int d^3x (\vec{x} \wedge \vec{p}) , \tag{5.37}$$

$$\text{et } \vec{S} = \int d^3x \left(\Psi^\dagger \frac{\vec{\Sigma}}{2} \Psi \right) . \tag{5.38}$$

5.4.3 La charge

Enfin, le Lagrangien du champ spinoriel présente aussi la symétrie suivante :

$$\begin{cases} x^\mu & \longrightarrow x'^\mu = x^\mu , \\ \Psi(x) & \longrightarrow \Psi'(x') = e^{i\alpha} \Psi(x) . \end{cases} \tag{5.39}$$

Le courant de Noether associé est facilement calculé

$$j^\mu = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu (i\Psi) - \frac{i}{2} (-i\Psi^\dagger) \gamma^{\mu\dagger} \gamma^{0\dagger} \Psi = -\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi . \tag{5.40}$$

On définit finalement la charge (électrique) :

$$Q = \int d^3x j^0 = - \int d^3x \Psi^\dagger \Psi . \tag{5.41}$$

Ceci en main, passons maintenant à la quantification de la théorie.

5.5 Quantification

5.5.1 L'équation de Dirac en représentation de Fourier

Comme dans les cas précédents, on va passer dans l'espace Fourier pour quantifier la théorie. Le spineur de Dirac possède donc quatre composantes, et l'équation de Dirac correspond à quatre équations différentielles pour quatre degrés de liberté. Dans le cas du champ scalaire, on a décomposé chaque mode sur une base de \mathbb{R}^3 ; ici, on pourra choisir un ensemble complet de quatre spineurs

$u_1(\vec{k}), u_2(\vec{k}), v_1(-\vec{k})$ et $v_2(-\vec{k})$, tous éléments de \mathbb{C}^4 , et faire de même. Les champs n'étant pas réels, il n'existe aucune contrainte supplémentaire sur les composantes de Fourier. Une décomposition générale peut s'écrire

$$\Psi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \Psi_{\vec{k}} e^{-ikx}.$$

En décomposant les $\Psi_{\vec{k}}$ sur les quatre spineurs de base,

$$\Psi_{\vec{k}} = a_1(\vec{k})u_1(\vec{k}) + a_2(\vec{k})u_2(\vec{k}) + b_1^\dagger(-\vec{k})v_1(-\vec{k}) + b_2^\dagger(-\vec{k})v_2(-\vec{k}),$$

on pourra alors écrire un ansatz général pour le champ spinoriel :

$$\Psi(t, \vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \sum_{\sigma=1}^2 \{ a_\sigma(k)u_\sigma(k)e^{-ikx} + b_\sigma^\dagger(k)v_\sigma(k)e^{+ikx} \}. \quad (5.42)$$

Il est important de remarquer qu'on n'a strictement rien fait jusqu'ici, si ce n'est un changement de notation. En particulier, les coefficients a_σ et b_σ^\dagger ne sont pour l'instant que des nombres complexes qui n'ont pas de signification particulière, on ne leur a pas encore conféré un statut d'opérateur.

C'est en injectant cet ansatz dans l'équation de Dirac (5.19) qu'on pourra réellement trouver les conditions sous lesquelles le champ (5.42) est effectivement une solution. En effet

$$\begin{aligned} & (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0 \\ \iff & \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \sum_{\sigma=1}^2 \{ (i\gamma^\mu (-ik_\mu) - m) a_\sigma u_\sigma e^{-ikx} + (i\gamma^\mu (ik_\mu) - m) b_\sigma^\dagger v_\sigma e^{+ikx} \} = 0. \end{aligned}$$

Comme les nombres a_σ et b_σ^\dagger sont quelconques, et que les spineurs de base sont linéairement indépendants, on doit avoir

$$\begin{cases} (\gamma^\mu k_\mu - m) u_\sigma(k) = 0, \\ (\gamma^\mu k_\mu + m) v_\sigma(k) = 0, \end{cases} \quad \forall \vec{k} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{et} \quad \sigma = 1, 2. \quad (5.43)$$

La conclusion est donc la suivante : si les spineurs $u_\sigma(k)$ et $v_\sigma(k)$ sont des solutions des équations ci-dessus, alors le champ (5.42) est une solution de l'équation de Dirac.

Notation On écrira souvent \not{k} pour $\gamma^\mu k_\mu$. C'est le *slash* de Feynman. L'équation de Dirac devient

$$(i\not{\partial} - m) \Psi = 0, \quad \text{ou encore, en représentation de Fourier,} \quad \begin{cases} (\not{k} - m) u_\sigma(k) = 0, \\ (\not{k} + m) v_\sigma(k) = 0. \end{cases} \quad (5.44)$$

5.5.2 Solution dans l'espace \vec{k}

Fixons $k = (\varepsilon_{\vec{k}}, \vec{k})$. Par une transformation de Lorentz appropriée, on se place dans un référentiel par rapport auquel $\vec{k} = 0$, i.e. par rapport auquel $k = (m, 0)$. La solution tout à fait générale pourrait être obtenue par une transformation de Lorentz appropriée. On renvoie le lecteur intéressé au livre de Peskin et Schröder, par exemple. Les équations (5.43) deviennent alors

$$\begin{aligned} (\gamma^0 m - m) u_\sigma(k) &= 0 \iff (\gamma^0 - \mathbb{I}_4) u_\sigma(k) = 0, \\ (\gamma^0 m + m) v_\sigma(k) &= 0 \iff (\gamma^0 + \mathbb{I}_4) v_\sigma(k) = 0, \end{aligned} \quad (5.45)$$

i.e.

$$\begin{pmatrix} -\mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & -\mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \\ \mathbb{I}_2 & \mathbb{I}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (5.46)$$

Ces matrices étant dégénérées par bloc, chacune de ces équations ne possède que deux solutions linéairement indépendantes, par exemple :

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

On a cette fois-ci une solution explicite de l'équation de Dirac. En particulier, on note que le choix des indices $\sigma = 1, 2$ se trouve justifié encore ici par la dimension des espaces propres des matrices de (5.43). On a donc bien au total exactement quatre degrés de liberté par champ Ψ .

Finalement, on va encore choisir une normalisation des spineurs u_σ et v_σ telle que les relations suivantes soient satisfaites :

$$\overline{u_\sigma} u_{\sigma'} = 2m \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad (5.48)$$

$$\overline{v_\sigma} v_{\sigma'} = -2m \delta_{\sigma, \sigma'}. \quad (5.49)$$

On pourrait de même montrer

$$u_\sigma^\dagger u_{\sigma'} = 2\varepsilon_k^- \delta_{\sigma, \sigma'}, \quad (5.50)$$

$$v_\sigma^\dagger v_{\sigma'} = +2\varepsilon_k^- \delta_{\sigma, \sigma'}. \quad (5.51)$$

Ces spineurs sont donc orthogonaux entre eux, et de dimension $[u_\sigma] = GeV^{1/2}$. Ce choix est judicieux, puisqu'alors les coefficients a_σ et b_σ^\dagger sont de dimension GeV^{-1} , comme dans les cas scalaire et vectoriel.

Propriété On a les 'relations de fermeture' suivantes :

$$\sum_{\sigma=1}^2 u_\sigma \overline{u_\sigma} = (\not{k} + m), \quad (5.52)$$

$$\sum_{\sigma=1}^2 v_\sigma \overline{v_\sigma} = (\not{k} - m). \quad (5.53)$$

En effet, une des propriétés essentielles des matrices γ^μ est que $(\not{k} - m)(\not{k} + m) = k_\mu k^\mu - m^2 = 0$. Alors

$$(\not{k} - m) u_\sigma = 0 \quad \implies \quad \sum_{\sigma} (\not{k} - m) u_\sigma \overline{u_\sigma} = 0 \quad \implies \quad (\not{k} - m) \sum_{\sigma} u_\sigma \overline{u_\sigma} = 0,$$

et donc

$$\sum_{\sigma} u_\sigma \overline{u_\sigma} = (\not{k} + m).$$

Le raisonnement s'applique de même pour v_σ .

5.5.3 Relations d'anticommutations

Tout est désormais prêt pour quantifier la théorie : nous avons une expression pour les solutions de l'équation de Dirac, écrite sous une forme intéressante. Il ne reste plus qu'à transformer les nombres complexes $a_\sigma(k)$ et $b_\rho(p)$ en opérateurs satisfaisants à certaines relations de commutation. Nous commençons par montrer qu'une simple transposition de la démarche suivie jusqu'ici pour les autres champs n'est pas possible. En effet, calculons l'énergie (5.29) :

$$\begin{aligned}
E &= \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} \sum_{\sigma,\rho} \\
&\quad \frac{i}{2} \left\{ \left[(a_\sigma^\dagger(k) u_\sigma^\dagger(k) e^{ikx} + b_\sigma(k) v_\sigma^\dagger(k) e^{-ikx}) \left((-i\varepsilon_{\vec{p}}) a_\rho(p) u_\rho(p) e^{-ipx} + (i\varepsilon_{\vec{p}}) b_\rho^\dagger(p) v_\rho(p) e^{ipx} \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[(i\varepsilon_{\vec{k}}) a_\sigma^\dagger(k) u_\sigma^\dagger(k) e^{ikx} + (-i\varepsilon_{\vec{k}}) b_\sigma(k) v_\sigma^\dagger(k) e^{-ikx} \right] (a_\rho(p) u_\rho(p) e^{-ipx} + b_\rho^\dagger(p) v_\rho(p) e^{ipx}) \right\} \\
&= \int d^3x \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} \sum_{\sigma,\rho} \\
&\quad \frac{i}{2} \left\{ \left[(-i\varepsilon_{\vec{k}}) a_\sigma^\dagger(k) a_\rho(p) u_\sigma^\dagger(k) u_\rho(p) e^{ix(k-p)} + (i\varepsilon_{\vec{p}}) b_\sigma(k) b_\rho^\dagger(p) v_\sigma^\dagger(k) v_\rho(p) e^{-ix(k-p)} \right] \right. \\
&\quad \left. - \left[(i\varepsilon_{\vec{k}}) a_\sigma^\dagger(k) a_\rho(p) u_\sigma^\dagger(k) u_\rho(p) e^{ix(k-p)} + (-i\varepsilon_{\vec{k}}) b_\sigma(k) b_\rho^\dagger(p) v_\sigma^\dagger(k) v_\rho(p) e^{-ix(k-p)} \right] \right\} \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \sum_{\sigma,\rho} \frac{i}{2} \frac{1}{2\varepsilon_{\vec{k}}} \left\{ (-i\varepsilon_{\vec{k}}) a_\sigma^\dagger(k) a_\rho(k) u_\sigma^\dagger(k) u_\rho(k) + (i\varepsilon_{\vec{k}}) b_\sigma(k) b_\rho^\dagger(k) v_\sigma^\dagger(k) v_\rho(k) \right. \\
&\quad \left. - (i\varepsilon_{\vec{k}}) a_\sigma^\dagger(k) a_\rho(k) u_\sigma^\dagger(k) u_\rho(k) + (i\varepsilon_{\vec{k}}) b_\sigma(k) b_\rho^\dagger(k) v_\sigma^\dagger(k) v_\rho(k) \right\} \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \sum_{\sigma,\rho} \frac{1}{2} \left\{ a_\sigma^\dagger(k) a_\rho(k) u_\sigma^\dagger(k) u_\rho(k) - b_\sigma(k) b_\rho^\dagger(k) v_\sigma^\dagger(k) v_\rho(k) \right\} \\
&\stackrel{(5.50),(5.51)}{=} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \varepsilon(k) \sum_{\sigma} \left\{ a_\sigma^\dagger(k) a_\sigma(k) - b_\sigma(k) b_\sigma^\dagger(k) \right\} .
\end{aligned}$$

Il apparaît alors de manière évidente un problème. Si l'on impose des relations de commutation de type bosonique, alors l'intégrand deviendrait après renormalisation de l'énergie du vide $a_\sigma^\dagger(k) a_\sigma(k) - b_\sigma^\dagger(k) b_\sigma(k)$. Mais ceci signifierait qu'à chaque particule de type b créée, l'énergie totale *diminuerait*. Autrement dit, il n'existerait pas d'état d'énergie minimale, et la théorie ne serait simplement pas définie. C'est le signe du deuxième terme qui provoque cette catastrophe. Pour répondre à ce problème, on postule alors les relations suivantes entre les opérateurs quantiques \hat{a} et \hat{b} :

$$\left\{ \hat{a}_\rho(k), \hat{a}_\sigma^\dagger(p) \right\} = (2\pi)^3 2\varepsilon_{\vec{k}} \delta_{\rho,\sigma} \delta(\vec{k} - \vec{p}) \quad \text{et} \quad \left\{ \hat{b}_\rho(k), \hat{b}_\sigma^\dagger(p) \right\} = (2\pi)^3 2\varepsilon_{\vec{k}} \delta_{\rho,\sigma} \delta(\vec{k} - \vec{p}) , \quad (5.54)$$

toutes les autres combinaisons étant trivialement nulles. On a donc utilisé l'*anticommutateur*⁴ $\{A, B\} = AB + BA$, et non plus le traditionnel commutateur qui apparaît dans les théories bosoniques. C'est là une différence fondamentale du champ spinoriel, et on verra dans la suite de ce chapitre qu'elle implique toute une série d'éléments nouveaux.

Après renormalisation de l'énergie du vide, on obtient finalement un Hamiltonien quantique bien défini :

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \varepsilon_{\vec{k}} \sum_{\sigma=1}^2 \left\{ \hat{a}_\sigma^\dagger(k) \hat{a}_\sigma(k) + \hat{b}_\sigma^\dagger(k) \hat{b}_\sigma(k) \right\} . \quad (5.55)$$

⁴On le note parfois aussi $[A, B]_+$.

Analysons le spectre de la théorie. Pour simplifier les notations, on ne considère qu'un seul couple d'opérateurs \hat{a} et \hat{a}^\dagger , tels que $\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = \mathbb{I}$. On définit l'état du vide $|0\rangle$ comme l'état propre de l'opérateur \hat{a} pour la valeur propre 0 :

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (5.56)$$

On pose alors le problème aux valeurs propres

$$\hat{N}|\psi\rangle = \hat{a}^\dagger \hat{a}|\psi\rangle = n|\psi\rangle, \quad (5.57)$$

avec $|\psi\rangle$ normalisé. Clairement, on doit avoir $n \geq 0$, puisque $0 \leq \langle \psi | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \psi \rangle = n \langle \psi | \psi \rangle = n$. Supposons que $|\psi\rangle$ n'est pas l'état du vide, i.e. que $n > 0$. Montrons maintenant que $\hat{a}|\psi\rangle$ est aussi un vecteur propre de \hat{N} , pour la valeur propre $(1 - n)$.

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}|\psi\rangle) = \hat{a}|\psi\rangle - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}|\psi\rangle = \hat{a}|\psi\rangle - n\hat{a}|\psi\rangle = (1 - n) (\hat{a}|\psi\rangle),$$

où on a utilisé la relation d'anticommutation. Il en va de même pour \hat{a}^\dagger . Finalement, comme $\{\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger\} = 0$, on doit avoir que $\hat{a}^{\dagger 2} = 0$. De même, $\hat{a}^2 = 0$. Mais alors :

$$\hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{a}|\psi\rangle) = \hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}|\psi\rangle) = 0,$$

En comparant avec la ligne précédente, on doit avoir que $(1 - n) = 0$. Ainsi, $n = 1$. En conclusion, le spectre de l'opérateur \hat{N} ne contient que deux éléments :

$$\text{Sp} \{ \hat{a}^\dagger \hat{a} \} = \{0, 1\}. \quad (5.58)$$

On peut maintenant construire l'espace de Fock de la théorie. Pour chaque type de particules a ou b , et pour chaque valeur de \vec{k} , on retrouve la situation ci-dessus. Ainsi, l'espace de Hilbert est engendré par les vecteurs suivants :

$$|\psi\rangle = \hat{a}_{k_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{k_n}^\dagger \hat{b}_{p_1}^\dagger \cdots \hat{b}_{p_m}^\dagger |0\rangle, \quad \text{où } k_i \neq k_j, \text{ et } p_i \neq p_j, \text{ si } i \neq j. \quad (5.59)$$

Cette dernière condition provient simplement du fait que si deux impulsions étaient égales, alors l'état serait simplement nul, puisque $\hat{a}_{k_i}^{\dagger 2} = 0$. Ainsi, un état à n particules s'écrit

$$|\psi\rangle = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \psi(k_1 \dots k_n) \left(\prod_{i=1}^n \hat{a}_{k_i}^\dagger \right) |0\rangle, \quad \text{où } \psi(k_1 \dots k_n) = (-1)^\pi \psi(k_{\pi(1)} \dots k_{\pi(n)}), \quad (5.60)$$

$\pi \in S_n$ est une permutation de $\{1, \dots, n\}$, et $(-1)^\pi$ en est la signature.

La fonction d'onde d'un état à n particules est donc totalement antisymétrique par rapport aux permutations des particules : le champ spinoriel décrit un ensemble de *fermions*. Remarquons que cette propriété n'est pas imposée a posteriori comme un axiome supplémentaire, mais qu'elle est directement héritée de l'anticommutation des opérateurs de création et d'annihilation. De même, les propriétés spectrales de l'opérateur de nombre de particules reflètent le principe d'exclusion de Pauli : il ne peut pas exister plus d'une particule fermionique dans un même état quantique. On ne sera donc pas surpris de constater tantôt qu'il décrit des particules de spin demi entier.

Au niveau le plus fondamental, toutes ces propriétés ne sont que des conséquences de la substitution du commutateur par l'anticommutateur pour les opérateurs de création et d'annihilation. De même que le passage du crochet de Poisson au commutateur permet la transition algébrique de la physique classique à la physique quantique, les bosons et les fermions se distinguent l'un de l'autre à ce niveau-là également. La structure algébrique sous-jacente détermine complètement la théorie physique.

5.5.4 Quantification canonique

Nous avons ici quantifié la théorie dans le formalisme lagrangien. Il aurait été tout à fait possible d'obtenir les mêmes résultats en partant de l'Hamiltonien. On aurait alors imposé des relations d'anticommutation à temps fixé directement sur les champs, et non plus sur les opérateurs de création et d'annihilation. On vérifierait aisément que les relations correctes sont :

$$\left\{ \hat{\Psi}_\alpha(t, \vec{x}), \hat{\Psi}_\beta^\dagger(t, \vec{y}) \right\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x} - \vec{y}) . \quad (5.61)$$

On voit que les composantes des spineurs anticommulent entre elles. Il s'agira donc d'être très prudent par la suite lors de calculs où on devra travailler en composantes.

5.5.5 Autres invariants dynamiques

On vient de calculer explicitement l'expression de l'Hamiltonien en fonction des opérateurs de création et d'annihilation. Un calcul similaire à partir de l'éq. (5.26) donnerait

$$\hat{P} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \vec{k} \sum_{\sigma=1}^2 \left\{ \hat{a}_\sigma^\dagger(k) \hat{a}_\sigma(k) + \hat{b}_\sigma^\dagger(k) \hat{b}_\sigma(k) \right\} . \quad (5.62)$$

De même, la charge (5.41) devient trivialement :

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= - \int d^3 x \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} \sum_{\sigma, \rho} \\ &\quad \left\{ \hat{a}_\sigma^\dagger(k) u_\sigma^\dagger(k) e^{ikx} + \hat{b}_\sigma(k) v_\sigma^\dagger(k) e^{-ikx} \right\} \left\{ \hat{a}_\rho(p) u_\rho(p) e^{-ipx} + \hat{b}_\rho^\dagger(p) v_\rho(p) e^{+ipx} \right\} \\ &= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \sum_{\sigma, \rho} \frac{1}{2\varepsilon_k} \left\{ \hat{a}_\sigma^\dagger(k) \hat{a}_\rho(k) u_\sigma^\dagger(k) u_\rho(k) + \hat{b}_\sigma(k) \hat{b}_\rho^\dagger(k) v_\sigma^\dagger(k) v_\rho(k) \right\} \\ &= - \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \sum_{\sigma} \left\{ \hat{a}_\sigma^\dagger(k) \hat{a}_\sigma(k) + \hat{b}_\sigma(k) \hat{b}_\sigma^\dagger(k) \right\} . \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à anticommuer les $\hat{b}(k)$ pour obtenir :

$$\hat{Q} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \sum_{\sigma=1}^2 \left\{ \hat{b}_\sigma^\dagger(k) \hat{b}_\sigma(k) - \hat{a}_\sigma^\dagger(k) \hat{a}_\sigma(k) \right\} . \quad (5.63)$$

L'observation des résultats obtenus montre comme dans le cas du champ scalaire complexe que les particules de type b sont les antiparticules des a , qui ont donc la même énergie et la même quantité de mouvement, mais une charge opposée. De plus, les particules sont cette fois-ci chargées négativement.

5.5.6 Le spin

Pour mettre en évidence le spin du champ de Dirac, on procède comme dans le cas du champ vectoriel, par une approche algébrique. Calculons d'abord

$$\begin{aligned}
 [\hat{S}, \hat{\Psi}_\beta^\dagger] &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \vec{\Sigma}_{\alpha\gamma} \hat{\Psi}_\gamma \hat{\Psi}_\beta^\dagger - \frac{1}{2} \hat{\Psi}_\beta^\dagger \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \vec{\Sigma}_{\alpha\gamma} \hat{\Psi}_\gamma \right\} \\
 &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \vec{\Sigma}_{\alpha\gamma} \left(\delta_{\gamma\beta} \delta(x-y) - \hat{\Psi}_\beta^\dagger \hat{\Psi}_\gamma \right) - \frac{1}{2} \hat{\Psi}_\beta^\dagger \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \vec{\Sigma}_{\alpha\gamma} \hat{\Psi}_\gamma \right\} \\
 &= \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \vec{\Sigma}_{\alpha\gamma} \delta_{\gamma\beta} \delta(x-y) + \frac{1}{2} \hat{\Psi}_\beta^\dagger \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \vec{\Sigma}_{\alpha\gamma} \hat{\Psi}_\gamma - \frac{1}{2} \hat{\Psi}_\beta^\dagger \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \vec{\Sigma}_{\alpha\gamma} \hat{\Psi}_\gamma \right\} = \frac{1}{2} \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \vec{\Sigma}_{\alpha\beta}.
 \end{aligned}$$

Maintenant,

$$\begin{aligned}
 [\hat{S}^2, \hat{\Psi}_\beta^\dagger] &= \hat{S} [\hat{S}, \hat{\Psi}_\beta^\dagger] + [\hat{S}, \hat{\Psi}_\beta^\dagger] \hat{S} = \hat{S} \left(\frac{1}{2} \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \vec{\Sigma}_{\alpha\beta} \right) + \left(\frac{1}{2} \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \vec{\Sigma}_{\alpha\beta} \right) \hat{S} \\
 &= \hat{S} \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \frac{1}{2} \vec{\Sigma}_{\alpha\beta} - \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \hat{S} \frac{1}{2} \vec{\Sigma}_{\alpha\beta} + \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \hat{S} \frac{1}{2} \vec{\Sigma}_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \vec{\Sigma}_{\alpha\beta} \hat{S} \\
 &= [\hat{S}, \hat{\Psi}_\alpha^\dagger] \frac{1}{2} \vec{\Sigma}_{\alpha\beta} + \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \vec{\Sigma}_{\alpha\beta} \hat{S} \\
 &= \frac{1}{4} \hat{\Psi}_\gamma^\dagger \underbrace{\vec{\Sigma}_{\gamma\alpha} \vec{\Sigma}_{\alpha\beta}}_{=3\delta_{\gamma\beta}} + \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \vec{\Sigma}_{\alpha\beta} \hat{S} \\
 &= \frac{3}{4} \hat{\Psi}_\beta^\dagger + \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \vec{\Sigma}_{\alpha\beta} \hat{S},
 \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\vec{\sigma} \cdot \vec{\sigma} = 3\mathbb{I}$.

Finalement, on trouve,

$$\hat{S}^2 \hat{\Psi}_\beta^\dagger |0\rangle = \frac{3}{4} \hat{\Psi}_\beta^\dagger |0\rangle + \hat{\Psi}_\alpha^\dagger \vec{\Sigma}_{\alpha\beta} \underbrace{\vec{S}|0\rangle}_{=0} + \hat{\Psi}_\beta^\dagger \underbrace{\hat{S}^2|0\rangle}_{=0} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \hat{\Psi}_\beta^\dagger |0\rangle. \quad (5.64)$$

Le champ spinoriel décrit donc des particules de spin $\frac{1}{2}$.

En conclusion, on constate que la particule associée au champ spinoriel est un fermion de spin $\frac{1}{2}$ et de charge -1 : on pourra décrire ainsi l'électron, et son antiparticule chargée positivement, le positron. C'était précisément là l'objectif original de Dirac.

5.6 L'interprétation de Dirac

Lorsqu'il formula sa théorie, l'image que Dirac avait en tête, bien qu'équivalente à celle qu'on vient de donner, était différente et encore très influencée par la mécanique quantique de Schrödinger. Dans ce cadre conceptuel, on cherche à résoudre le problème aux valeurs propres pour l'Hamiltonien, ici $\hat{H}_D = i\gamma^i \gamma^0 \partial_i - m\gamma^0$ (cf l'éq. (5.23)), afin d'en extraire les niveaux d'énergie. On obtient alors

$$\hat{H}_D \Psi = E_D \Psi \implies E_D = \pm \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}. \quad (5.65)$$

On retrouve le problème des énergies négatives. La solution proposée par Dirac est de dire que l'état du vide, i.e. l'état fondamental de la théorie, est celui où tous les niveaux d'énergie négative sont occupés et les niveaux supérieurs sont libres (voir la figure 5.1). Il est important de se rappeler

ici qu'il s'agit de fermions qui doivent satisfaire au principe d'exclusion. Les antiparticules sont alors simplement des vides dans ces orbitales d'énergie négative. Ils correspondent donc à des particules d'énergie positive. Le phénomène de production d'une paire électron-positron correspond à l'excitation d'un 'trou', qui saute dans un état d'énergie positive. On a bien apparition simultanée d'une particule et de son antiparticule.

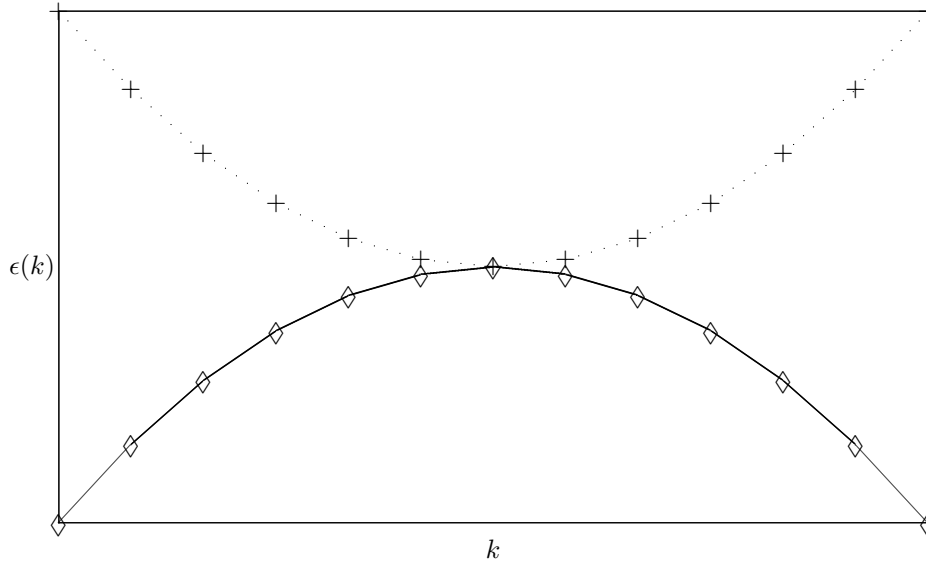


FIG. 5.1 – L'état du vide dans l'interprétation de Dirac : une mer de particules d'énergie négative

Nous allons terminer ce chapitre en traitant successivement le champ fermionique non massif et le champ de Majorana. Nous n'allons plus entrer dans les détails pour ces cas particuliers, nous nous contenterons de donner une idée des points essentiels et des éléments fondamentalement différents.

5.7 Le champ fermionique sans masse

Contrairement au cas du champ vectoriel, il n'apparaît ici aucun problème essentiel dans la limite $m \rightarrow 0$. En revenant à l'expression (5.14) du Lagrangien, on constate cependant que si $m = 0$, les champs à 2 composantes ψ et χ ne sont plus couplés. On est donc ramené à l'une des possibilités (équivalentes) suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{L} = \frac{i}{2} \psi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi + h.c. ; \\ \widetilde{\mathcal{L}} = \frac{i}{2} \chi^T \sigma^\mu \partial_\mu \chi^* + h.c. . \end{cases} \quad (5.66)$$

Ce découplage est en fait l'expression du fait que si $m = 0$, le nombre de degrés de liberté est ramené à seulement 2. On le voit bien en écrivant l'équation de Dirac en représentation de Fourier. On trouve la même équation pour chacun des spineurs u et v .

On peut réécrire ceci d'une manière élégante et qui permet un traitement simultané de tous les

cas. Introduisons les projecteurs P_L et P_R définis par

$$P_L = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma^5) , \quad (5.67)$$

$$P_R = \frac{1}{2} (\mathbb{I} - \gamma^5) . \quad (5.68)$$

On vérifie aisément qu'il s'agit bien de projecteurs. De plus, on a que $P_L + P_R = \mathbb{I}$ et que $P_L P_R = 0$.

On définit alors les spineurs (à quatre composantes) suivants :

$$\Psi_L = P_L \Psi , \quad (5.69)$$

$$\Psi_R = P_R \Psi , \quad (5.70)$$

et les propriétés des projecteurs se retrouvent naturellement ici : $\Psi_L + \Psi_R = \Psi$. On appelle ces spineurs *gaucher* (Left-handed) et *droitier* (Right-handed). De plus, comme $\{\gamma^0, \gamma^5\} = 0$, on a

$$\overline{\Psi}_L = \Psi^\dagger \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma^5) \gamma^0 = \Psi^\dagger \gamma^0 \frac{1}{2} (\mathbb{I} - \gamma^5) = \overline{\Psi} P_R , \quad (5.71)$$

$$\overline{\Psi}_R = \Psi^\dagger \frac{1}{2} (\mathbb{I} - \gamma^5) \gamma^0 = \Psi^\dagger \gamma^0 \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma^5) = \overline{\Psi} P_L . \quad (5.72)$$

Ainsi,

$$\overline{\Psi}_L \Psi_L = 0 \quad \text{et} \quad \overline{\Psi}_R \Psi_R = 0 .$$

Finalement,

$$\overline{\Psi}_L \gamma^\mu \Psi_R = \overline{\Psi} P_R \gamma^\mu P_R \Psi = \overline{\Psi} \gamma^\mu P_L P_R \Psi = 0 .$$

Le Lagrangien de Dirac s'écrit alors

$$\mathcal{L} = i \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_L + i \overline{\Psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_R - m \overline{\Psi}_L \Psi_R - m \overline{\Psi}_R \Psi_L , \quad (5.73)$$

ce qui n'est qu'une reformulation des expressions (5.66), mais à l'aide de spineurs à quatre composantes.

On constate à nouveau que les spineurs gaucher et droitier se découplent lorsque la masse est nulle. L'action reste toujours invariante sous les changements de phase globaux des spineurs, ces fermions sont donc chargés, et les deux degrés de liberté décrivent donc la particule et son antiparticule. Dans ce cas, il n'existe donc plus qu'un seul état de polarisation pour chacun des spineurs R ou L . On pourrait alors montrer que le spin du fermion gaucher est toujours antiparallèle à son impulsion, alors qu'il est parallèle dans le cas droitier, c'est là l'origine de cette dénomination. Il est tout à fait intéressant de noter à ce point l'analogie avec le cas du champ vectoriel. En effet, dans les deux cas, le passage d'un champ massif à un champ non massif fait perdre à la particule un état de polarisation. Ici à nouveau, on parlera plutôt d'hélicité que de spin lorsque $m = 0$.

5.8 Les fermions de Majorana

Lors de la construction du Lagrangien de Dirac, nous avons éliminé les termes pourtant scalaires de la forme $\psi^T \mathcal{E} \psi$ et $\chi^\dagger \mathcal{E} \chi^*$, puisqu'ils étaient a priori nuls. Mais entre-temps, nous avons observé qu'il s'agit de champs fermioniques qui satisfont à des relations d'anticommutation. En particulier,

$$\psi_1 \psi_2 - \psi_2 \psi_1 \neq 0 .$$

On peut donc concevoir encore un nouveau type de fermion massif à seulement deux composantes :

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \psi^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi + m \psi^T \mathcal{E} \psi . \quad (5.74)$$

On observe rapidement que cette théorie n'est plus invariante sous le groupe $U(1)$, le champ n'est donc plus chargé. Il subsiste cependant encore deux degrés de liberté, ce sont les deux états de spin. On appelle ce nouveau type de fermion neutre les *fermions de Majorana*. Ils ont la propriété particulière d'être leur propre antiparticule. Ce type de particule a reçu récemment un intérêt renouvelé, alors que les expériences sur les oscillations des neutrinos tendent à prouver que ces derniers ont une masse certes faible mais non nulle. Comme ils portent un spin $\frac{1}{2}$, ils pourraient précisément être de type Majorana.

5.9 Conclusion

C'est avec ces quelques précisions que s'achève notre étude des trois types de champs libres sur lesquels repose l'ensemble du Modèle Standard : Le champ scalaire, le champ vectoriel et le champ spinoriel. Pour construire un modèle intéressant, il faudra maintenant introduire des interactions entre ces champs, i.e. ajouter aux Lagrangiens libres des termes 'mixtes' qui permettent de décrire comment différentes particules peuvent interagir. Mais avant cela, nous concluons cette partie par une brève étude des symétries discrètes.

Chapitre 6

Symétries discrètes

Jusqu'à présent, toutes les symétries que nous avons considérées formaient des groupes de Lie et pouvaient donc être décrites par une fonction douce d'un ou plusieurs paramètres. En particulier, il était toujours possible de travailler avec ces transformations sous forme infinitésimale, ce qui est essentiel pour le théorème de Noether et pour la construction des courants associés. Cette situation n'est pourtant pas générique et il est tout à fait possible de considérer aussi des symétries, dites discrètes, dont on ne peut pas relier les différents éléments de manière continue. Nous en avons déjà rencontré deux types dans le groupe de Lorentz :

1. L'*inversion temporelle*

$$T : (t, \vec{x}) \longmapsto (-t, \vec{x}) \text{ ,} \quad (6.1)$$

qui échange les rôles des cônes de lumière futur et passé.

2. La *parité*

$$P : (t, \vec{x}) \longmapsto (t, -\vec{x}) \text{ ,} \quad (6.2)$$

qui produit une image miroir du monde, en renversant donc sa chiralité.

Finalement, il en existe une troisième importante, qui est une symétrie interne, i.e. qui ne modifie pas l'espace-temps mais les champs seulement, la *conjugaison de charge* :

$$C : \{\text{particules}\} \longmapsto \{\text{antiparticules}\} \text{ .} \quad (6.3)$$

S'il a toujours été essentiel jusqu'ici d'imposer l'invariance des théories par rapport à \mathcal{L}_+ , la situation est plus délicate pour ces symétries discrètes. Jusqu'à présent, les expériences n'ont pas réussi à mettre en évidence de violation de T , P ou C pour deux des trois interactions fondamentales, à savoir les interactions forte et électromagnétique. Par contre, l'interaction faible viole C et P séparément, de même que CP et T . Cependant, le théorème CPT affirme que sous des hypothèses raisonnables, la combinaison des trois, i.e. CPT , doit être une symétrie de la nature, et aucune expérience n'est venu le contredire jusqu'ici.

6.1 La parité

D'un point de vue classique, la parité doit renverser la quantité de mouvement d'une particule, sans pour autant inverser le sens du moment cinétique. Quantiquement, on doit représenter cette transformation par un opérateur unitaire U_P , dont il suffit de connaître l'action sur les opérateurs de création et d'annihilation :

$$U_P \hat{a}_\sigma^\dagger(\vec{k}) U_P^\dagger = \eta_P^* \hat{a}_\sigma^\dagger(-\vec{k}) \quad \text{et} \quad U_P \hat{a}_\sigma(\vec{k}) U_P^\dagger = \eta_P \hat{a}_\sigma(-\vec{k}) \text{ ,} \quad (6.4)$$

où η_P est une phase non déterminée pour l'instant. Comme U_P est unitaire, on doit cependant avoir que $|\eta_P|^2 = 1$. Dans le cas où l'on traite des champs complexes, on doit aussi avoir :

$$U_P \hat{b}_\sigma^\dagger(\vec{k}) U_P^\dagger = \tilde{\eta}_P^* \hat{b}_\sigma^\dagger(-\vec{k}) \quad \text{et} \quad U_P \hat{b}_\sigma(\vec{k}) U_P^\dagger = \tilde{\eta}_P \hat{b}_\sigma(-\vec{k}), \quad (6.5)$$

avec $|\tilde{\eta}_P|^2 = 1$.

Il s'agit maintenant de déduire les lois de transformation des champs eux-même sous l'action de la parité.

6.1.1 Champ scalaire

Clairement, on doit avoir que $U_P \hat{\phi}(t, \vec{x}) U_P^\dagger = A \hat{\phi}(t, -\vec{x})$, et A est un nombre à déterminer. Pour cela,

$$\begin{aligned} U_P \hat{\phi}(t, \vec{x}) U_P^\dagger &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ \eta_\phi \hat{a}(-\vec{k}) e^{-i\varepsilon_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{x}} + \eta_\phi^* \hat{a}^\dagger(-\vec{k}) e^{i\varepsilon_{\vec{k}} t - i\vec{k}\vec{x}} \right\} \\ &\stackrel{\vec{k} \rightarrow -\vec{k}}{=} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ \eta_\phi \hat{a}(\vec{k}) e^{-i\varepsilon_{\vec{k}} t - i\vec{k}\vec{x}} + \eta_\phi^* \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{i\varepsilon_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{x}} \right\} \\ &= \eta_\phi \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ \hat{a}(\vec{k}) e^{-i\varepsilon_{\vec{k}} t - i\vec{k}\vec{x}} + \frac{\eta_\phi^*}{\eta_\phi} \hat{a}^\dagger(\vec{k}) e^{i\varepsilon_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{x}} \right\}. \end{aligned}$$

On doit donc imposer une contrainte supplémentaire à la phase,

$$\frac{\eta_\phi^*}{\eta_\phi} = 1. \quad (6.6)$$

Cette phase doit donc être réelle, il ne reste que deux possibilités : $\eta_\phi = \pm 1$. Ceci définit donc deux types de champ :

1. Le champ *véritablement scalaire*, pour lequel $U_P \hat{\phi}(t, \vec{x}) U_P^\dagger = \hat{\phi}(t, -\vec{x})$.
2. Le champ *pseudo-scalaire*, tel que $U_P \hat{\phi}(t, \vec{x}) U_P^\dagger = -\hat{\phi}(t, -\vec{x})$.

Le cas du champ complexe est quelque peu différent. On impose de même $U_P \hat{\phi}(t, \vec{x}) U_P^\dagger = \tilde{A} \hat{\phi}(t, -\vec{x})$. Or

$$\begin{aligned} U_P \hat{\phi}(t, \vec{x}) U_P^\dagger &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ \eta_P \hat{a}(-\vec{k}) e^{-i\varepsilon_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{x}} + \tilde{\eta}_P^* \hat{b}^\dagger(-\vec{k}) e^{i\varepsilon_{\vec{k}} t - i\vec{k}\vec{x}} \right\} \\ &= \eta_P \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \left\{ \hat{a}(\vec{k}) e^{-i\varepsilon_{\vec{k}} t - i\vec{k}\vec{x}} + \frac{\tilde{\eta}_P^*}{\eta_P} \hat{b}^\dagger(\vec{k}) e^{i\varepsilon_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{x}} \right\}. \end{aligned}$$

On trouve donc que

$$\tilde{\eta}_P^* = \eta_P. \quad (6.7)$$

On ne peut donc pas déterminer les phases dans ce cas-ci. Seul importe le comportement relatif de la transformation de la particule par rapport à l'antiparticule.

6.1.2 Champ vectoriel

Comme dans le cas précédent, on doit obtenir $U_P \hat{A}^i(t, \vec{x}) U_P^\dagger = M_A \hat{A}^i(t, -\vec{x})$, où M_A est une matrice 3×3 . Avant d'effectuer le calcul, rappelons que les vecteurs de polarisation ont été choisis de telle sorte que le troisième soit parallèle à \vec{k} . Sous l'échange $\vec{k} \mapsto -\vec{k}$, on aura que

$$\vec{e}^{(n)}(\vec{k}) \longrightarrow -\vec{e}^{(n)}(-\vec{k}).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} U_P \hat{A}^i(t, \vec{x}) U_P^\dagger &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \sum_{n=1}^3 \left(-e^{i(n)}(-\vec{k}) \right) \left[\eta_A \hat{a}_{(n)}(-\vec{k}) e^{-i\varepsilon_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{x}} + \eta_A^* \hat{a}_{(n)}^\dagger(-\vec{k}) e^{i\varepsilon_{\vec{k}} t - i\vec{k}\vec{x}} \right] \\ &= -\eta_A \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \sum_{n=1}^3 e^{i(n)}(\vec{k}) \left[\hat{a}_{(n)}(\vec{k}) e^{-i\varepsilon_{\vec{k}} t - i\vec{k}\vec{x}} + \frac{\eta_A^*}{\eta_A} \hat{a}_{(n)}^\dagger(\vec{k}) e^{i\varepsilon_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{x}} \right]. \end{aligned}$$

On a donc que $M_A = \mathbb{I}$ et à nouveau seulement deux cas possibles :

1. Le *vecteur*, pour lequel $\eta_A = 1$ et donc $U_P \hat{A}^i(t, \vec{x}) U_P^\dagger = -\hat{A}^i(t, -\vec{x})$.
2. Le *pseudo-vecteur*, avec $\eta_A = -1$ et $U_P \hat{A}^i(t, \vec{x}) U_P^\dagger = \hat{A}^i(t, -\vec{x})$.

On trouve bien le comportement classique d'un vecteur par image miroir.

On peut finalement déterminer la loi de transformation de la composante '0' du champ. Comme $\partial_0 A^0 = \partial_i A^i$ et que $\partial_i \rightarrow -\partial_i$, dans le cas d'un vecteur, on a que A^0 n'est pas modifié :

$$(\text{Vecteur}) \quad \left(A^0, \vec{A} \right) \longrightarrow \left(A^0, -\vec{A} \right),$$

ce qui est tout à fait analogue à la transformation des coordonnées (t, \vec{x}) .

6.1.3 Champ spinoriel

Nous abordons maintenant le cas le plus intéressant, le spineur. La loi de transformation la plus générale s'écrit à nouveau

$$U_P \Psi(t, \vec{x}) U_P^\dagger = \eta_\Psi A \Psi(t, -\vec{x}), \quad (6.8)$$

où A est une matrice 4×4 à déterminer. Nous n'allons pas suivre la même démarche que dans les cas précédents ici puisqu'on ne connaît pas a priori les lois de transformation des spineurs u_σ et v_σ . L'astuce sera donc d'exiger à l'inverse que le Lagrangien libre et donc l'équation de Dirac soit invariants sous l'action de U_P . Autrement dit, le champ transformé doit aussi être une solution de cette équation. Ainsi,

$$\begin{aligned} i\gamma^0 \partial_0 U_P \Psi(t, \vec{x}) U_P^\dagger + i\gamma^j \partial_j U_P \Psi(t, \vec{x}) U_P^\dagger - m U_P \Psi(t, \vec{x}) U_P^\dagger &= 0 \\ \iff i\gamma^0 \partial_0 \eta_\Psi A \Psi(t, -\vec{x}) + i\gamma^j \partial_j \eta_\Psi A \Psi(t, -\vec{x}) - m \eta_\Psi A \Psi(t, -\vec{x}) &= 0 \\ \iff i\gamma^0 A \partial_0 \Psi(t, \vec{x}) - i\gamma^j A \partial_j \Psi(t, \vec{x}) - m A \Psi(t, \vec{x}) &= 0, \end{aligned}$$

où on a simplement changé \vec{x} en $-\vec{x}$ dans la dernière ligne. Pour que l'on obtienne à nouveau l'équation de Dirac, il faut donc identifier une matrice qui commute avec γ^0 et qui anticommute avec les γ^i . On trouve facilement $A = \gamma^0$. On a ainsi

$$U_P \Psi(t, \vec{x}) U_P^\dagger = \eta_\Psi \gamma^0 \Psi(t, -\vec{x}). \quad (6.9)$$

Pour terminer cette section, nous donnons un exemple expérimental où la parité est violée. On considère la désintégration du pion en muon et neutrino :

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu.$$

Dans l'état final, le muon peut avoir son spin orienté parallèlement (droitier) ou antiparallèlement (gaucher) à son impulsion. Si la parité était une symétrie exacte, alors le nombre de muons gauchers devrait être le même que le nombre de muons droitiers. Or il s'avère que ce n'est expérimentalement pas le cas. La parité n'est pas une symétrie de l'interaction faible, responsable de cette réaction. On verra ceci en détails au chapitre 11 : disons pour l'instant que l'interaction faible est explicitement gauchère.

6.2 La conjugaison de charge

Si la parité en tant qu'opérateur quantique présente un analogue classique évident, l'opérateur de conjugaison de charge U_C , lui, est purement quantique et n'admet aucun analogue classique. Il échange les rôles des particules et des antiparticules. On commence donc par définir

$$U_C \hat{a}_\sigma^\dagger(\vec{k}) U_C^\dagger = \eta_C^* \hat{b}_\sigma^\dagger(\vec{k}) \quad \text{et} \quad U_C \hat{a}_\sigma(\vec{k}) U_C^\dagger = \eta_C \hat{b}_\sigma(\vec{k}). \quad (6.10)$$

De même,

$$U_C \hat{b}_\sigma^\dagger(\vec{k}) U_C^\dagger = \tilde{\eta}_C^* \hat{a}_\sigma^\dagger(\vec{k}) \quad \text{et} \quad U_C \hat{b}_\sigma(\vec{k}) U_C^\dagger = \tilde{\eta}_C \hat{a}_\sigma(\vec{k}). \quad (6.11)$$

On a alors que

$$\hat{a}_\sigma^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_\sigma(\vec{k}) \xrightarrow{C} \hat{b}_\sigma^\dagger(\vec{k}) \hat{b}_\sigma(\vec{k}) \quad \text{et} \quad \hat{b}_\sigma^\dagger(\vec{k}) \hat{b}_\sigma(\vec{k}) \xrightarrow{C} \hat{a}_\sigma^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_\sigma(\vec{k}).$$

Ceci implique directement l'invariance de l'énergie et de la quantité de mouvement. Par contre, on constate que la conjugaison de charge change le signe de la charge (d'où son nom), puisque

$$\hat{Q} \sim \hat{a}_\sigma^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_\sigma(\vec{k}) - \hat{b}_\sigma^\dagger(\vec{k}) \hat{b}_\sigma(\vec{k}) \xrightarrow{C} \hat{b}_\sigma^\dagger(\vec{k}) \hat{b}_\sigma(\vec{k}) - \hat{a}_\sigma^\dagger(\vec{k}) \hat{a}_\sigma(\vec{k}) \sim -\hat{Q}.$$

La question qui se pose maintenant est celle de la transformation des champs réels. Clairement, on doit avoir

$$U_C \hat{a}_\sigma(\vec{k}) U_C^\dagger = \eta_C \hat{a}_\sigma(\vec{k}),$$

et naturellement $\eta_C = \pm 1$. On parlera alors de champ véritablement neutre dans le cas $+1$.

Pour la suite, la démarche est la même que dans le cas de la parité. On laisse donc au lecteur soucieux de connaître les détails le soin d'effectuer les calculs lui-même. On trouve :

- pour le champ scalaire

$$U_C \hat{\phi}(x) U_C^\dagger = \eta_C \hat{\phi}^\dagger(x), \quad (6.12)$$

pour autant que $\tilde{\eta}_C^* = \eta_C$. On constate donc que la transformation est locale, i.e. que le champ au point (t, \vec{x}) après transformation ne dépend que de la valeur du champ avant à ce même point (t, \vec{x}) ;

- pour le champ vectoriel, la situation est la même. En particulier, on notera au passage que le photon, qui est un champ réel, est du type $\eta_C = -1$.

Concentrons-nous maintenant sur le champ de Dirac. Comme pour le champ scalaire, la conjugaison de charge doit transformer $\Psi(x)$ en $\Psi^*(x)$. La convention est d'écrire la transformation locale sous la forme suivante :

$$U_C \Psi(x) U_C^\dagger = \eta_C \bar{\Psi}^T(x) \quad (6.13)$$

$$= \eta_C \gamma^{0T} \Psi^*(x), \quad (6.14)$$

et la matrice 4×4 C sera à nouveau déterminée en imposant la symétrie de l'équation de Dirac. On a

$$\begin{aligned} & i\gamma^\mu \partial_\mu U_C \Psi(t, \vec{x}) U_C^\dagger - m U_C \Psi(t, \vec{x}) U_C^\dagger = 0 \\ \iff & i\gamma^\mu \partial_\mu \eta_C \gamma^{0T} \Psi^*(x) - m \eta_C \gamma^{0T} \Psi^*(x) = 0 \\ \iff & i\gamma^\mu C \gamma^{0T} \partial_\mu \Psi^*(x) - m C \gamma^{0T} \Psi^*(x) = 0 \\ \iff & -i\gamma^{\mu*} C^* \gamma^{0\dagger} \partial_\mu \Psi(x) - m C^* \gamma^{0\dagger} \Psi(x) = 0 \\ \implies & -i\gamma^0 (C^*)^{-1} \gamma^{\mu*} C^* \gamma^0 \partial_\mu \Psi(x) - m \Psi(x) = 0, \end{aligned}$$

où on a pris le conjugué à la quatrième ligne, puis multiplié par $\gamma^0 (C^\star)^{-1}$ à la ligne suivante. La matrice C doit donc satisfaire

$$-\gamma^0 (C^\star)^{-1} \gamma^\mu {}^\star C^\star \gamma^0 = \gamma^\mu . \quad (6.15)$$

On multiplie à gauche et à droite par γ^0 , remarque que $\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger}$, d'où

$$(C^\star)^{-1} \gamma^\mu {}^\star C^\star = -\gamma^{\mu\dagger} ,$$

ou encore

$$C^{-1} \gamma^\mu C = -\gamma^{\mu T} . \quad (6.16)$$

Propriétés

1. Tout d'abord, on montre facilement que la matrice C doit appartenir à l'algèbre de Clifford. En effet,

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \implies \gamma^{\nu T} \gamma^{\mu T} + \gamma^{\mu T} \gamma^{\nu T} = 2\eta^{\nu\mu} ,$$

et donc $\gamma^{\mu T} \in \text{Clifford}$. L'équation (6.16) montre alors que $C \in \text{Clifford}$. On doit donc pouvoir exprimer C comme une fonction des matrices de Dirac.

2. Prenons la transposée de l'éq. (6.16) : $C^T \gamma^{\mu T} C^{-1 T} = -\gamma^\mu$. Autrement dit,

$$\gamma^{\mu T} = -C^{-1 T} \gamma^\mu C^T ,$$

ce qui montre que $C^T = -C$. On montrerait de même que $C^\dagger = -C$.

3. Finalement,

$$CC^\dagger = C^\dagger C = \mathbb{I} \quad \text{et donc} \quad C^2 = -\mathbb{I} .$$

Dans la représentation de Weyl, il est aisé de vérifier par un calcul direct qu'un choix possible pour la matrice C est donné par

$$C = i\gamma^2 \gamma^0 . \quad (6.17)$$

Après que fut découverte la violation de la parité, on crut un temps que la combinaison charge-parité devait être une véritable symétrie. Il est apparu dans la désintégration du méson K^0 que tel n'est pas le cas. Autrement dit, il est possible de distinguer la matière de l'antimatière. Ceci dit, dans de nombreux cas, il peut être extrêmement utile d'utiliser les symétries discrètes, que ce soit pour construire des Lagrangiens, ou pour constater immédiatement que tel ou tel processus n'est simplement pas possible.

Tous les éléments sont maintenant en notre possession pour attaquer la seconde partie de ce cours : les Lagrangiens d'interaction et le Modèle Standard.

Deuxième partie

Champs en interaction

Note A partir d'ici, nous ne quitterons plus la théorie quantique. Les champs seront donc toujours des opérateurs de champ quantique, et nous nous permettrons donc de laisser tomber systématiquement le chapeau qui permettait jusqu'ici de bien distinguer l'univers quantique de la théorie classique.

Chapitre 7

Interactions et règles de Feynman

Dans cette deuxième partie, nous nous tournons vers la construction du Modèle Standard, utilisé depuis maintenant plus de 30 ans en physique des particules. Bien qu'il soit aujourd'hui évident qu'il nécessite un certain nombre de corrections ou d'ajouts, comme par exemple l'existence de neutrinos droitiers, il reste le modèle le plus fiable pour décrire la majeure partie des expériences en physique des hautes énergies.

Dans ce chapitre, nous commençons par décrire phénoménologiquement les différentes expériences qui permettent d'explorer le domaine de la physique des particules élémentaires. Ceci nous permettra d'introduire deux grandeurs fondamentales, la section efficace d'une collision et le temps de vie d'une particule. La description mathématique de ces observables se fait au moyen d'une matrice appelée *matrice* S , qui correspond à l'opérateur d'évolution en représentation de Dirac. Finalement, nous introduirons la diagrammatique de Feynman, qui n'est autre qu'une représentation graphique du développement de S en théorie des perturbations. Elle en simplifie considérablement l'évaluation.

7.1 Collisions

La grande partie des expériences en physique des hautes énergies se déroulent dans des accélérateurs de particules : on accélère des faisceaux de particules pour finalement leur faire subir des collisions à très haute énergie qui font apparaître leur structure intime. On n'entrera pas ici dans les détails techniques des différents types d'accélérateurs. Mentionnons simplement qu'il existe d'une part des expériences à *cible fixe*, où des particules à haute vitesse viennent heurter une cible au repos dans le laboratoire (où se situe le détecteur), et d'autre part les *collisionneurs* où deux faisceaux sont accélérés dans des directions opposées pour finalement venir s'écraser l'un contre l'autre. C'est à cette deuxième famille qu'appartiennent les derniers accélérateurs du CERN, le LEP et surtout le LHC (Large Hadron Collider), collisionneur proton-antiproton dont la mise en fonction est prévue pour 2007.

7.1.1 La section efficace

Pour décrire un tel type d'expérience, on introduit la *section efficace* σ , grandeur mesurable qui contient toute l'information concernant la collision.

Considérons une expérience à cible fixe. De manière équivalente, plaçons-nous dans le référentiel de repos d'un des deux faisceaux, il suffira de s'assurer que la formule que nous obtiendrons soit bien Lorentz-invariante. Prenons une certaine longueur l_B dans le faisceau de particules incidentes à vitesse v , et dont la section est S et la densité ρ_B . De même, soit l_T , la largeur de la cible,

de densité ρ_T , et de même section. On détecte alors n particules issues de la collision avec des impulsions $(p_i + dp_i)$, $i = 1, \dots, n$. Autrement dit, on considère un élément de volume infinitésimal dans l'espace de phase des particules produites par la collision. On définit alors la *section efficace différentielle* $d\sigma$ par :

$$dN = \left(\frac{d\sigma}{d^3p_1 \dots d^3p_n} \right) \rho_T l_T \rho_B l_B S d^3p_1 \dots d^3p_n. \quad (7.1)$$

Comme $\rho_B l_B S = N_B$, le nombre de particules dans le faisceau considéré, on peut écrire :

$$\left(\frac{dN}{N_B N_T} \right) = \frac{1}{S} \left(\frac{d\sigma}{\prod_{i=1}^n d^3p_i} \right) \prod_{i=1}^n d^3p_i. \quad (7.2)$$

La section efficace différentielle est donc le nombre relatif de particules détectées par unité de volume dans l'espace de phase des particules sortantes. Clairement, c'est aussi la probabilité de détecter les particules $1, \dots, n$ avec une certaine distribution de leurs impulsions.

Si pour une même collision, il y a M événements différents possibles, avec chacun n_j particules dans l'état final, on définit la section efficace totale par

$$\sigma = \sum_{j=1}^M \int \frac{d\sigma}{\prod_{i=1}^{n_j} d^3p_i} \prod_{i=1}^{n_j} d^3p_i. \quad (7.3)$$

Pour chacune de voies possibles, on intègre donc sur l'espace de phase, i.e. on ne s'intéresse pas à la distribution des impulsions, et finalement on somme sur tous les processus possibles. La section efficace totale a la dimension d'une aire. Une unité typique est le *barn* :

$$1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2.$$

Expérimentalement, on s'intéresse souvent à la *luminosité* L du détecteur, définie par

$$L\sigma = \text{nombre d'événements par unité de temps}.$$

Par exemple le LHC aura une luminosité d'environ $10^{34} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

7.2 Temps de vie

Une grandeur caractéristique des particules est leur temps de vie. Cette fois-ci, on considère un ensemble de N_A particules identiques dans un échantillon. Chaque particule se désintègre en n autres particules d'impulsions $(p_i + dp_i)$, $i = 1, \dots, n$. Le nombre d'événements observés par unité de temps sera alors

$$\frac{dN}{N_A} = \left(\frac{d\Gamma}{d^3p_1 \dots d^3p_n} \right) d^3p_1 \dots d^3p_n dt. \quad (7.4)$$

On peut alors intégrer sur les impulsions pour obtenir la *largeur partielle* Γ_P de la désintégration. Finalement, la *largeur totale* Γ est la somme des largeurs partielles de toutes les voies de désintégration possibles :

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{\tilde{M}} \Gamma_{Pj} = \sum_{j=1}^{\tilde{M}} \int \frac{d\Gamma}{\prod_{i=1}^{n_j} d^3p_i} \prod_{i=1}^{n_j} d^3p_i. \quad (7.5)$$

L'importance relative des différents processus de désintégration d'une même particule se traduit par leur *branching ratio* $\frac{\Gamma_P}{\Gamma}$, qui donne la probabilité d'une certaine désintégration parmi l'ensemble des processus possibles.

Exemple On considère la désintégration du muon, dont le temps de vie est $\tau = 2.19 \cdot 10^{-6} s$. Trois scénarii sont possibles, dont l'un est largement dominant, comme le montre ce tableau où on donne les différents branching ratios :

$$\begin{array}{ll} \mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu & \sim 1, \\ \mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu \gamma & 1.4 \cdot 10^{-2}, \\ \mu^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu e^- e^+ & 3.4 \cdot 10^{-5}. \end{array}$$

On définit pour terminer la *durée de vie* τ comme l'inverse de la largeur totale

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}, \quad (7.6)$$

et on vérifie bien que c'est une grandeur de dimension temps. Clairement, c'est le temps qu'il faut pour que la probabilité de désintégration atteigne e^{-1} .

7.3 La matrice S

7.3.1 Définition

Soit une théorie définie par un Hamiltonien \mathcal{H} , en représentation de Schrödinger, qu'on peut écrire

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I, \quad (7.7)$$

où \mathcal{H}_0 décrit l'évolution libre des champs et \mathcal{H}_I représente les différentes interactions possibles. On considère qu'aux temps $t = \pm\infty$, les particules n'interagissent pas, autrement dit que dans cette limite, les champs évoluent uniquement selon l'Hamiltonien libre. L'évolution des états est régie par l'équation de Schrödinger

$$-\frac{1}{i} \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial t} = \mathcal{H} \psi_\alpha,$$

dont la solution est donnée par

$$\psi_\alpha(t) = e^{-i\mathcal{H}t} \psi_\alpha(0),$$

où le temps $t = 0$ correspond au temps de la collision. L'indice α représente ici l'ensemble des nombres quantiques qui caractérisent un état. Ses éléments peuvent être continus ou discrets ; le plus souvent, on aura un mélange des deux. En particulier, il s'agira de l'impulsion, voire du spin, de la charge ou d'autres nombres quantiques significatifs en fonction des cas étudiés.

On définit alors les états *in* et *out*, $|\psi_\alpha^- \rangle$ et $|\psi_\alpha^+ \rangle$, comme les états asymptotiques lorsque $t \rightarrow \pm\infty$

$$|\psi_\alpha \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \pm\infty} e^{-i\mathcal{H}_0 t} |\psi_\alpha^\pm \rangle. \quad (7.8)$$

De manière équivalente :

$$|\psi_\alpha^\pm \rangle = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{i\mathcal{H}_0 t} e^{-i\mathcal{H}t} |\psi_\alpha(0) \rangle. \quad (7.9)$$

On cherche alors à calculer l'amplitude de probabilité de la transition entre un certain état *in* et un certain état *out* :

$$\langle \psi_\beta^+ | \psi_\alpha^- \rangle.$$

On définit alors la matrice S par l'égalité suivante :

$$|\psi_\alpha^+ \rangle = S |\psi_\alpha^- \rangle. \quad (7.10)$$

On trouve aisément l'expression explicite de l'opérateur S :

$$|\psi_\alpha^+\rangle = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t' \rightarrow -\infty}} e^{i\mathcal{H}_0 t} e^{-i\mathcal{H} t} e^{i\mathcal{H} t'} e^{-i\mathcal{H}_0 t'} |\psi_\alpha^-\rangle. \quad (7.11)$$

Ainsi,

$$S = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t' \rightarrow -\infty}} e^{i\mathcal{H}_0 t} e^{-i\mathcal{H}(t-t')} e^{-i\mathcal{H}_0 t'}. \quad (7.12)$$

Remarque Rappelons brièvement les trois représentations traditionnelles de la théorie quantique. Dans la représentation de Schrödinger, les observables sont constantes et l'évolution temporelle est portée par les états ; dans la représentation de Heisenberg, ce sont les états qui restent invariants alors que les observables varient avec l'évolution temporelle ; finalement, la représentation de Dirac, ou représentation d'interaction, est mixte : les observables portent l'évolution libre du système, alors que les états évoluent seulement selon la partie d'interaction de l'Hamiltonien. L'équation qui relie ces différentes représentations est alors

$$\langle \psi_S | O_S | \psi_S \rangle = \langle \psi_H | O_H | \psi_H \rangle = \langle \psi_D | O_D | \psi_D \rangle.$$

Si en représentation de Schrödinger, $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I$, alors

$$\langle \psi_S | e^{i(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I)(t-t')} O_S e^{-i(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I)(t-t')} | \psi_S \rangle,$$

et donc, en représentation d'interaction, on a

$$|\psi_D(t)\rangle = U_D(t, t') |\psi_D(t')\rangle, \quad (7.13)$$

$$O_D(t) = e^{i\mathcal{H}_0(t-t')} O_D(t') e^{-i\mathcal{H}_0(t-t')}, \quad (7.14)$$

où

$$U_D(t, t') = e^{i\mathcal{H}_0 t} e^{-i\mathcal{H} t} e^{i\mathcal{H} t'} e^{-i\mathcal{H}_0 t'}. \quad (7.15)$$

En comparant avec l'éq. (7.12), on a donc montré que la matrice S n'est autre que la limite de l'opérateur d'évolution en représentation d'interaction :

$$S = \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ t' \rightarrow -\infty}} U_D(t, t'). \quad (7.16)$$

Propriété

$$[\mathcal{H}_0, S] = 0, \quad (7.17)$$

$$[P_0, S] = 0. \quad (7.18)$$

La preuve est triviale. D'une part,

$$e^{i\mathcal{H}_0 \tau} S e^{-i\mathcal{H}_0 \tau} = S,$$

puisque dans le membre de gauche, il suffira de renommer les variables $\tilde{t} = t + \tau$ et $\hat{t} = t' + \tau$ pour retrouver l'expression de la matrice S .

D'autre part,

$$e^{iP_0 x} S e^{-iP_0 x} = S,$$

puisque $[P_0, \mathcal{H}_0] = 0$. Par les résultats élémentaires de mécanique quantique, on sait que ceci implique directement la conservation de l'énergie et de l'impulsion lors du processus.

Pour extraire de la matrice S sa partie intéressante, i.e. celle qui décrit uniquement l'interaction, on définit la matrice T par

$$S = \mathbb{I} + iT. \quad (7.19)$$

La partie \mathbb{I} correspond en effet à $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0$, i.e. au cas où l'interaction n'a pas lieu, ce qui ne nous intéresse pas ici. Finalement, on sait que le processus doit conserver le quadrvecteur quantité de mouvement. Considérons alors des états propres de l'opérateur quantité de mouvement libre P_0 , i.e. les états asymptotiques d'impulsion bien définie : l'état *out* $|q_1 \dots q_m\rangle$ et l'état *in* $|p_1 \dots p_n\rangle$. On définit l'élément de matrice $\mathcal{M}(in \rightarrow out) \in \mathbb{C}$ par

$$\langle q_1 \dots q_m | iT | p_1 \dots p_n \rangle = i(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_i q_i - \sum_j p_j \right) \mathcal{M}(in \rightarrow out). \quad (7.20)$$

On appelle souvent \mathcal{M} l'*amplitude de diffusion*, c'est la grandeur essentielle en physique des particules, qui permet le lien entre théorie et phénoménologie.

7.3.2 Matrice S et temps de vie

Dans cette partie, nous allons dériver la formule qui relie la largeur d'une particule à l'amplitude de diffusion, i.e. à la matrice S . Nous nous permettrons des calculs 'à la physicien', i.e. où la rigueur mathématique ne constitue pas le souci essentiel. On pourrait au prix d'efforts considérablement plus intenses y apporter la rigueur nécessaire.

Dans le cas d'une désintégration, l'état asymptotique initial est simplement $|p\rangle$. Calculons la probabilité de transition. On écrit¹

$$\text{Prob}(|p\rangle \rightarrow |q_1 \dots q_n\rangle) \sim |\langle q_1 \dots q_n | iT | p \rangle|^2 = (2\pi)^8 \delta^{(4)} \left(\sum_i q_i - p \right) \delta^{(4)}(0) |\mathcal{M}|^2. \quad (7.21)$$

Mais

$$\delta^{(4)}(k) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{ikx} \rightsquigarrow \delta^{(4)}(0) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} = \frac{V \cdot T}{(2\pi)^4},$$

si l'on était dans un volume V et un intervalle de temps T fini. De plus, on cherche un état initial normé :

$$\langle 0 | a(p) a^\dagger(p) | 0 \rangle = (2\pi)^3 2\varepsilon_{\vec{p}} \delta^{(3)}(0) = (2\pi)^3 2\varepsilon_{\vec{p}} \frac{V}{(2\pi)^3} = 2\varepsilon_{\vec{p}} V.$$

Donc $|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2V\varepsilon_{\vec{p}}}} a^\dagger(p) | 0 \rangle$. Finalement, on introduit l'élément de volume dans l'espace de phase des particules sortantes

$$d\Phi = \prod_{i=1}^n \frac{d^3q_i}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{q_i}}, \quad (7.22)$$

C'est l'élément de volume invariant par rapport au groupe de Lorentz. On peut alors écrire la probabilité comme

$$\text{Prob}(|p\rangle \rightarrow |q_1 \dots q_n\rangle) = \frac{1}{2\varepsilon_{\vec{p}} V} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_i q_i - p \right) |\mathcal{M}|^2 V T d\Phi. \quad (7.23)$$

¹Rappelons que $[\delta(x)]^2 \equiv \delta(x)\delta(0)$.

Finalement, la largeur différentielle est donnée par $d\Gamma = \frac{\text{Prob}(|p\rangle \rightarrow |q_1 \dots q_n\rangle)}{T}$:

$$d\Gamma = \frac{1}{2\varepsilon_{\vec{p}}}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum_i q_i - p\right)|\mathcal{M}|^2 d\Phi, \quad (7.24)$$

ou encore, dans le référentiel de repos de la particule de masse M ,

$$d\Gamma = \frac{1}{2M}(2\pi)^4\delta^{(4)}\left(\sum_i q_i - p\right)|\mathcal{M}|^2 \left(\prod_{i=1}^n \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{q_i}}\right). \quad (7.25)$$

C'est la formule que nous cherchions à obtenir. Une fois que la théorie sous-jacente au processus a fourni l'amplitude de diffusion, on connaît la durée de vie d'une particule, qui peut alors être mesurée et le résultat confronté aux prédictions théoriques.

Dimensions : $[d\Gamma] = GeV^1$, $[\delta^{(4)}(k)] = GeV^{-4}$, $[d\Phi] = GeV^{2n}$, d'où $[\mathcal{M}] = GeV^{3-n}$, ou encore

$$[\mathcal{M}] = GeV^{4-N}, \quad \text{où } N = \text{nombre de particules impliquées dans le processus}.$$

Ce dernier résultat étant valable quel que soit le type de processus considéré, bien évidemment.

7.3.3 Matrice S et section efficace

On cherche maintenant à établir le même type de résultat pour une collision de deux particules. La démarche est semblable à ce que nous avons fait dans la section précédente, mais avec deux normalisations puisque l'état initial contient deux particules. On peut directement écrire l'équivalent de l'éq. (7.23) :

$$\text{Prob}(|p_1 p_2\rangle \rightarrow |q_1 \dots q_n\rangle) = \frac{1}{2\varepsilon_{p_1} V} \frac{1}{2\varepsilon_{p_2} V} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_i q_i - \sum_j p_j\right) |\mathcal{M}|^2 VT d\Phi. \quad (7.26)$$

Plaçons-nous alors dans le référentiel de repos de la particule 2. En reprenant les notations du début de ce chapitre, on a ici $N_B = N_T = 1$, d'où $\rho_B l_B S = \rho_T l_T S = 1$. Alors $\rho_B = \frac{1}{V}$. Par ailleurs, si v est la vitesse de la particule incidente, $l_B = vT$. Ainsi, $\rho_B l_B = \frac{1}{V} vT$, d'où

$$\frac{T}{V} = \frac{\rho_B l_B}{v}.$$

On substitue ceci dans la probabilité :

$$\text{Prob}(|p_1 p_2\rangle \rightarrow |q_1 \dots q_n\rangle) = \frac{\rho_B l_B}{4v\varepsilon_{p_1} M_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_i q_i - \sum_j p_j\right) |\mathcal{M}|^2 d\Phi. \quad (7.27)$$

Pour traiter un cas tout à fait général, on définit la section efficace comme la probabilité de la transition par unité de flux de particules incidentes. Ainsi,

$$d\sigma = \frac{1}{4v\varepsilon_{p_1} M_2} (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_i q_i - \sum_j p_j\right) |\mathcal{M}|^2 d\Phi. \quad (7.28)$$

Finalement, on cherche une expression générale, qui soit valable dans tout référentiel. Il faut donc trouver la fonction $I = I(p_1, p_2, M_1, M_2)$, Lorentz invariante, qui se réduise à $4v\varepsilon_{p_1} M_2$ dans le référentiel de repos de la cible. La fonction I ne peut dépendre que des scalaires

$$p_1^2 = M_1^2, \quad p_2^2 = M_2^2, \quad p_1 p_2 \stackrel{labo}{=} \varepsilon_{p_1} M_2.$$

On commence par noter que $v = \frac{|\vec{p}_1|}{\varepsilon_{p_1}}$. Le dénominateur de (7.28) est donc $4|\vec{p}_1|M_2 = 4\sqrt{-M_1^2 + \varepsilon_{p_1}^2}M_2$. On voit alors clairement que l'expression invariante est simplement

$$4I = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}, \quad (7.29)$$

d'où finalement la section efficace Lorentz invariante :

$$d\sigma = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - M_1^2 M_2^2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_i q_i - \sum_j p_j \right) |\mathcal{M}|^2 \left(\prod_{i=1}^n \frac{d^3 q_i}{(2\pi)^3 2\varepsilon_{q_i}} \right). \quad (7.30)$$

7.4 La matrice S en théorie de perturbation

Nous sommes maintenant confrontés à un problème habituel en théorie quantique. Nous avons facilement pu exhiber une expression formelle pour la matrice S à l'aide d'exponentielles de l'Hamiltonien. En pratique cependant, il est bien clair qu'une telle exponentielle n'est pas calculable, et on doit alors avoir recours à des méthodes perturbatives.

Définition Soit $S(n)$, le groupe des permutations de $\{1 \dots n\}$. On appelle *produit chronologique* des opérateurs $O(t_1), \dots, O(t_n)$ l'expression

$$T[O(t_1) \dots O(t_n)] = \sum_{\pi \in S(n)} (\nu)^\pi \theta(t_{\pi(1)} - t_{\pi(2)}) \dots \theta(t_{\pi(n-1)} - t_{\pi(n)}) O(t_{\pi(1)}) \dots O(t_{\pi(n)}), \quad (7.31)$$

où les θ sont des fonctions saut de Heaviside,

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}.$$

et où $\nu = 1$ pour des opérateurs bosoniques, $\nu = -1$ pour des opérateurs de types fermioniques. On comprend facilement la dénomination de ce produit particulier. En effet, le seul terme non nul de la somme est celui où les arguments des opérateurs sont ordonnés en ordre croissant depuis la droite, i.e. tels que $t_{\pi(1)} > t_{\pi(2)} > \dots > t_{\pi(n)}$.

7.4.1 La série de Dyson

Afin d'établir une formule effectivement utilisable en pratique, commençons par identifier l'équation différentielle d'évolution de l'opérateur $U_D(t, t') = \exp(i\mathcal{H}_0 t) \exp(-i\mathcal{H} t) \exp(i\mathcal{H} t') \exp(-i\mathcal{H}_0 t')$. On a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U_D(t, t') &= i\mathcal{H}_0 U_D(t, t') - \exp(i\mathcal{H}_0 t) (i\mathcal{H}) \exp(-i\mathcal{H} t) \exp(i\mathcal{H} t') \exp(-i\mathcal{H}_0 t') \\ &= -i \exp(i\mathcal{H}_0 t) (\mathcal{H} - \mathcal{H}_0) \exp(-i\mathcal{H}_0 t) U_D(t, t') \\ &= -i\mathcal{H}_I^{(D)}(t) U_D(t, t'), \end{aligned}$$

où on dénote par $\mathcal{H}_I^{(D)}(t)$ l'Hamiltonien d'interaction en représentation de Dirac. On a ainsi obtenu une équation différentielle du premier ordre pour l'opérateur d'évolution en représentation d'interaction :

$$\begin{cases} i \frac{d}{dt} U_D(t, t') = \mathcal{H}_I^{(D)}(t) U_D(t, t'), \\ U_D(t', t') = \mathbb{I}. \end{cases} \quad (7.32)$$

Formellement, on trouve directement l'équation intégrale équivalente :

$$U_D(t, t') = \mathbb{I} - i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{H}_I^{(D)}(\tau) U_D(\tau, t'). \quad (7.33)$$

En pratique, l'Hamiltonien d'interaction sera de la forme $\mathcal{H}_I = \lambda V$, où λ est une constante de couplage associée à l'interaction que l'on considère. Si cette dernière est suffisamment petite, $|\lambda| \ll 1$, on pourra résoudre l'éq. (7.33) perturbativement, ce qui produira une série en puissance de la constante de couplage, dont on pourra raisonnablement espérer qu'elle admette un domaine de convergence non dégénéré. Autrement dit, on considérera l'interaction comme une perturbation de l'Hamiltonien libre.

La solution non perturbée est naturellement $U_0(\tau, t') = \mathbb{I}$. On injecte cette solution dans l'équation pour trouver la solution au deuxième ordre, qu'on injectera à nouveau pour obtenir le troisième, et ainsi de suite pour les ordres supérieurs :

$$\begin{aligned} U_1(t, t') &= \mathbb{I} - i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{H}_I(\tau) U_0(\tau, t') = \mathbb{I} - i \int_{t'}^t d\tau \mathcal{H}_I(\tau), \\ U_2(t, t') &= \mathbb{I} - i \int_{t'}^t d\tau_1 \mathcal{H}_I(\tau_1) U_1(\tau_1, t') = \mathbb{I} - i \int_{t'}^t d\tau_1 \mathcal{H}_I(\tau_1) \left[\mathbb{I} - i \int_{t'}^{\tau_1} d\tau_2 \mathcal{H}_I(\tau_2) \right] \\ &= \mathbb{I} - i \int_{t'}^t d\tau_1 \mathcal{H}_I(\tau_1) + (-i)^2 \int_{t'}^t d\tau_1 \int_{t'}^{\tau_1} d\tau_2 \mathcal{H}_I(\tau_1) \mathcal{H}_I(\tau_2) \\ U_3(t, t') &= \mathbb{I} - i \int_{t'}^t d\tau_1 \mathcal{H}_I(\tau_1) \left[\mathbb{I} - i \int_{t'}^{\tau_1} d\tau_2 \mathcal{H}_I(\tau_2) + (-i)^2 \int_{t'}^{\tau_1} d\tau_2 \int_{t'}^{\tau_2} d\tau_3 \mathcal{H}_I(\tau_2) \mathcal{H}_I(\tau_3) \right] \\ &= \mathbb{I} - i \int_{t'}^t d\tau_1 \mathcal{H}_I(\tau_1) + (-i)^2 \int_{t'}^t d\tau_1 \int_{t'}^{\tau_1} d\tau_2 \mathcal{H}_I(\tau_1) \mathcal{H}_I(\tau_2) \\ &\quad + (-i)^3 \int_{t'}^t d\tau_1 \int_{t'}^{\tau_1} d\tau_2 \int_{t'}^{\tau_2} d\tau_3 \mathcal{H}_I(\tau_1) \mathcal{H}_I(\tau_2) \mathcal{H}_I(\tau_3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Finalement, on trouve donc la *série de Dyson* pour l'opérateur d'évolution,

$$U_n(t, t') = \mathbb{I} + \sum_{j=1}^n (-i)^j \int_{t'}^t d\tau_1 \int_{t'}^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_{t'}^{\tau_{j-1}} d\tau_j \mathcal{H}_I(\tau_1) \cdots \mathcal{H}_I(\tau_j). \quad (7.34)$$

On peut réécrire les intégrales qui apparaissent ici en introduisant des fonctions θ qui permettent d'avoir les mêmes bornes d'intégration partout :

$$\int_{t'}^t d\tau_1 \cdots \int_{t'}^t d\tau_j \theta(\tau_1 - \tau_2) \cdots \theta(\tau_{j-1} - \tau_j) \mathcal{H}_I(\tau_1) \cdots \mathcal{H}_I(\tau_j).$$

Mais les indices d'intégration sont muets, on a donc $j!$ manières différentes d'écrire cette même intégrale, en effectuant toutes les permutations possibles de indices 1 à j . Elle est donc égale à

$$\frac{1}{j!} \int_{t'}^t d\tau_1 \cdots \int_{t'}^t d\tau_j \sum_{\pi \in S(j)} \theta(\tau_{\pi(1)} - \tau_{\pi(2)}) \cdots \theta(\tau_{\pi(j-1)} - \tau_{\pi(j)}) \mathcal{H}_I(\tau_{\pi(1)}) \cdots \mathcal{H}_I(\tau_{\pi(j)}).$$

On a ainsi fait apparaître un produit chronologique, et on peut donc simplement écrire

$$U_n(t, t') = \mathbb{I} + \sum_{j=1}^n \frac{(-i)^j}{j!} \int_{t'}^t d\tau_1 \cdots \int_{t'}^t d\tau_j T[\mathcal{H}_I(\tau_1) \cdots \mathcal{H}_I(\tau_j)]. \quad (7.35)$$

Si cette série admet un rayon de convergence non nul, on peut passer à la limite $n \rightarrow \infty$. Finalement, on se souvient que la matrice S est la limite de cet opérateur à $+\infty$ et $-\infty$, d'où le résultat important suivant :

$$S = \mathbb{I} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-i)^j}{j!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\tau_1 \cdots d\tau_j T [\mathcal{H}_I(\tau_1) \cdots \mathcal{H}_I(\tau_j)] . \quad (7.36)$$

On reconnaît la forme d'un développement en série d'une exponentielle, mais avec le produit chronologique en sus. On notera souvent symboliquement

$$S = T \left[\exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{H}_I(t) \right) \right] . \quad (7.37)$$

Nous avons ainsi dérivé une formule explicite pour S , dont il sera toujours possible de ne garder que les premiers termes si nécessaire. Il s'avère en fait que la majeure partie des calculs de ce cours se limiteront au premier ordre. Non seulement la complexité calculatoire croît-elle de manière très rapide avec les ordres perturbatifs, mais des problèmes conceptuels importants surgissent aussi, que ce soit simplement le problème de la convergence de la série ou alors le fait que certains termes apportent une contribution infinie.

7.4.2 Exemple : la désintégration du boson de Higgs

Avant de passer à la suite des développements théoriques, nous allons mettre en pratique la formule (7.37) et calculer la largeur (partielle) du boson de Higgs. Nous allons étudier la désintégration du boson H en une paire électron-positron

$$H \rightarrow e^+ e^- .$$

La densité lagrangienne qui régit ce processus est donnée par

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m_H^2 \phi^2}_{\text{champ scalaire libre}} + \underbrace{i \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m_e \bar{\Psi} \Psi}_{\text{champ spinoriel libre}} + \underbrace{f \bar{\Psi} \Psi \phi}_{\text{interaction}} . \quad (7.38)$$

C'est le dernier terme, nouveau terme mixte, qui permet le couplage du boson scalaire ϕ , le Higgs, avec le spineur Ψ , la paire électron-positron. On a donc

$$\mathcal{H}_I = -\mathcal{L}_I = -f \bar{\Psi} \Psi \phi , \quad (7.39)$$

et on remarque qu'il est directement écrit en représentation d'interaction, puisque nous utiliserons les expressions des champs Ψ et ϕ en représentation de Heisenberg par rapport à l'évolution libre.

On définit les états asymptotiques suivants :

- L'état *in* : $\mathfrak{a}^\dagger(\vec{k})|0\rangle$;
- L'état *out* : $a_\sigma^\dagger(\vec{p}) b_{\sigma'}^\dagger(\vec{q})|0\rangle$.

Pour calculer le temps de vie, nous aurons besoin de l'amplitude \mathcal{M} , et donc de l'élément de matrice S suivant

$$\langle 0 | a_\sigma(\vec{p}) b_{\sigma'}(\vec{q}) S \mathfrak{a}^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle . \quad (7.40)$$

Le paramètre important pour le calcul perturbatif est la constante de couplage f , que nous supposons suffisamment petite pour que la suite ait un sens. Au premier ordre, l'éq. (7.37) devient

$$S = T \left[\exp \left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \mathcal{H}_I(t) \right) \right] \approx \mathbb{I} + i \int d^4x f \bar{\Psi} \Psi \phi . \quad (7.41)$$

Le premier terme produira simplement une fonction δ que nous ne considérerons pas puisqu'elle représente le cas où aucune interaction n'a lieu. Il faudra donc calculer

$$\langle 0 | a_\sigma(\vec{p}) b_{\sigma'}(\vec{q}) \left\{ i \int d^4x f \bar{\Psi} \Psi \phi \right\} \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle = i f \int d^4x \langle 0 | a_\sigma(\vec{p}) b_{\sigma'}(\vec{q}) \bar{\Psi} \Psi \phi \mathbf{a}^\dagger(\vec{k}) | 0 \rangle, \quad (7.42)$$

qu'on notera simplement I . Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= i f \int d^4x \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k_1)} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k_2)} \int \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k_3)} \sum_{\rho, \rho'} \\ &\quad \langle 0 | a_\sigma(p) b_{\sigma'}(q) \left[a_\rho^\dagger(k_1) \bar{u}_\rho(k_1) e^{ik_1x} + b_\rho(k_1) \bar{v}_\rho(k_1) e^{-ik_1x} \right] \\ &\quad \times \left[a_{\rho'}(k_2) u_{\rho'}(k_2) e^{-ik_2x} + b_{\rho'}^\dagger(k_2) v_{\rho'}(k_2) e^{ik_2x} \right] \\ &\quad \times \left[\mathbf{a}(k_3) e^{-ik_3x} + \mathbf{a}^\dagger(k_3) e^{ik_3x} \right] \mathbf{a}^\dagger(k) | 0 \rangle \\ &= i f \int d^4x \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k_1)} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k_2)} \int \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k_3)} \sum_{\rho, \rho'} \\ &\quad e^{ix(k_1+k_2-k_3)} \bar{u}_\rho(k_1) v_{\rho'}(k_2) \langle 0 | a_\sigma(p) a_\rho^\dagger(k_1) b_{\sigma'}(q) b_{\rho'}^\dagger(k_2) \mathbf{a}(k_3) \mathbf{a}^\dagger(k) | 0 \rangle \\ &= i f \int d^4x e^{ix(p+q-k)} \bar{u}_\sigma(p) v_{\sigma'}(q) \\ &= i f \bar{u}_\sigma(p) v_{\sigma'}(q) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+q-k), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que les opérateurs de type différents commutent pour ne garder qu'un seul des termes du produit, puis les relations de commutation pour exprimer la valeur moyenne sur l'état du vide, qui produisent des fonctions δ pour les impulsions et les indices de spin. Finalement,

$$\mathcal{M}(in \rightarrow out) = f \bar{u}_\sigma(p) v_{\sigma'}(q). \quad (7.43)$$

On peut maintenant insérer ce résultat dans l'éq. (7.25),

$$d\Gamma = \frac{1}{2m_H} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+q-k) f^2 \bar{u}_\sigma(p) v_{\sigma'}(q) \bar{v}_{\sigma'}(q) u_\sigma(p) \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\varepsilon_p} \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\varepsilon_q}. \quad (7.44)$$

On ne mesure en général pas le spin des particules sortantes. On peut donc sommer sur σ et σ' . On se convainc facilement (en écrivant explicitement les spineurs en composantes si nécessaire) que

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma, \sigma'} \bar{u}_\sigma(p) v_{\sigma'}(q) \bar{v}_{\sigma'}(q) u_\sigma(p) &= \sum_{\sigma, \sigma'} \text{Tr} [v_{\sigma'}(q) \bar{v}_{\sigma'}(q) u_\sigma(p) \bar{u}_\sigma(p)] \\ &= \text{Tr} \left[\sum_{\sigma'} v_{\sigma'}(q) \bar{v}_{\sigma'}(q) \sum_{\sigma} u_\sigma(p) \bar{u}_\sigma(p) \right] \\ &= \text{Tr} [\not{q} - m_e] (\not{p} + m_e) = \text{Tr} [p_\mu q_\nu \gamma^\mu \gamma^\nu - m_e \not{p} + m_e \not{q} - m_e^2] = 4p \cdot q - 4m_e^2, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0$, $\text{Tr}[\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4\eta^{\mu\nu}$ et $\text{Tr}[\mathbb{I}] = 4$. D'où

$$\Gamma = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\varepsilon_p} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3 2\varepsilon_q} \frac{f^2}{2m_H} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+q-k) (4p \cdot q - 4m_e^2). \quad (7.45)$$

Comme le Higgs est au repos, la fonction δ donne $\vec{p} + \vec{q} = 0$ et $m_H = 2\sqrt{|\vec{p}|^2 + m_e^2}$, on peut donc effectuer directement trois des six intégrales nécessaires par exemple sur d^3q , et il reste

$$\delta(m_H - 2\varepsilon(\vec{p})) = \frac{1}{4|\vec{p}|/m_H} \delta \left(|\vec{p}| - \frac{m_H}{2} \sqrt{1 - \left(2 \frac{m_e}{m_H} \right)^2} \right).$$

De plus,

$$(p + q)^2 = k^2 = m_H^2 \quad \text{mais aussi} \quad (p + q)^2 = 2m_e^2 + 2p \cdot q,$$

d'où $p \cdot q = \frac{1}{2} (m_H^2 - 2m_e^2)$, et

$$4p \cdot q - 4m_e^2 = 2(m_H^2 - 2m_e^2) - 4m_e^2 = 2m_H^2 \left(1 - 4\frac{m_e^2}{m_H^2}\right).$$

En réinsérant tous ces résultats dans l'éq. (7.45), on trouve

$$\begin{aligned} \Gamma &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 m_H} \frac{1}{(2\pi)^3 m_H} \frac{f^2}{2m_H} (2\pi)^4 2m_H^2 \left(1 - 4\frac{m_e^2}{m_H^2}\right) \frac{m_H}{4|\vec{p}|} \delta\left(|\vec{p}| - \frac{m_H}{2} \sqrt{1 - \left(2\frac{m_e}{m_H}\right)^2}\right) \\ &= \int d\Omega \frac{f^2}{4(2\pi)^2} \left(1 - 4\frac{m_e^2}{m_H^2}\right) \left(\frac{m_H}{2} \sqrt{1 - \left(2\frac{m_e}{m_H}\right)^2}\right), \end{aligned}$$

où on a passé en coordonnées sphériques $d^3p = |\vec{p}|^2 d\Omega$ et intégré sur $|\vec{p}|$ pour obtenir la deuxième égalité. Il ne reste plus qu'à effectuer l'intégrale sur l'angle solide, ce qui donne simplement un facteur 4π supplémentaire :

$$\Gamma = \frac{f^2}{8\pi} \left(1 - 4\frac{m_e^2}{m_H^2}\right)^{\frac{3}{2}} m_H. \quad (7.46)$$

Il est clair d'un point de vue physique (conservation de l'énergie) qu'on doit avoir $m_H > 2m_e$. On retrouve ici cette condition sous forme mathématique. Si la masse du boson de Higgs est beaucoup plus grande que celle de l'électron, on aura donc

$$\tau \approx \frac{8\pi}{f^2 m_H}. \quad (7.47)$$

Le temps de vie est inversement proportionnel à la masse de la particule et au carré de la constante de couplage.

7.5 Les règles de Feynman

Nous venons de résoudre un problème simple, une désintégration au premier ordre. Malgré le fait que nous ayons choisi là l'un des calculs les plus aisés, il s'est déjà avéré passablement long. La complexité calculatoire ne ferait que croître avec d'autres théories et aux ordres supérieurs. Certains éléments réapparaissent cependant de manière tout à fait générique lors de tels calculs : réarrangements des opérateurs de création et d'annihilation, intégrations et fonctions δ , entre autres. Les règles de Feynman sont précisément une manière d'automatiser certaines procédures, et ainsi de réduire le temps et l'effort nécessaires au calcul.

7.5.1 Produit normal et théorèmes de Wick

Introduisons tout d'abord quelques outils qui vont nous être utiles par la suite. Tous les champs que nous avons construits jusqu'à présent ont pu être décomposés selon la forme

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x), \quad (7.48)$$

où

$$\begin{aligned}\phi^+(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} e^{ikx} a_k^\dagger, \\ \phi^-(x) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} e^{-ikx} a_k,\end{aligned}$$

une décomposition qui serait aussi valable pour les autres types de champs, moyennant les ajouts nécessaires. On a donc une partie à fréquence positive qui ne contient que des opérateurs de création, et une partie à fréquence négative qui rassemble les annihilateurs. Une telle décomposition n'est en fait qu'un cas particulier du théorème plus général suivant, que nous n'allons pas démontrer mais qui est tout à fait intuitif.

Théorème Tout opérateur O s'exprime comme la somme de produits d'opérateurs de création et d'annihilation :

$$O = \sum_{N=1}^{\infty} \sum_{M=1}^{\infty} \int dp_1 \cdots dp_N dq_1 \cdots dq_M (C_{NM}(q_i, p_j) a_{p_1}^\dagger \cdots a_{p_N}^\dagger a_{q_M} \cdots a_{q_1}), \quad (7.49)$$

où $C_{NM}(q_i, p_j) \in \mathbb{C}$.

Définition On appelle *produit normal* des opérateurs O_1, \dots, O_n , et on le note : $O_1 \cdots O_n :$ le produit où tous les opérateurs de création sont arrangés à gauche des opérateurs d'annihilation. Prenons l'exemple simple de deux champs ϕ_1 et ϕ_2 :

$$:\phi_1 \phi_2: = \phi_1^+ \phi_2^+ + \phi_1^+ \phi_2^- + \phi_2^+ \phi_1^- + \phi_1^- \phi_2^-. \quad (7.50)$$

Par le théorème précédent, un tel produit peut être défini pour n'importe quel ensemble d'opérateurs de types quelconques.

On a immédiatement les propriétés importantes suivantes :

$$i. \quad :O_1 \cdots O_n: = :O_{\pi(1)} \cdots O_{\pi(n)}: \quad \forall \pi \in S(n); \quad (7.51)$$

$$ii. \quad \langle 0 | :O_1 \cdots O_n: | 0 \rangle = 0. \quad (7.52)$$

En effet, les opérateurs de création commutent entre eux, de même que les annihilateurs, seul compte donc l'ordre relatif des créateurs par rapport aux annihilateurs, et c'est précisément ce qui est fixé par le produit normal, d'où la première égalité. La seconde propriété est triviale mais essentielle pour la suite.

Définition

1. On définit la *contraction* de deux opérateurs O_1 et O_2 , notée $O_1 O_2$, comme la valeur moyenne de ces opérateurs dans l'état du vide :

$$O_1 O_2 = \langle 0 | O_1 O_2 | 0 \rangle \mathbb{I}. \quad (7.53)$$

2. De même, la *contraction chronologique* $\overline{O_1 O_2}$ est définie comme la valeur moyenne du produit chronologique :

$$\overline{O_1 O_2} = \langle 0 | T [O_1 O_2] | 0 \rangle \mathbb{I}. \quad (7.54)$$

Finalement, on définit les contractions à l'intérieur d'un produit normal par

$$: O_1 \cdots O_{i-1} \underbrace{O_i O_{i+1} \cdots O_{j-1} O_j O_{j+1} \cdots O_n} := (\nu)^\pi \underbrace{O_i O_j} : O_1 \cdots O_{i-1} O_{i+1} \cdots O_{j-1} O_{j+1} \cdots O_n :, \quad (7.55)$$

où $\nu = +1$ pour des opérateurs bosoniques, $\nu = -1$ s'ils sont de type fermionique, et π est la permutation qui amène $(1, \dots, i, \dots, j, \dots, n)$ sur $(i, j, 1, \dots, n)$.

Considérons maintenant des champs ϕ^+ et ϕ^- . Alors on a aussi que

$$\underbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)} = [\phi^-(x_1), \phi^+(x_2)] . \quad (7.56)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \underbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)} &= \langle 0 | \phi^-(x_1) \phi^+(x_2) | 0 \rangle \mathbb{I} = \langle 0 | [\phi^-(x_1), \phi^+(x_2)] | 0 \rangle = [\phi^-(x_1), \phi^+(x_2)] \langle 0 | 0 \rangle \\ &= [\phi^-(x_1), \phi^+(x_2)] \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant prêts à prouver les théorèmes de Wick.

Théorème (Wick I)

$$T[\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)] = : \{ \phi(x_1) \cdots \phi(x_n) + (\text{toutes contractions chronologiques possibles}) \} : . \quad (7.57)$$

La preuve de ce théorème se fait par induction. Pour $n = 2$, supposons sans perte de généralité que $x_1^0 > x_2^0$. On a naturellement

$$\begin{aligned} T[\phi(x_1)\phi(x_2)] &= \phi^+(x_1)\phi^+(x_2) + \phi^+(x_1)\phi^-(x_2) + \phi^-(x_1)\phi^+(x_2) + \phi^-(x_1)\phi^-(x_2) \\ &= \phi^+(x_1)\phi^+(x_2) + \phi^+(x_1)\phi^-(x_2) + \phi^-(x_1)\phi^-(x_2) \\ &\quad + \phi^+(x_2)\phi^-(x_1) + [\phi^-(x_1), \phi^+(x_2)] \\ &=: \phi(x_1)\phi(x_2) : + \underbrace{\phi(x_1)\phi(x_2)} . \end{aligned}$$

Supposons maintenant que le théorème est vrai pour $n - 1$; en écrivant $\phi_i = \phi(x_i)$ et en supposant sans perte de généralité que $x_1^0 > \dots > x_n^0$, on peut successivement écrire :

$$\begin{aligned} T[\phi_1 \cdots \phi_m] &= \phi_1 \cdots \phi_m \\ &= \phi_1 : \{ \phi_2 \cdots \phi_m + (\text{toutes contractions chronologiques possibles sans } \phi_1) \} : \\ &= (\phi_1^+ + \phi_1^-) : \{ \phi_2 \cdots \phi_m + (\text{toutes contractions chronologiques possibles sans } \phi_1) \} : . \end{aligned}$$

Il s'agit alors de faire passer ϕ_1^\pm dans le produit normal. On peut directement le faire pour ϕ_1^+ , puisque il est alors tout à gauche, ce qui correspond à l'ordre normal. Quant à la partie à fréquences négatives, il suffit de la faire commuter au travers des $n-1$ termes à fréquences positives. Considérons pour commencer le terme sans contraction :

$$\begin{aligned} \phi_1^- : \phi_2 \cdots \phi_m : &=: \phi_2 \cdots \phi_m : \phi_1^- + [\phi_1^-, : \phi_2 \cdots \phi_m :] \\ &=: \phi_1^- \cdots \phi_m : + : [\phi_1^-, \phi_2^+] \phi_3 \cdots \phi_m : + : \phi_2 [\phi_1^-, \phi_3^+] \phi_4 \cdots \phi_m : + \cdots \\ &=: \phi_1^- \phi_2 \cdots \phi_m : + : \underbrace{\phi_1^- \phi_2 \phi_3 \cdots \phi_m} : + : \underbrace{\phi_1^- \phi_2 \phi_3 \cdots} : + \cdots . \end{aligned}$$

On recombine alors le premier terme de la dernière ligne avec le terme équivalent qui contient ϕ_1^+ pour reformer : $\phi_1 \cdots \phi_m$. Le reste de la ligne contient toutes les produits normaux où ϕ_1 est contracté avec un autre champ. En partant des autres termes qui contiennent déjà une ou plusieurs contractions, et en effectuant comme dans ce cas-ci les commutations nécessaires, on produira les produits normaux qui contiennent deux ou plus de contractions dont une avec ϕ_1 . On obtient finalement toutes les contractions possibles, y compris avec ϕ_1 . On a ainsi démontré le théorème. ♦

Le théorème de Wick établit le lien entre produit chronologique, qui apparaît dans la matrice S , et produit normal, plus utile dans les calculs. Il permet de décrire un produit chronologique comme une somme de produit normaux, plus ou moins contractés.

Théorème (Wick II)

$$\phi_1 \cdots \phi_n = : \{ \phi_1 \cdots \phi_n + (\text{toutes contractions 'normales' possibles}) \} : . \quad (7.58)$$

La démonstration est laissée en exercice.

On voit déjà l'utilité de ces théorème dans le cadre qui nous intéresse. L'évaluation de la matrice S se ramène toujours à des produits chronologiques d'opérateurs de champs, d'annihilateurs et de créateurs, dont on prend la valeur moyenne sur l'état du vide. En appliquant les théorèmes de Wick, on pourra transformer ces produits en une somme de produits normaux avec plus ou moins de contractions. Mais tout produit normal est nul sur $|0\rangle$. Les seuls termes non nuls de la somme seront donc ceux qui sont complètement contractés, i.e. où il ne reste plus aucun opérateur isolé. Grâce au théorème de Wick, on pourra donc facilement évaluer des produits chronologiques compliqués.

7.5.2 Règles de Feynman : concept

Le théorème de Wick établi, nous pouvons maintenant facilement déduire les fameuses règles de Feynman pour n'importe quel Lagrangien. L'idée générale de Feynman est simplement l'observation qu'un grand nombre d'opérations qui apparaissent lors de l'évaluation de l'élément de matrice \mathcal{M} peuvent être automatisées. On introduit alors une diagrammatique dont chaque élément représente une opération mathématique, par exemple un certain type de contraction, et qu'on peut calculer une fois pour toutes. Il suffit alors de construire tous les diagrammes possibles pour un processus particulier, leur associer à chacun un résultat immédiatement calculable et déduire ainsi aisément l'amplitude \mathcal{M} .

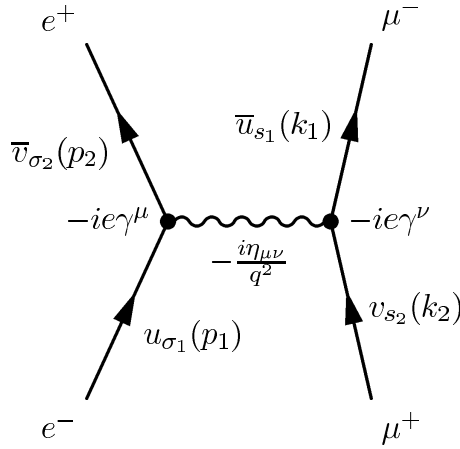
Il existe dans les diagrammes de Feynman trois types d'éléments, dont nous verrons dans la section suivante à quoi ils correspondent :

1. les lignes externes ;
2. les lignes internes ou propagateurs ;
3. les *vertex*.

Nous donnons à la figure 7.1 un exemple complet de diagramme de Feynman simple, ici en électrodynamique quantique, dont l'amplitude de diffusion s'écrit directement

$$\mathcal{M} = \bar{u}_{s_1}(k_1) (-ie\gamma^\nu) v_{s_2}(k_2) \left(-\frac{i\eta_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{v}_{\sigma_2}(p_2) (-ie\gamma^\mu) u_{\sigma_1}(p_1) . \quad (7.59)$$

On voit immédiatement la simplicité et la puissance de cette méthode.

FIG. 7.1 – Le diagramme de Feynman au plus bas ordre pour le processus $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$.

7.5.3 Règles de Feynman pour la théorie $\lambda\phi^4$

Nous établissons ici les règles de Feynman pour une théorie simple :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (7.60)$$

Le lecteur pourra alors à titre d'exercice choisir d'autres densités lagrangiennes et calculer les éléments de la diagrammatique de Feynman correspondante.

Dans la théorie $\lambda\phi^4$, l'élément de matrice le plus général qui puisse apparaître à l'ordre l est de la forme

$$\frac{1}{l!} \int d^4 x_1 \cdots d^4 x_l (-i \frac{\lambda}{4!})^l \langle 0 | a(k_1) \cdots a(k_m) T [\phi_1 \cdots \phi_{4l}] a^\dagger(p_1) \cdots a^\dagger(p_n) | 0 \rangle. \quad (7.61)$$

Par une application directe du théorème de Wick, on sait donc que les seuls termes non nuls sont ceux qui sont complètement contractés. On peut avoir trois types de contractions différentes :

– les *lignes entrantes*

$$\begin{aligned} \phi(x) \overline{a^\dagger}(k) &= \langle 0 | \phi^-(x) a^\dagger(k) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} e^{-ipx} \langle 0 | a(p) a^\dagger(k) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} e^{-ipx} \left(\langle 0 | a^\dagger(k) a(p) | 0 \rangle + (2\pi)^3 2\varepsilon(p) \delta(\vec{k} - \vec{p}) \right) \\ &= e^{-ikx}; \end{aligned}$$

– les *lignes sortantes*

$$\begin{aligned} a(k) \overline{\phi}(x) &= \langle 0 | a(k) \phi^+(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} e^{ipx} \langle 0 | a(k) a^\dagger(p) | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} e^{ipx} \left(\langle 0 | a^\dagger(p) a(k) | 0 \rangle + (2\pi)^3 2\varepsilon(p) \delta(\vec{k} - \vec{p}) \right) \\ &= e^{+ikx}; \end{aligned}$$

– les *propagateurs*

$$\phi(x)\phi(y) = \langle 0 | T [\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle .$$

Ainsi, dans le calcul de l'élément de matrice (7.61), on pourra calculer chaque terme complètement contracté en multipliant simplement les éléments correspondants. Il restera alors les éléments extérieurs au $\langle 0 | \cdot | 0 \rangle$, qui fourniront finalement les *vertex*. A chaque vertex, au point x_i , on devra donc associer $\int d^4 x_i (-i \frac{\lambda}{4!})$.

On vient d'établir les règles de Feynman en représentation x , puisque les différents éléments dépendent des points d'espace-temps x_i . Mais il est possible de mener le processus plus loin en effectuant directement les intégrales sur x_i . On obtient alors les règles de Feynman en représentation k . En particulier, toutes les exponentielles se combineront ensemble pour produire des fonctions δ des impulsions à chaque vertex. Il ne restera donc rien associé aux lignes externes, mais il s'agira d'assurer la conservation de l'énergie-impulsion à chaque vertex. Nous calculerons l'expression exacte du propagateur dans la section 7.5.4, acceptons-la pour l'instant. Dans la figure 7.2, nous donnons la représentation graphique des différents éléments de la diagrammatique de Feynman. Ceci en main, nous pouvons maintenant poser clairement la procédure à suivre pour le calcul de l'élément de matrice \mathcal{M} .

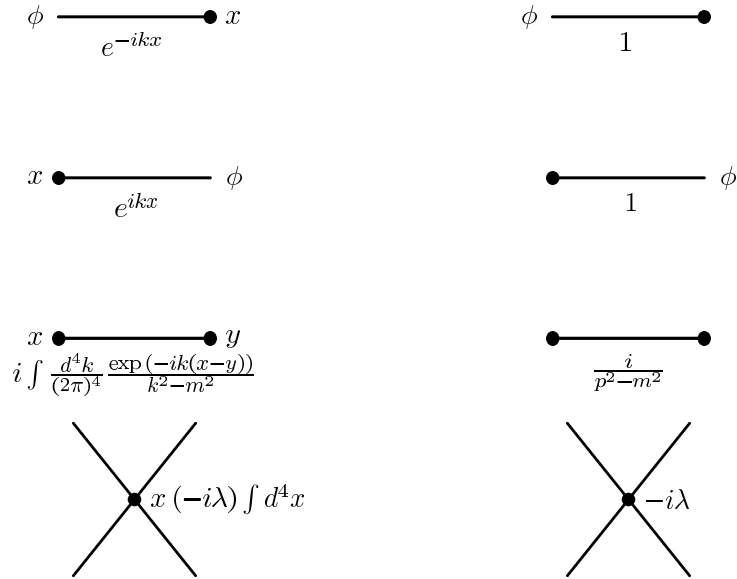


FIG. 7.2 – Les règles de Feynman de la théorie $\lambda\phi^4$, en représentation x à gauche, et k à droite.

Démarche En bref, la démarche est donc la suivante :

1. Connaissant les différents vertex de la théorie, dessiner tous les diagrammes, complètement connectés et topologiquement différents, pour le processus dont on cherche à calculer l'amplitude. Le nombre de vertex détermine l'ordre perturbatif considéré;
2. pour chaque diagramme, associer à chacun de ses éléments (vertex, ligne entrante ou sortante, propagateur) l'expression dérivée au préalable.

3. En représentation k , imposer la conservation de l'impulsion à chaque vertex à l'aide d'un facteur $(2\pi)^4 \delta(P_{out} - P_{in})$.
4. En représentation k , intégrer sur toutes les impulsions internes, i.e. non déterminées : $\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$.
5. Éliminer la fonction $(2\pi)^4 \delta^{(4)}$ globale qui reste.
6. La somme de tous les termes ainsi écrits est l'amplitude de diffusion \mathcal{M} .

Les points 3 et 4 ne font qu'utiliser la conservation de l'énergie-impulsion pour déterminer directement la valeur des impulsions internes.

Nous pouvons immédiatement calculer un premier exemple simple, la diffusion $2 \rightarrow 2$ dans la théorie $\lambda\phi^4$. Le seul diagramme qui entre en compte ici est illustré à la figure 7.3. On trouve immédiatement l'élément de matrice :

$$\mathcal{M} = -i\lambda. \quad (7.62)$$

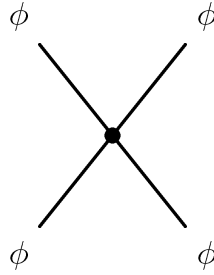


FIG. 7.3 – Diagramme au plus bas ordre de la diffusion $2 \rightarrow 2$ dans la théorie $\lambda\phi^4$.

On aurait pu la trouver aussi en passant par la représentation x . Vérifions que le résultat est identique. Ceci mettra en évidence explicitement comment les exponentielles se combinent pour assurer la conservation de l'énergie. On obtient

$$\begin{aligned} & \int d^4 x e^{ip_1^{out} x} e^{ip_2^{out} x} (-i\lambda) e^{-ik_1^{in} x} e^{-ik_2^{in} x} = (-i\lambda) \delta(p_1^{out} + p_2^{out} - k_1^{in} - k_2^{in}) (2\pi)^4 \\ \Rightarrow & \mathcal{M} = -i\lambda. \end{aligned}$$

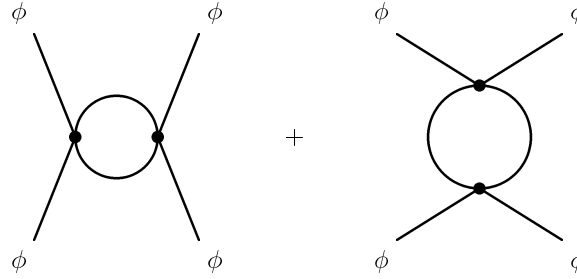
Finalement, la figure 7.4 montre les deux diagrammes décrivant le même processus, mais à l'ordre supérieur.

7.5.4 Propagateurs

Nous passons maintenant au calcul explicite des propagateurs des différents types de champs. Nous ne considérerons que des champs massifs, le cas non massif étant beaucoup plus délicat, dans le cas vectoriel du moins.

Champ scalaire Soit $\epsilon > 0$. Montrons que

$$D_F(x - y) = \langle 0 | T [\phi(x) \phi(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}. \quad (7.63)$$

FIG. 7.4 – Diffusion $2 \rightarrow 2$ au deuxième ordre dans la théorie $\lambda\phi^4$.

En effet, on a d'abord

$$\begin{aligned}
 D(x-y) &= \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \\
 &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} \langle 0 | \left(a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx} \right) \left(a_p e^{-ipy} + a_p^\dagger e^{ipy} \right) | 0 \rangle \\
 &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} e^{ipy - ikx} \langle 0 | a_k a_p^\dagger | 0 \rangle \\
 &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} e^{-ip(x-y)}.
 \end{aligned}$$

Nous effectuons maintenant l'intégrale sur p^0 dans l'éq. (7.63) et montrons qu'on obtient bien

$$\langle 0 | T [\phi(x) \phi(y)] | 0 \rangle = \theta(x^0 - y^0) D(x-y) + \theta(y^0 - x^0) D(y-x).$$

Pour ce faire, nous considérons p^0 comme un paramètre complexe et effectuons l'intégration dans le plan complexe. Nous avons introduit le facteur strictement positif ϵ afin de décaler légèrement les pôles de l'intégrant hors de l'axe réel et de pouvoir alors utiliser le théorème des résidus. Choisissons comme contour d'intégration γ l'axe réel fermé par demi-cercle. On doit maintenant distinguer deux cas :

Cas 1 : $x^0 > y^0$; Pour que l'intégrale sur le demi-cercle soit nulle, on doit choisir² le demi-plan $\text{Im}(p^0) < 0$. Si l'intégrale le long de l'axe réel est bien prise de $-\infty$ à $+\infty$, le sens d'intégration le long de γ est négatif, il faut donc introduire un signe $-$. Le domaine entouré par le contour d'intégration ne contient qu'un seul résidu, en $p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} - i\epsilon$,

²On utilise ici un résultat de base d'analyse complexe.

d'où

$$\begin{aligned}
D^F(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \\
&= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2\pi)} (2\pi i) \text{Res} \left(\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}, p^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon} \right) \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \lim_{p^0 \rightarrow \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon}} \frac{\left(p^0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon} \right) e^{-ip(x-y)}}{\left(p^0 + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon} \right) \left(p^0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon} \right)} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon}} e^{-i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon}(x^0 - y^0) + i\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} \\
&\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon(p)} e^{-i\varepsilon(p)(x^0 - y^0) + i\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} = D(x-y) .
\end{aligned}$$

Cas 2 : $x^0 < y^0$; On choisit cette fois-ci le demi-plan supérieur, i.e. $\text{Im}(p^0) > 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
D^F(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \\
&= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(2\pi)} (2\pi i) \text{Res} \left(\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}, p^0 = -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon} \right) \\
&= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \lim_{p^0 \rightarrow -\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon}} \frac{\left(p^0 + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon} \right) e^{-ip(x-y)}}{\left(p^0 + \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon} \right) \left(p^0 - \sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon} \right)} \\
&= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{-2\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon}} e^{i\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\epsilon}(x^0 - y^0) + i\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} \\
&\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon(p)} e^{i\varepsilon(p)(x^0 - y^0) + i\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} \\
&\stackrel{\vec{p} \rightarrow -\vec{p}}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon(p)} e^{i\varepsilon(p)(x^0 - y^0) - i\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} = D(y-x) ,
\end{aligned}$$

où la dernière égalité dépend crucialement du fait que $\varepsilon(p)$ est une fonction paire de \vec{p} .

On a donc montré que le propagateur du champ scalaire est bien donné par l'expression donnée à la figure 7.2.

Champ vectoriel La démarche est exactement semblable. Nous n'entrons donc plus dans tous les détails. L'expression à obtenir est ici

$$D_{\mu\nu}^F(x-y) = \langle 0 | T [A_\mu(x) A_\nu(y)] | 0 \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} . \quad (7.64)$$

En effet, en utilisant les relations de fermeture pour les vecteurs de polarisation, on a d'abord

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}(x-y) &= \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} \\
&\quad \sum_{m,n} \langle 0 | e_\mu^{(n)} \left(a_{k(n)} e^{-ikx} + a_{k(n)}^\dagger e^{ikx} \right) e_\nu^{(m)} \left(a_{p(m)} e^{-ipy} + a_{p(m)}^\dagger e^{ipy} \right) | 0 \rangle \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} e^{-ip(x-y)} \sum_m e_\mu^{(m)} e_\nu^{(m)} \\
&= - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} e^{-ip(x-y)} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right). \tag{7.65}
\end{aligned}$$

Puis on distingue à nouveau deux cas pour effectuer l'intégrale.

Cas 1 : $x^0 > y^0$; $\text{Im}(p^0) < 0$,

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}^F(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right)}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \\
&= -2\pi i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} \lim_{p^0 \rightarrow \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}} \frac{i \left(p^0 - \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \right) \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right) e^{-ip(x-y)}}{\left(p^0 + \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \right) \left(p^0 - \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \right)} \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right) e^{-ip(x-y)} = D_{\mu\nu}(x-y).
\end{aligned}$$

Cas 2 : $x^0 < y^0$; $\text{Im}(p^0) > 0$; soit $\tilde{p} = (-\varepsilon(p), \vec{p})$,

$$\begin{aligned}
D_{\mu\nu}^F(x-y) &= 2\pi i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^4} \lim_{p^0 \rightarrow -\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}} \frac{i \left(p^0 + \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \right) \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right) e^{-ip(x-y)}}{\left(p^0 + \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \right) \left(p^0 - \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \right)} \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{\tilde{p}_\mu \tilde{p}_\nu}{m^2} \right) e^{-i(-\varepsilon(p))(x^0 - y^0) + i\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} \\
&\stackrel{\vec{p} \rightarrow -\vec{p}}{=} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right) e^{(+i\varepsilon(p))(x^0 - y^0) - i\vec{p}(\vec{x} - \vec{y})} \\
&= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} \left(-\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2} \right) e^{-ip(y-x)} = D_{\mu\nu}(y-x),
\end{aligned}$$

A nouveau, ceci est possible parce que l'intégrand est une fonction paire de \vec{p} .

Comme nous l'avons déjà mentionné plus haut, il n'est pas aisé de prouver l'expression suivante pour le propagateur du champ vectoriel sans masse. La symétrie de jauge qui apparaît dans ce cas rend les calculs plus complexes. On trouve dans la jauge dite *jauge relativiste*

$$D_{\mu\nu}^{F(m=0)}(x-y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\left(-i\eta_{\mu\nu} + \alpha \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right)}{p^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}, \tag{7.66}$$

ou α est un paramètre libre, puisqu'aucun résultat ne dépendra de sa valeur. Canoniquement, on travaillera avec $\alpha = 0$ (jauge de Feynman) ou avec $\alpha = 1$ (jauge de Landau). L'expression du propagateur dans la jauge de Coulomb est nettement plus compliquée, le lecteur intéressé pourra se référer par exemple au livre de Weinberg pour plus de détails.

Champ spinoriel Finalement, nous arrivons au champ spinoriel. En raison de l'anticommutation des composantes des champs de Dirac, dont découle la définition du produit chronologique (7.31), on définit le propagateur avec un signe négatif supplémentaire :

$$D_{ab}^F(x-y) = \langle 0|T [\Psi_a(x)\bar{\Psi}_b(y)]|0\rangle = \theta(x^0 - y^0)D_{ab}(x-y) - \theta(y^0 - x^0)\tilde{D}_{ab}(y-x), \quad (7.67)$$

où

$$D_{ab}^F(x-y) = \langle 0|\Psi_a(x)\bar{\Psi}_b(y)|0\rangle \quad \text{et} \quad \tilde{D}_{ab}^F(y-x) = \langle 0|\bar{\Psi}_b(y)\Psi_a(x)|0\rangle. \quad (7.68)$$

Malgré cette petite différence par rapport aux cas précédents, la suite des calculs est semblable. On trouve alors :

$$D_{ab}^F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)_{ab}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}. \quad (7.69)$$

En effet, calculons d'abord

$$\begin{aligned} D_{ab}(x-y) &= \langle 0|\Psi_a(x)\bar{\Psi}_b(y)|0\rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} \sum_{\sigma,\rho} \\ &\quad \langle 0| \left(a_{k\sigma} u_{k\sigma,a} e^{-ikx} + b_{k\sigma}^\dagger v_{k\sigma,a} e^{ikx} \right) \left(a_{p\rho}^\dagger \bar{u}_{p\rho,b} e^{ipy} + b_{p\rho} \bar{v}_{p\rho,b} e^{-ipy} \right) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} e^{-ip(x-y)} \sum_{\sigma} u_{p\sigma,a} \bar{u}_{p\sigma,b} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} e^{-ip(x-y)} (\not{p} + m)_{ab}, \end{aligned} \quad (7.70)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ab}(y-x) &= \langle 0|\bar{\Psi}_b(y)\Psi_a(x)|0\rangle \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\varepsilon(k)} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} \sum_{\sigma,\rho} \\ &\quad \langle 0| \left(a_{p\rho}^\dagger \bar{u}_{p\rho,b} e^{ipy} + b_{p\rho} \bar{v}_{p\rho,b} e^{-ipy} \right) \left(a_{k\sigma} u_{k\sigma,a} e^{-ikx} + b_{k\sigma}^\dagger v_{k\sigma,a} e^{ikx} \right) |0\rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} e^{-ip(y-x)} \sum_{\sigma} v_{p\sigma,a} \bar{v}_{p\sigma,b} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} e^{-ip(y-x)} (\not{p} - m)_{ab}. \end{aligned} \quad (7.71)$$

Puis viennent les deux cas

Cas 1 : $x^0 > y^0$; $\text{Im}(p^0) < 0$,

$$\begin{aligned} D_{ab}^F(x-y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)_{ab}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \\ &= -2\pi i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4} \lim_{p^0 \rightarrow \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}} \frac{i(p^0 - \sqrt{m^2 + \vec{p}^2})(\not{p} + m)_{ab} e^{-ip(x-y)}}{(p^0 + \sqrt{m^2 + \vec{p}^2})(p^0 - \sqrt{m^2 + \vec{p}^2})} \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2\varepsilon(p)} e^{-ip(x-y)} (\not{p} + m)_{ab} = D_{ab}(x-y). \end{aligned}$$

Cas 2 : $x^0 < y^0$; $\text{Im}(p^0) > 0$,

$$\begin{aligned}
D_{ab}^F(x-y) &= 2\pi i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^4} \lim_{p^0 \rightarrow -\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}} \frac{i \left(p^0 + \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \right) (\not{p} + m)_{ab} e^{-ip(x-y)}}{\left(p^0 + \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \right) \left(p^0 - \sqrt{m^2 + \vec{p}^2} \right)} \\
&= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(-2\varepsilon(p))} (-\varepsilon(p)\gamma^0 - p^i\gamma^i + m)_{ab} e^{i\varepsilon(p)(x^0-y^0)+ip^i(x^i-y^i)} \\
&\stackrel{\vec{p} \rightarrow -\vec{p}}{=} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon(p)} (-\varepsilon(p)\gamma^0 + p^i\gamma^i + m)_{ab} e^{i\varepsilon(p)(x^0-y^0)-ip^i(x^i-y^i)} \\
&= - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon(p)} (\not{p} - m)_{ab} e^{-ip(y-x)} = -\tilde{D}_{ab}(y-x) .
\end{aligned}$$

On a donc bien ce qu'on cherchait, i.e.

$$D_{ab}^F(x-y) = \theta(x^0 - y^0) D_{ab}(x-y) - \theta(y^0 - x^0) \tilde{D}_{ab}(y-x) . \quad (7.72)$$

On a maintenant en main tous les propagateurs pour tous les types de champs. Il est alors aisé de construire les règles de Feynman pour d'autres théories.

7.5.5 Règles de Feynman pour l'électrodynamique quantique

Nous prenons par exemple l'électrodynamique quantique. La théorie contient une paire fermionique, la paire électron-positron, et un champ vectoriel sans masse, le photon. La densité lagrangienne contient les termes libres, plus le terme d'interaction le plus simple possible :

$$\mathcal{L}^{QED} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu , \quad (7.73)$$

où la constante de couplage e entre l'électron et le photon est simplement la charge élémentaire.

Calculons un type de ligne externe, par exemple un photon entrant :

$$\begin{aligned}
\overline{A_\mu(x)a_{(n)}^\dagger(k)} &= \langle 0 | A_\mu^-(x) a_{(n)}^\dagger(k) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon(p)} \sum_m e_\mu^{(m)} e^{-ipx} \langle 0 | a_{(m)}(p) a_{(n)}^\dagger(k) | 0 \rangle \\
&= e_\mu^{(n)} e^{-ikx} ,
\end{aligned}$$

ou un positron sortant :

$$\begin{aligned}
b_\sigma(k) \overline{\Psi(x)} &= \langle 0 | b_\sigma(k) \Psi^+(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\varepsilon(p)} \sum_\rho v_\rho(p) e^{ipx} \langle 0 | b_\sigma(k) b_\rho^\dagger(p) | 0 \rangle \\
&= v_\sigma(k) e^{ikx} ,
\end{aligned}$$

Nous laissons en exercice les autres cas, tous semblables. A nouveau, la figure 7.6 présente tous les éléments de la diagrammatique pour l'électrodynamique quantique. On notera que la convention graphique est que la flèche indique le flux de charge, c'est ce qui permet de distinguer dans les lignes fermioniques s'il s'agit d'un électron ou d'un positron, sachant que le diagramme 'évolue' de gauche à droite.

Remarque Un dernier élément important doit être mentionné ici, qu'il s'agit d'ajouter dans la procédure de Feynman. En raison de l'anticommutation des fermions, il faudra toujours ajouter un facteur (-1) à chaque boucle fermionique dans le diagramme.

7.5.6 Processus en électrodynamique quantique

Les trois pattes du vertex permettent a priori de décrire au premier ordre 2^3 processus différents :

$$\begin{array}{llll} e^- \rightarrow e^- \gamma & \gamma \rightarrow e^+ e^- & e^+ \rightarrow e^+ \gamma & 0 \rightarrow \gamma e^+ e^- \\ e^+ e^- \rightarrow \gamma & e^+ \gamma \rightarrow e^+ & e^- \gamma \rightarrow e^- & e^+ e^- \gamma \rightarrow 0 \end{array}$$

Mais aucun n'est un processus physiquement autorisé sur des bases cinématiques. En électrodynamique quantique, les processus au plus bas ordre sont des processus au second ordre dans la constante de couplage e . Les diagrammes qui décrivent ces processus auront donc tous quatre lignes externes et une ligne interne. Il en existe donc au total 2^4 différents. La figure 7.7 décrit cinq processus différents possibles au second ordre.

Avant de poursuivre, nous montrons encore une fois la puissance des règles de Feynman en calculant sans effort l'amplitude de diffusion de l'effet Compton :

$$|(p_1, \sigma_1); (k_1, (n))\rangle \rightarrow |(p_2, \sigma_2); (k_2, (m))\rangle .$$

Nous avons établi les facteurs associés à chacun des éléments de la diagrammatique de Feynman, il suffit de lire la solution directement des deux diagrammes qui entrent en jeu ici. Pour déterminer l'ordre des éléments, la règle est de toujours *remonter le flux de charge*. On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathcal{M} = & \bar{u}_{\sigma_2}(p_2) (-ie\gamma^\mu) \frac{\not{p}_1 + \not{k}_1 + m}{(p_1 + k_1)^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) u_{\sigma_1}(p_1) e_\mu^{(m)}(k_2) e_\nu^{(n)}(k_1) \\ & + \bar{u}_{\sigma_2}(p_2) (-ie\gamma^\mu) \frac{\not{p}_1 - \not{k}_2 + m}{(p_1 - k_2)^2 - m^2 + i\epsilon} (-ie\gamma^\nu) u_{\sigma_1}(p_1) e_\mu^{(n)}(k_1) e_\nu^{(m)}(k_2) . \end{aligned} \quad (7.74)$$

Très souvent, on ne mesure pas dans l'état final le spin ou la polarisation des particules sortantes. Pour calculer une section efficace, ou un temps de vie, il s'agira alors de sommer sur les polarisations sortantes. Pour les spineurs, on utilisera alors les éq. (5.52) et (5.53), ce qui simplifiera considérablement les expressions. De même, pour les photons, on pourra toujours substituer

$$\sum_n e_\mu^{(n)} e_\nu^{(n)} \longrightarrow -\eta_{\mu\nu} . \quad (7.75)$$

Ceci *n'est pas* une égalité stricte. Mais une telle substitution fournit un résultat juste pour autant qu'elle soit faite à l'intérieur du calcul de \mathcal{M} en électrodynamique quantique.

7.5.7 Quelques autres exemples

Pour chaque Lagrangien, on pourra désormais construire sans difficulté les règles de Feynman correspondantes. Les lignes externes et les propagateurs ont déjà été calculés et proviennent de la partie libre des Lagrangiens. La seule partie non triviale qu'il restera à trouver est les facteurs associés aux vertex, qu'on calcule à partir des Lagrangiens d'interaction, et dont certains peuvent être nettement moins simples que ceux présentés jusqu'ici. Pour les obtenir, on prendra un processus simple qui contient le vertex intéressant et on effectue les contractions nécessaires ; il suffira alors d'éliminer la partie associée aux lignes externes ou aux propagateurs pour ne garder que les termes associés au vertex. Nous donnons à la figure 7.5 quelques exemples que le lecteur pourra s'entraîner à déduire. Prenons le dernier d'entre eux, qui contient une dérivée :

$$\mathcal{L} = ie\phi^\star \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi A^\mu . \quad (7.76)$$

On calcule l'élément de matrice suivant (par exemple) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}(p+k \rightarrow q) &\rightsquigarrow \langle 0|a(q)(-i)(i)eA_\mu(\phi^*\partial^\mu\phi - \partial^\mu\phi^*\phi)a^\dagger(p)a^\dagger_\gamma(k)|0\rangle \\
 &= e\langle 0|a(q)A_\mu^-(\phi^*\partial^\mu\phi - \partial^\mu\phi^*\phi)a^\dagger(p)a^\dagger_\gamma(k)|0\rangle \\
 &= e e_\mu^{(n)}[-ip^\mu - iq^\mu]e^{-ikx}e^{-ipx}e^{iqx},
 \end{aligned}$$

Le vecteur de polarisation appartenant à la ligne externe du photon, il reste bien pour le vertex $-ie(p^\mu + q^\mu)$.

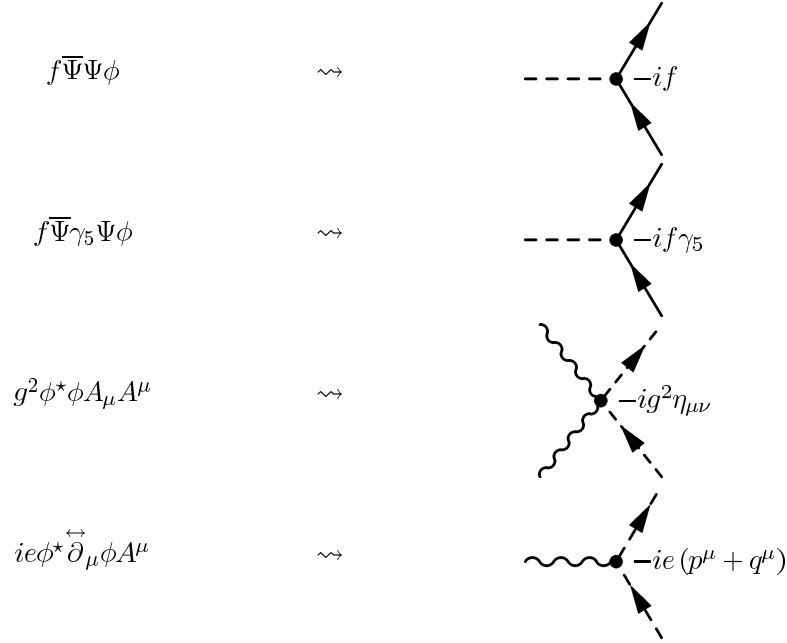


FIG. 7.5 – Quelques exemples de facteurs de vertex

Nous en avons maintenant terminé avec les règles de Feynman. Etant donné un Lagrangien, on peut calculer en principe tous les processus de collision ou de désintégration associés, puis comparer ces résultats aux expériences.

L'essentiel du problème qui reste maintenant est précisément de déterminer le Lagrangien à utiliser. Nous avons déjà vu que les principes qui régissent la construction des Lagrangiens libres étaient essentiellement liés à des symétries. Il en va de même pour les Lagrangiens d'interaction, les symétries étant un élément fondamental de toute théorie physique. A partir de maintenant, l'essentiel de nos efforts va donc se concentrer sur les principes de symétrie qui conduisent au Lagrangien du Modèle Standard, que nous pourrons écrire tout à la fin de ce cours.

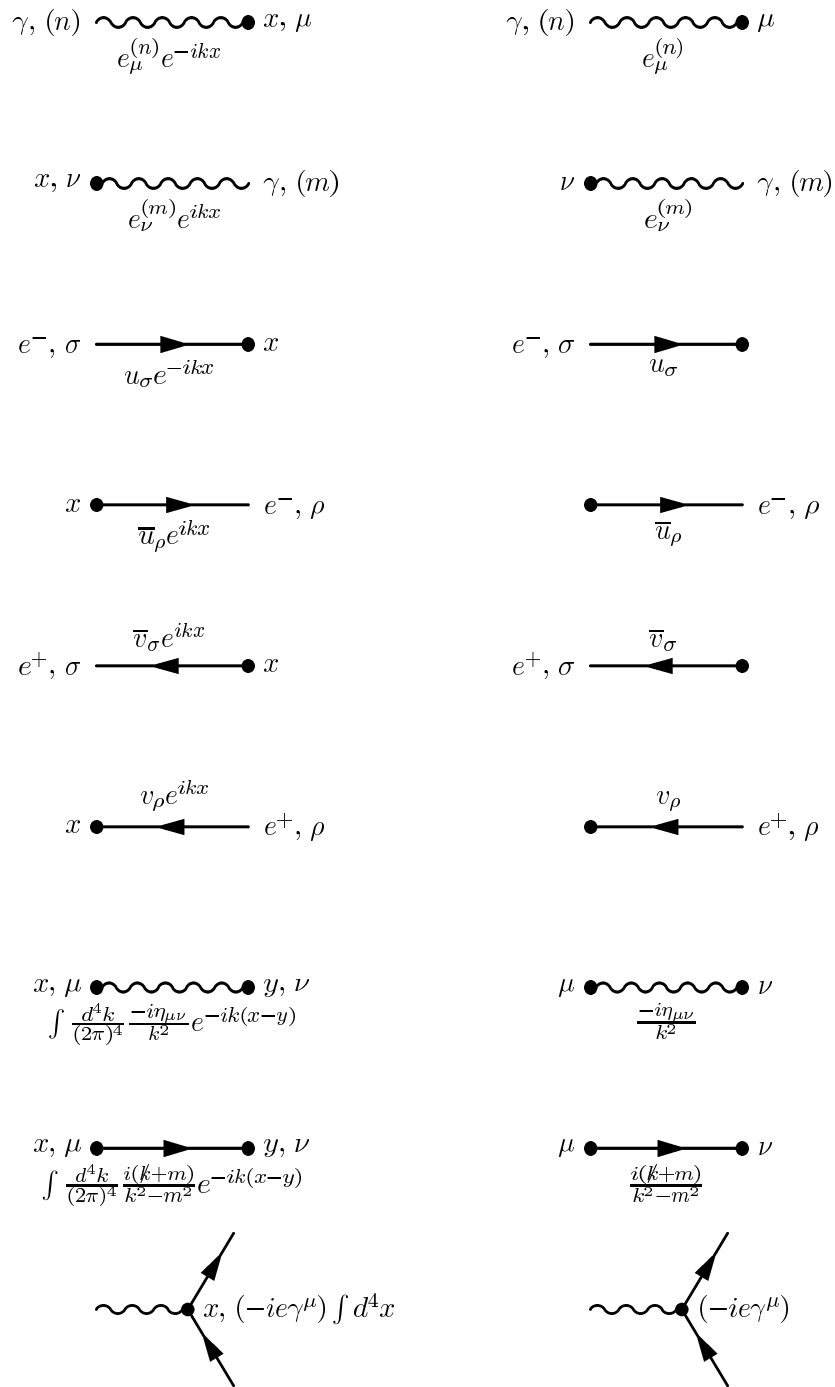


FIG. 7.6 – Les règles de Feynman de l'électrodynamique quantique, en représentation x à gauche, et k à droite, dans la jauge de Feynman.

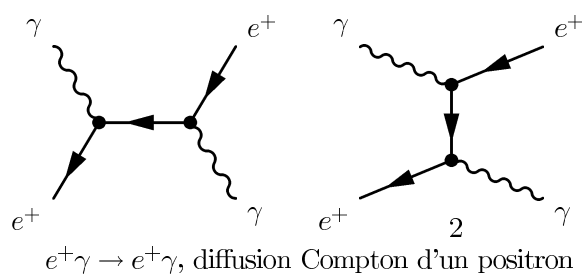
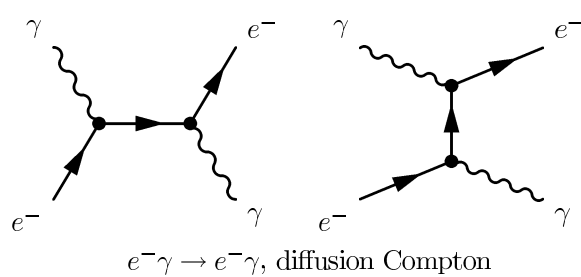
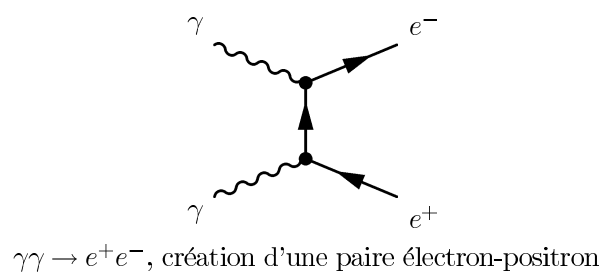
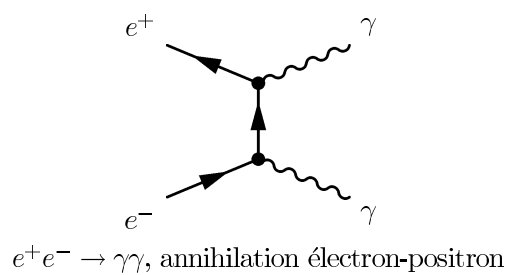
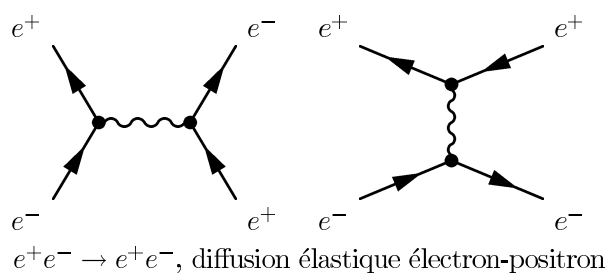


FIG. 7.7 – Quelques processus physiquement autorisés au deuxième ordre en électrodynamique quantique

Chapitre 8

Les symétries globales

Alors que la plupart des symétries que nous avons considérées jusqu'ici étaient des symétries externes, i.e. qui transformaient les coordonnées d'espace-temps, nous allons dans la suite nous concentrer sur les symétries internes qui sont des transformations des champs, mais n'affectent pas l'espace sur lequel ces champs sont définis. C'est évidemment dans cette catégorie-là qu'il faut ranger la transformation qui a produit le courant électrique :

$$\begin{aligned}\phi &\longrightarrow e^{i\alpha}\phi & \rightsquigarrow & j^\mu = i\phi^* \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\mu \phi, \\ \Psi &\longrightarrow e^{i\beta}\Psi & \rightsquigarrow & j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi.\end{aligned}$$

8.1 Groupes et algèbres de Lie

L'ensemble de la théorie que nous allons construire repose sur les concepts de groupe et surtout d'algèbre (de Lie). Nous commençons donc ce chapitre par quelques éléments indispensables à ce propos.

8.1.1 Quelques groupes de Lie matriciels

Au chapitre 2, nous avons déjà défini la notion de groupe, et celle de groupe de Lie. Essentiellement, un groupe de Lie est un groupe particulièrement lisse, qu'on peut paramétriser par un ensemble de n fonctions différentiables. Tous les groupes avec lesquels nous allons travailler ici sont des groupes de matrices¹. Définissons les plus importants pour la suite.

Le groupe linéaire $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ On le définit par

$$\text{GL}(n, \mathbb{R}) = \{M, \text{ matrice } n \times n : M_{ij} \in \mathbb{R} \text{ et } \det M \neq 0\} . \quad (8.1)$$

On vérifie aisément que c'est bien un groupe de Lie, puisque $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ est isomorphe à \mathbb{R}^{n^2} . On définit alors les sous-groupes suivants :

$$\text{O}(n) = \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : MM^T = M^T M = \mathbb{I}_n\} , \quad (8.2)$$

$$\text{SL}(n, \mathbb{R}) = \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{R}) : \det M = 1\} , \quad (8.3)$$

$$\text{SO}(n) = \text{O}(n) \cap \text{SL}(n, \mathbb{R}) . \quad (8.4)$$

¹En fait, il n'est pas restrictif de ne considérer que ces groupes-là puisqu'on a le corollaire suivant du théorème d'Ado : Tout groupe de Lie est localement isomorphe à un groupe de Lie matriciel.

Nous avons aussi déjà rencontré le groupe de Lorentz

$$\mathcal{L} \equiv O(1, 3) = \{M \in \text{GL}(4, \mathbb{R}) : M\eta M^T = \eta\} . \quad (8.5)$$

Le groupe linéaire $\text{GL}(n, \mathbb{C})$ Il s'agit naturellement de

$$\text{GL}(n, \mathbb{C}) = \{M, \text{ matrice } n \times n : M_{ij} \in \mathbb{C} \text{ et } \det M \neq 0\} . \quad (8.6)$$

On a alors les sous-groupes analogues à ceux de $\text{GL}(n, \mathbb{R})$:

$$\text{U}(n) = \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) : MM^\dagger = M^\dagger M = \mathbb{I}_n\} , \quad (8.7)$$

$$\text{SL}(n, \mathbb{C}) = \{M \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) : \det M = 1\} , \quad (8.8)$$

$$\text{SU}(n) = \text{U}(n) \cap \text{SL}(n, \mathbb{C}) . \quad (8.9)$$

Le théorème suivant assure que tous ces sous-groupes sont bien des groupes de Lie.

Théorème Tout sous-groupe *fermé* d'un groupe de Lie est un sous-groupe de Lie.

8.1.2 Algèbres de Lie

Définition Une \mathbb{k} -algèbre de Lie est un \mathbb{k} -espace vectoriel \mathfrak{g} muni d'une application \mathbb{k} -bilinéaire, appelée *crochet de Lie*

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}, \quad (X, Y) \longmapsto [X, Y] \quad (8.10)$$

satisfaisant les deux propriétés suivantes :

- *antisymétrie* : pour tout X, Y dans \mathfrak{g} , on a

$$[Y, X] = -[X, Y] , \quad (8.11)$$

- *identité de Jacobi* : pour tout X, Y, Z dans \mathfrak{g}

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 . \quad (8.12)$$

Soit $\{X^1, X^2, \dots, X^n\}$, une base de l'algèbre. Alors il existe naturellement des constantes $f^{\mu\nu}_\lambda$ telles que

$$[X^\mu, X^\nu] = if^{\mu\nu}_\lambda X^\lambda . \quad (8.13)$$

On les appelle les *constantes de structure*² de l'algèbre \mathfrak{g} .

La définition rigoureuse de l'algèbre de Lie d'un groupe de Lie sort largement du cadre de ce cours. Nous pouvons cependant en donner une définition simple qui reflète l'essentiel des propriétés intéressantes. Notons d'abord la proposition suivante :

Proposition Soit G , un groupe de Lie. L'espace tangent à l'élément neutre $e \in G$ est une algèbre de Lie \mathfrak{g} .

Cette proposition fournit la motivation de la définition suivante :

²L'utilisation de i dans la formule est purement conventionnel en physique, il n'apparaît généralement pas dans le cadre des mathématiques pures.

Définition Soit G un groupe de Lie de dimension n , i.e. un groupe à n paramètres, suffisamment lisse. Soit $e \in G$ l'élément neutre du groupe. Il existe un voisinage $V \ni e$ tel que pour tout $g \in V$, on puisse écrire

$$g = g(\alpha) = \exp \left(i \sum_{j=1}^n \alpha_j X^j \right). \quad (8.14)$$

Les X^j forment alors la base d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} . C'est cette algèbre qu'on appelle l'algèbre du groupe de lie G . Quant aux éléments X^j , on les appelle aussi les *générateurs* du groupe G .

A partir de cette définition, il est aisé de trouver une expression explicite pour les générateurs X^i , à savoir

$$X^i = -i \frac{\partial}{\partial \alpha_i} g(\alpha) \Big|_{\alpha=0}. \quad (8.15)$$

Remarque On constate à partir de la définition (8.14) que l'algèbre de Lie est l'expression de la structure infinitésimale du groupe de Lie. En particulier, il est possible que deux groupes de Lie différents partagent la même algèbre. Nous rencontrerons un exemple tantôt. Par contre, si G est compact³, alors $V = G$, i.e. la représentation exponentielle de la forme (8.14) est valable partout et l'algèbre décrit le groupe entier.

Nous pouvons construire les algèbres de Lie des groupes décrits plus tôt dans cette section.

– L'algèbre $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$. Soit $M \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$. Sous forme infinitésimale, on écrit $V = \mathbb{I} + i\alpha_j A^j$. Alors

$$\det V = 1 \iff \exp(\mathrm{Tr}[\ln(V)]) = 1 \iff \exp(\mathrm{Tr}[i\alpha_j A^j]) = 1.$$

Autrement dit,

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{A \text{ matrice } n \times n : \mathrm{Tr}(A) = 0\}. \quad (8.16)$$

– L'algèbre $\mathfrak{o}(n)$. Ecrivons à nouveau $O = \mathbb{I} + i\alpha_j J^j \in \mathrm{O}(n)$. Comme $O_{ab} \in \mathbb{R}$, on doit avoir $(J^j)^* = -J^j$. De plus, au plus bas ordre dans les constantes α ,

$$O^T O = \mathbb{I} \implies \mathbb{I} + i\alpha_j J^j + i\alpha_j J^{jT} = \mathbb{I}.$$

Ainsi,

$$\mathfrak{o}(n) = \{J \text{ matrice } n \times n : J^j = -J^{j*} \text{ et } J^j = -J^{jT}\}. \quad (8.17)$$

En particulier, on aura aussi $\mathrm{Tr}(J^j) = 0$ et $J^j = J^{j\dagger}$.

De plus, comme on ne s'intéresse qu'à la structure infinitésimale du groupe, on aura

$$\mathfrak{o}(n) = \mathfrak{so}(n). \quad (8.18)$$

On voit alors immédiatement que $\dim \mathfrak{o}(n) = \dim \mathfrak{so}(n) = \frac{n(n-1)}{2}$ (le nombre d'éléments dans le triangle supérieur strict).

Finalement, on peut donner une représentation explicite des générateurs ici. Une rotation autour de l'axe 3 s'écrit

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant la formule (8.15), on trouve les trois générateurs :

$$J^3 = -i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J^1 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J^2 = -i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.19)$$

³Un groupe de Lie est *compact* s'il est compact, vu comme variété.

ou encore

$$(J^a)_{ij} = \frac{1}{i} \epsilon_{aij} . \quad (8.20)$$

En effectuant explicitement les multiplications matricielles nécessaires, on trouve les constantes de structure suivantes :

$$[J^a, J^b] = i\epsilon^{abc} J^c . \quad (8.21)$$

- L'algèbre $\mathfrak{u}(n)$. Soit $U = \mathbb{I} + i\alpha_j T^j \in U(n)$. Alors (au plus bas ordre),

$$UU^\dagger = \mathbb{I} \implies \mathbb{I} + i\alpha_j T^j - i\alpha_j T^{j\dagger} = \mathbb{I} .$$

D'où

$$\mathfrak{u}(n) = \{T : T^j = T^{j\dagger}\} . \quad (8.22)$$

Sa dimension (réelle) est donc $\dim \mathfrak{u}(n) = n^2$ (deux fois le triangle supérieur strict plus les n coefficients réels sur la diagonale).

- L'algèbre $\mathfrak{su}(n)$. On a directement

$$\mathfrak{su}(n) = \{T : T^j = T^{j\dagger} \text{ et } \text{Tr}(T) = 0\} . \quad (8.23)$$

De même la dimension réelle de cette algèbre est $\dim \mathfrak{su}(n) = n^2 - 1$.

L'algèbre $\mathfrak{su}(n)$ est donc l'ensemble des matrices hermitiennes $n \times n$ de trace nulle. Les matrices de Pauli $\{\frac{\tau^a}{2}\}$ forment une base orthonormée de cet ensemble, vu bien sûr comme un \mathbb{R} -espace vectoriel, avec le produit scalaire défini par

$$(U_1, U_2) = \text{Tr}[U_1 U_2] .$$

Les constantes de structures de l'algèbre qu'elles engendrent sont donc naturellement

$$\left[\frac{\tau^a}{2}, \frac{\tau^b}{2}\right] = i\epsilon^{abc} \frac{\tau^c}{2} . \quad (8.24)$$

Ce sont donc les même que celle de l'algèbre du groupe orthogonal. En particulier,

$$\mathfrak{o}(3) = \mathfrak{su}(2) . \quad (8.25)$$

Ces deux groupes sont certes différents, mais leurs algèbres coïncident : c'est un exemple de la remarque précédente, qui va nous être utile par la suite.

Bien qu'il existe une foule de résultats intéressants de la théories de groupes et algèbres de Lie qui soient particulièrement utiles pour la physique (en général), nous nous contenterons de ce strict minimum pour la suite.

8.2 L'isospin pour le nucléon

Nous introduisons la notion de symétrie globale d'un point de vue historique. Ces concepts sont apparus pour la première fois lorsqu'on tentait de comprendre la force forte, celle qui lie les éléments du noyau. Du point de vue de l'interaction forte, le noyau atomique est constitué de nucléons, le proton et le neutron étant indistinguables⁴. Si l'on admet qu'ils possèdent la même masse m , on peut écrire le Lagrangien de ces deux spineurs sous une forme compacte

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi , \quad (8.26)$$

⁴Evidemment, ils ont une charge différente, mais ceci ne concerne que l'interaction électromagnétique.

où l'on a défini le champ à huit composantes $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$.

Il est alors clair que ce Lagrangien est invariant sous le groupe de transformations $U(2)$, i.e.

$$\Psi \longrightarrow U\Psi, \quad U \in U(2). \quad (8.27)$$

On a donc mis en évidence une nouvelle symétrie plus générale, qui mélange les composantes des deux spineurs représentant le proton et le neutron. Le groupe de symétrie $U(2)$ est un groupe à quatre paramètres réels qui se décompose de la manière suivante :

$$U(2) = SU(2) \times U(1). \quad (8.28)$$

En effet, soit $U \in U(2)$. Alors $U^\dagger U = \mathbb{I}$, ce qui implique $|\det U|^2 = 1$, i.e. $\det U = e^{i\alpha}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$. Donc

$$U = e^{i\alpha} V$$

pour une certaine matrice $V \in SU(2)$, ce qui montre le résultat.

Il est alors aisé d'appliquer le théorème de Noether pour construire les courants associés. Nous comprenons maintenant mieux la signification des fonctions $C_{(n)}$ introduites au chapitre 2 dans le cadre de la théorie de Noether. Ce sont les générateurs du groupe de symétrie du Lagrangien considéré. On trouve donc

– pour $SU(2)$,

$$\theta^{a\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi} \left(i \frac{\tau^a}{2} \Psi \right) = -\bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} \Psi, \quad a = 1, 2, 3, \quad (8.29)$$

– pour $U(1)$,

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \Psi} (i\Psi) = -\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi. \quad (8.30)$$

On a bien trouvé quatre courants de Noether pour un groupe de symétrie à quatre paramètres. Le courant associé à $U(1)$ est alors interprété comme le courant de nombre baryonique. Dans ce cadre-ci, on appelle le groupe $SU(2)$ *groupe de l'isospin*, par analogie. Le nucléon est alors interprété comme une particule d'isospin $\frac{1}{2}$, dont le proton et le neutron sont les deux états possibles.

Résumons brièvement le concept. Ayant constaté que les deux spineurs qui forment le noyau atomique ont (essentiellement) la même masse et les mêmes propriétés par rapport à la force forte, il est possible de les considérer comme les deux états d'une même particule, le nucléon. Ils sont alors les états propres des générateurs du nouveau groupe de symétrie associé à ce nouveau 'doublet'.

Bien que la théorie de l'isospin ne joue plus à l'heure actuelle un rôle fondamental, il est important de bien comprendre à ce stade-ci la démarche, puisque beaucoup d'ingrédients essentiels à la construction du Modèle Standard se trouvent déjà ici. Nous commençons par généraliser ceci à des particules d'isospin 1, ce qui permet d'étendre le Lagrangien tout en conservant sa symétrie par rapport aux transformations de l'isospin.

8.3 L'isospin pour le pion

De même que les nucléons, les pions forment une famille de trois particules scalaires, les Π_\pm et le Π_0 , qui subissent l'interaction forte, et dont les masses sont très proches : $m_\pm = 139.6 \text{ MeV}$ et $m_0 = 135 \text{ MeV}$. Il est donc logique de tenter d'appliquer une stratégie similaire pour les décrire. La densité lagrangienne s'écrit naturellement

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Pi_0 \partial^\mu \Pi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \Pi_0^2 + \partial_\mu \Pi^* \partial^\mu \Pi - m_\pm^2 \Pi^* \Pi. \quad (8.31)$$

Comme dans le cas précédent, l'idée est de considérer ces trois particules comme les trois éléments d'un même triplet par rapport à un certain groupe de symétrie. Définissons alors les trois champs réels φ_i , $i = 1, 2, 3$, par

$$\Pi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 + i\varphi_2) \quad \Pi^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_1 - i\varphi_2) \quad \Pi_0 = \varphi_3.$$

Le Lagrangien s'écrit

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^3 \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \varphi_i \partial^\mu \varphi_i - \frac{1}{2} m^2 \varphi_i \varphi_i \right], \quad (8.32)$$

où les masses n'ont plus d'indices puisqu'on suppose qu'elles sont égales. Par rapport à l'indice i , on a un produit scalaire

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi^T \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^T \Phi, \quad (8.33)$$

où $\Phi^T = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. Ainsi, on a bien fait apparaître une nouvelle symétrie, celle du groupe $O(3)$:

$$\Phi \longrightarrow O\Phi, \quad O \in O(3). \quad (8.34)$$

Cette construction présente non seulement l'intérêt de la mise en évidence d'une symétrie plus grande d'un certain Lagrangien, mais plus encore, elle souligne la similitude de ce cas-ci avec le cas du nucléon : la symétrie $O(3)$ est aussi une symétrie d'isospin. En effet, nous avons déjà noté dans la première partie de ce chapitre que les groupes $O(3)$ et $SU(2)$ partageaient la même algèbre, donc la même structure infinitésimale. Il est alors possible de construire un Lagrangien pour les pions et les nucléons qui soit globalement invariant sous une transformation d'isospin, pour autant qu'on trouve un terme d'interaction qui soit non seulement Lorentz invariant, mais aussi isospin invariant. Les deux termes envisageables sont

$$f_S \bar{\Psi} \frac{\tau^a}{2} \Psi \varphi^a \quad (8.35)$$

$$\text{et } f_A \bar{\Psi} \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \Psi \varphi^a. \quad (8.36)$$

En effet, lors d'une transformation infinitésimale, on a

$$\begin{cases} \Psi & \longrightarrow \left(\mathbb{I}_2 + i\alpha_c \frac{\tau^c}{2} \right) \Psi, \\ \Phi & \longrightarrow \left(\mathbb{I}_3 + i\beta_d J^d \right) \Phi. \end{cases} \quad (8.37)$$

La variation du terme d'interaction lors d'une telle transformation est donc

$$\begin{aligned} \delta \left(\bar{\Psi} \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \Psi \varphi^a \right) &= (\delta \bar{\Psi}) \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \Psi \varphi^a + \bar{\Psi} \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 (\delta \Psi) \varphi^a + \bar{\Psi} \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \Psi (\delta \varphi^a) \\ &= \bar{\Psi} \left(-i\alpha_c \frac{\tau^c}{2} \right) \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \Psi \varphi^a + \bar{\Psi} \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \left(i\alpha_c \frac{\tau^c}{2} \right) \Psi \varphi^a + \bar{\Psi} \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \Psi i\beta_d (J^d)^a_b \varphi^b \\ &= i\alpha_c \bar{\Psi} \left[\frac{\tau^a}{2}, \frac{\tau^c}{2} \right] \gamma_5 \Psi \varphi^a + \bar{\Psi} \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \Psi i\beta_d (J^d)^a_b \varphi^b \\ &= i\alpha_c \bar{\Psi} \left(i\epsilon_{ace} \frac{\tau^e}{2} \right) \gamma_5 \Psi \varphi^a + \bar{\Psi} \frac{\tau^a}{2} \gamma_5 \Psi i\beta_d (-i\epsilon_{dab}) \varphi^b \\ &= -\alpha_c \epsilon_{ace} \bar{\Psi} \frac{\tau^e}{2} \gamma_5 \Psi \varphi^a + \beta_c \epsilon_{cea} \bar{\Psi} \frac{\tau^e}{2} \gamma_5 \Psi \varphi^a. \end{aligned}$$

On constate donc que si la transformation des pions est la même que celle des nucléons, i.e. si $\alpha_c = \beta_c$, $c = 1, 2, 3$, alors la variation du terme d'interaction est bien nulle, et le groupe de l'isospin est bien une symétrie du Lagrangien. Il n'y a donc plus deux groupes distincts, mais un unique avec un seul triplet de paramètres α_c .

En résumé, le Lagrangien libre admet le groupe $SU(2) \times O(3)$ comme groupe de symétrie. Pour cela, il a été nécessaire de regrouper le proton et le neutron en un seul doublet ('isospin 1/2') $SU(2)$, et les trois pions en un triplet ('isospin 1') $O(3)$. Si maintenant on introduit un terme d'interaction, il ne reste plus que le groupe $SU(2)$. Ce qui implique finalement que

- $m_p = m_n = M$,
- $m_{\pm} = m_0 = m$,
- la transformation du pion et du nucléon est la même, i.e. décrite par une seule constante.

Il est essentiel de remarquer ici que le Lagrangien d'interaction est possible uniquement grâce au fait que les algèbres des groupes en question ont les mêmes constantes de structure. C'est aussi ce qui permet d'interpréter les deux groupes comme deux représentations différentes d'une même symétrie, celle de l'isospin.

Notons encore qu'expérimentalement, $f_S = 0$. Comme $\bar{\Psi}\gamma_5\Psi$ est pseudo-scalaire, i.e. de parité -1 , on en déduit que le pion est aussi une particule pseudo-scalaire si l'on impose que la parité soit une symétrie de ce Lagrangien.

Nous avons déjà touché un certain nombre de points essentiels dans cette analyse. Les symétries sont le principe fondamental pour l'établissement des Lagrangiens. Non seulement est-il satisfaisant d'obtenir une théorie qui présente la plus haute symétrie possible, mais on constate déjà ici que le fait d'imposer une certaine symétrie ajoute des contraintes qui déterminent les termes autorisés dans le Lagrangien d'une part, et qui restreignent l'espace des paramètres d'autre part : masses égales, relations entre les charges des particules, i.e. entre les paramètres des transformations des champs. Les symétries forment donc un outil extrêmement puissant en théorie des champs.

Chapitre 9

Symétries locales et champs de jauge

Nous passons dans ce chapitre au concept de symétrie de jauge *locale*, qui est l'élément central dans la construction du Modèle Standard. La notion de *champ de jauge* en est la conséquence immédiate. Nous traiterons tout d'abord les groupes de symétrie abéliens, à partir de l'électrodynamique quantique. Puis nous passerons au domaine plus subtil des symétries non abéliennes avec comme exemple essentiel la chromodynamique quantique, i.e. la théorie de l'interaction forte.

9.1 Le cas de l'électrodynamique quantique : groupe abélien

Nous commençons par rappeler le Lagrangien de l'électrodynamique quantique :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu. \quad (9.1)$$

Il s'agit donc d'une théorie avec un champ vectoriel sans masse et un champ spinoriel massif, couplés par le dernier terme. Nous avons observé au chapitre 4 que le champ vectoriel sans masse libre est invariant sous la transformation suivante :

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x). \quad (9.2)$$

Parallèlement, le champ spinoriel libre est invariant sous

$$\Psi \longrightarrow \Psi' = e^{i\beta}\Psi, \quad \text{où } \beta \text{ est une constante.} \quad (9.3)$$

L'objectif de cette section est de montrer le lien qu'il existe entre ces deux symétries des champs libres lorsqu'ils sont couplés l'un à l'autre.

9.1.1 Le champ A_μ comme champ de jauge

Considérons le problème du champ spinoriel. Jusqu'ici, nous avons considéré le paramètre β de l'exponentielle comme une constante. Est-il possible de choisir une fonction arbitraire des coordonnées $\beta(x)$? Le terme $m\bar{\Psi}\Psi$ reste bien sûr invariant. Par contre, le terme cinétique produit un facteur supplémentaire :

$$i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \longrightarrow i\bar{\Psi}e^{-i\beta(x)}\gamma^\mu \left[i(\partial_\mu\beta(x))e^{i\beta(x)}\Psi + e^{i\beta(x)}\partial_\mu\Psi \right] = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\beta(x). \quad (9.4)$$

C'est ici qu'intervient le terme d'interaction. En effet, si lors de la transformation du champ Ψ , le champ A_μ se transforme selon l'éq. (9.2), alors le terme d'interaction devient

$$e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu \longrightarrow e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu + \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi\partial_\mu\alpha(x). \quad (9.5)$$

Et on constate donc que les deux termes excédentaires s'annulent si on choisit les fonctions α et β telles que $\alpha(x) = \beta(x)$. On vérifie encore que le Lagrangien libre du champ vectoriel reste invariant :

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow \partial_\mu A_\nu - \frac{1}{e}\partial_\mu\partial_\nu\alpha - \partial_\nu A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\nu\partial_\mu\alpha = F_{\mu\nu},$$

puisque les dérivées partielles commutent.

On vient donc de montrer que le Lagrangien (9.1) est invariant sous la transformation jointe des deux champs suivante

$$\begin{cases} A^\mu & \longrightarrow A^\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x), \\ \Psi & \longrightarrow \exp[i\alpha(x)]\Psi. \end{cases} \quad (9.6)$$

On parle de *symétrie de jauge U(1)-locale*. Le groupe de symétrie pour le champ spinoriel étant bien sûr U(1), et le terme local se rapporte au fait que la phase, i.e. le paramètre de la transformation, peut dépendre du point d'espace-temps considéré.

Définition On définit la *dérivée covariante* D_μ comme l'opérateur différentiel suivant :

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (9.7)$$

Elle tient son nom de la propriété importante suivante. Lors d'une transformation de jauge, on a

$$D_\mu\Psi \longrightarrow e^{i\alpha(x)}D_\mu\Psi, \quad (9.8)$$

autrement dit, la dérivée covariante du spineur se transforme comme le spineur lui-même, ce qui n'est pas le cas de sa dérivée ordinaire. En effet,

$$D'_\mu\Psi' = [\partial_\mu - ieA_\mu - i\partial_\mu\alpha(x)]e^{i\alpha(x)}\Psi = e^{i\alpha(x)}D_\mu\Psi - i\partial_\mu\alpha(x)e^{i\alpha(x)}\Psi + i\partial_\mu\alpha(x)e^{i\alpha(x)}\Psi.$$

Notons la propriété suivante de la dérivée covariante, qui est tout à fait analogue à celle de la dérivée covariante qui apparaît en relativité générale (avec la contraction partielle du tenseur de Riemann dans ce cas-là) :

$$[D_\mu, D_\nu] = -ieF_{\mu\nu}. \quad (9.9)$$

En utilisant cette définition, on peut alors écrire le Lagrangien comme

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\Psi}\gamma^\mu D_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi. \quad (9.10)$$

Remarques importantes

1. Jusqu'ici, nous avons simplement constaté que les transformations des champs considérées constituaient bien une symétrie du Lagrangien. On aurait pu envisager le problème sous un angle tout à fait différent. En effet, on aurait pu partir du Lagrangien libre du champ spinoriel, invariant sous la transformation U(1)-globale. On aurait alors imposé la symétrie locale et constaté qu'il apparaît un terme supplémentaire lors de la transformation. On aurait alors introduit le champ A_μ et la dérivée covariante, et choisi la loi de transformation de ce nouveau champ de sorte à obtenir un Lagrangien véritablement invariant. C'est la raison pour laquelle le champ vectoriel est en général appelé *champ de jauge* : c'est la symétrie de jauge locale qui impose sa présence.

2. On constate qu'en suivant cette démarche, le terme d'interaction n'est plus choisi au hasard, mais il découle naturellement de la définition de la dérivée covariante. Partant du Lagrangien libre pour les spineurs, imposer la symétrie de jauge locale détermine donc de manière unique le Lagrangien d'interaction¹. On a donc trouvé un principe de symétrie premier qui produit l'électrodynamique quantique de manière unique. On peut raisonnablement espérer produire de la même manière les autres interactions de la nature. C'est le concept fondamental dans la structure du Modèle Standard.

9.1.2 L'électrodynamique quantique scalaire

Il nous est maintenant aisé de construire la théorie de l'électrodynamique pour des particules scalaires, sachant que l'interaction électromagnétique est le fruit de la symétrie de jauge locale. Il suffit d'écrire le Lagrangien libre pour un champ scalaire chargé, i.e. complexe, d'introduire le champ de jauge A_μ et son Lagrangien libre, puis de remplacer la dérivée par une dérivée covariante. On obtient alors tous les termes d'interaction possibles.

Le Lagrangien est donc

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*(D^\mu\phi) - m^2\phi^*\phi - \lambda(\phi^*\phi)^2, \quad (9.11)$$

où on a déjà décrit la self interaction du champ scalaire. Il suffit de lire maintenant l'interaction du champ scalaire et du potentiel électromagnétique :

$$(\partial_\mu\phi^* + ieA_\mu\phi^*)(\partial^\mu\phi - ieA^\mu\phi) = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi + e^2A_\mu A^\mu\phi^*\phi + ieA_\mu(\phi^*\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*). \quad (9.12)$$

Nous avons donc deux termes d'interaction différents, outre le terme cinétique libre pour le champ scalaire :

$$= 2ie^2\eta^{\mu\nu}; \quad \mu \sim \text{wavy line} \sim \nu = -ie(p+q)^\mu.$$

FIG. 9.1 – Les deux termes d'interaction de l'électrodynamique scalaire, imposés par la symétrie de jauge locale.

Le second est relativement intuitif, puisqu'il représente l'interaction du courant de ϕ avec le champ électromagnétique. Le premier par contre l'est nettement moins, et il eût été plus difficile de le justifier sans l'aide du principe de symétrie. La symétrie de jauge impose de plus une relation stricte entre les constantes de couplage de ces deux termes. Une fois de plus, on voit ici la puissance du principe de symétrie : il détermine complètement le Lagrangien, la forme de tous les termes d'interaction, les relations entre constantes de couplage.

¹En fait, il faut aussi imposer que toutes les constantes de couplage ont une dimension positive, ce qui est essentiel pour que la théorie soit bien définie, i.e. renormalisable.

9.2 Symétries de jauge non abéliennes

Etant donné le succès du principe de symétrie de jauge locale, il est naturel de tenter de poursuivre dans cette voie. C'est ce que nous allons faire ici, avec deux groupes plus compliqués parce que non-abéliens, $SU(2)$ et $SU(3)$. Si les détails techniques sont certes plus subtils, nous ne ferons rien de plus conceptuellement que dans la première partie de ce chapitre.

9.2.1 Le groupe $SU(2)$

Ces idées furent introduites à l'origine par Yang et Mills en 1954. Ils avaient alors en tête la symétrie de l'isospin que nous avons utilisée pour introduire les concepts au tout début de ce chapitre. On parlera donc de théories de Yang-Mills. Le groupe $SU(2)$ n'engendre pas directement d'interaction dans le Modèle Standard, mais c'est l'exemple le plus simple de groupe non-abélien intéressant. L'intérêt à développer cette théorie est double : d'une part, elle illustre tous les concepts pour les théories de jauge non abéliennes, d'autre part, elle mettra en évidence la nécessité d'introduire un mécanisme de brisure des symétries (qui sera développé au chapitre suivant).

Partons du Lagrangien libre de deux spineurs de même masse, réunis en un vecteur à huit composantes, noté aussi Ψ , comme dans le cas du nucléon :

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi. \quad (9.13)$$

Nous avons déjà noté que le groupe $SU(2)$ est un groupe de symétrie de cette théorie, pour des matrices $U \in SU(2)$ constantes, i.e. des transformations globales. A nouveau, imposons la transformation locale $U(x) \in SU(2)$, ce qui signifie que la transformation infinitésimale $U(x)$ s'écrit aussi

$$U(x) = \mathbb{I} + i\alpha_a(x)T^a, \quad (9.14)$$

où $T^a \in \mathfrak{su}(2)$.

Le terme cinétique devient :

$$i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \longrightarrow i\bar{\Psi}U^\dagger(x)\gamma^\mu(U(x)\partial_\mu\Psi + \partial_\mu U(x)\Psi) = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi + i\bar{\Psi}\gamma^\mu U^\dagger(x)\partial_\mu U(x)\Psi. \quad (9.15)$$

Ainsi, il apparaît à nouveau un terme supplémentaire, qu'il s'agira de faire disparaître. Introduisons la notation

$$B_\mu(x) = iU^\dagger(x)\partial_\mu U(x), \quad (9.16)$$

de sorte que le terme en question s'écrive

$$\bar{\Psi}\gamma^\mu B_\mu\Psi. \quad (9.17)$$

Ce B_μ est donc l'analogue de $\partial_\mu\alpha$ en électrodynamique, mais avec trois degrés de libertés, i.e. trois fonctions indépendantes de x . Montrons d'abord que $B_\mu \in \mathfrak{su}(2)$, autrement dit, montrons que

$$B_\mu^\dagger = B_\mu, \quad (9.18)$$

$$\text{Tr}[B_\mu] = 0, \quad (9.19)$$

où la trace est bien sûr prise sur l'espace des matrices 2×2 . En effet,

$$(i) : \quad UU^\dagger = \mathbb{I} \implies \partial_\mu(UU^\dagger) = 0 \implies U(\partial_\mu U^\dagger) + (\partial_\mu U)U^\dagger = 0;$$

$$(ii) : \quad \text{soit } U = \mathbb{I} + i\alpha_a(x)T^a, \text{ alors } \partial_\mu U = i\partial_\mu\alpha_a(x)T^a,$$

$$\text{d'où, au plus bas ordre, } B_\mu = i(\mathbb{I} - i\alpha_a(x)T^a)(i\partial_\mu\alpha_a(x)T^a) = -\partial_\mu\alpha_a(x)T^a$$

$$\text{et donc } \text{Tr}[B_\mu] = -\partial_\mu\alpha_a(x)\text{Tr}[T^a] = 0.$$

Nous sommes prêts à continuer dans l'établissement de la théorie. Il suffit d'appliquer une procédure identique à celle qui conduit à l'électrodynamique. Le but principal étant, rappelons-le, d'ajouter suffisamment d'éléments au Lagrangien pour rendre ce dernier symétrique par rapport au groupe $SU(2)$. Pour cela, il faudra

1. introduire un champ A_μ ;
2. définir une dérivée covariante ;
3. imposer la bonne loi de transformation de A_μ sous la transformation de jauge ;
4. identifier le bon Lagrangien libre pour A_μ .

On obtiendra alors directement les termes d'interaction du champ de jauge et du champ spinoriel. Plus explicitement :

1. On introduit le nouveau champ de jauge pour éliminer le terme supplémentaire. Il doit donc être de la même nature que ce dernier. Donc

$$A_\mu(x) \in \mathfrak{su}(2) .$$

On peut donc le considérer de manière équivalente comme matrice 2×2 , ou comme trois champs vectoriels $A_\mu^a(x)$.

2. Définissons la dérivée covariante

$$D_\mu = \mathbb{I}_2 \partial_\mu - i A_\mu . \quad (9.20)$$

3. Choisissons la loi de transformation de A_μ qui annule le terme en B_μ :

$$A_\mu \longrightarrow U A_\mu U^\dagger - i (\partial_\mu U) U^\dagger . \quad (9.21)$$

4. Par analogie avec l'électrodynamique, définissons le tenseur $F_{\mu\nu}$ par

$$-i F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] . \quad (9.22)$$

Vérifions que nous avons bien défini les différents objets. Tout d'abord, D_μ est bien une dérivée covariante :

$$\begin{aligned} D_\mu \Psi &\longrightarrow (\partial_\mu - i U A_\mu U^\dagger - (\partial_\mu U) U^\dagger) U \Psi \\ &= (\partial_\mu U) \Psi + U \partial_\mu \Psi - i U A_\mu \Psi - (\partial_\mu U) \Psi = U (\partial_\mu - i A_\mu) \Psi \\ &= U D_\mu \Psi . \end{aligned}$$

En particulier, on a aussi $D_\mu \rightarrow U D_\mu U^\dagger$. Avec ceci, il est aisé de montrer que le groupe $SU(2)$ local est bien un groupe de symétrie du Lagrangien (sans considérer pour l'instant le terme libre pour A_μ). En effet,

$$i \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi \longrightarrow i \bar{\Psi} U^\dagger \gamma^\mu U D_\mu \Psi = i \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi ,$$

ce qui est naturel puisque nous avons précisément choisi le champ A_μ et sa loi de transformation dans ce but. De la définition (9.20), on trouve que le terme d'interaction fermion-champ de jauge est donné par

$$\mathcal{L}_I = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi A_\mu , \quad (9.23)$$

et il de la forme de l'interaction d'un courant associé au spineur avec le champ de jauge A_μ .

Il nous reste à construire le Lagrangien du champ de jauge seul. De la définition du tenseur $F_{\mu\nu}$, on en tire sa loi de transformation :

$$F_{\mu\nu} = i [D_\mu, D_\nu] \longrightarrow i [U D_\mu U^\dagger, U D_\nu U^\dagger] = i U [D_\mu, D_\nu] U^\dagger = U F_{\mu\nu} U^\dagger . \quad (9.24)$$

Par analogie avec le cas abélien, et afin d'assurer l'invariance de Lorentz, on cherche un terme quadratique en $F_{\mu\nu}$, qui soit de plus invariant sous les transformations de jauge. Comme $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \rightarrow U F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}U^\dagger$, la seule possibilité est

$$\mathcal{L}_A = C \operatorname{Tr} [F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] , \quad (9.25)$$

puisque la cyclicité de la trace permettra d'éliminer les U résiduels après transformation de jauge. Pour déterminer la constante, nous allons maintenant choisir la représentation de A_μ comme trois champs vectoriels. Pour chacun d'entre eux, nous allons logiquement imposer que le terme libre soit équivalent à celui du champ vectoriel de l'électrodynamique. Comme $A_\mu \in \mathfrak{su}(2)$, on peut le décomposer de la manière suivante :

$$A_\mu = g A_\mu^a \frac{\tau^a}{2} . \quad (9.26)$$

De plus, on peut donner la représentation explicite du tenseur $F_{\mu\nu}$ en terme du champ A_μ :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i [A_\mu, A_\nu] . \quad (9.27)$$

Ainsi, ce tenseur fait aussi partie de l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$, on peut donc l'écrire de même

$$F_{\mu\nu} = g F_{\mu\nu}^a \frac{\tau^a}{2} . \quad (9.28)$$

On peut alors insérer la décomposition (9.26) dans l'eq. (9.27), puis en identifiant les termes, calculer la représentation de $F_{\mu\nu}^a$ en terme de champs A_μ^a :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= g \frac{\tau^a}{2} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) - i g^2 \left[\frac{\tau^b}{2}, \frac{\tau^c}{2} \right] A_\mu^b A_\nu^c \\ &= g \frac{\tau^a}{2} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + g^2 \epsilon^{bcd} \frac{\tau^d}{2} A_\mu^b A_\nu^c = g \frac{\tau^a}{2} [(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + g \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c] , \end{aligned}$$

d'où

$$F_{\mu\nu}^a = (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + g \epsilon^{abc} A_\mu^b A_\nu^c . \quad (9.29)$$

Alors

$$C \operatorname{Tr} [F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] = C \frac{g^2}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} \underbrace{\operatorname{Tr} [\tau^a \tau^b]}_{=2\delta_{ab}} = C \frac{g^2}{2} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} .$$

On choisit donc $C = -\frac{1}{2g^2}$.

Nous avons donc obtenu une théorie complètement $SU(2)$ -local invariante, avec deux spineurs et trois champs de jauge. Rassemblons en un seul tableau tous les résultats :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2g^2} \operatorname{Tr} [F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}] + i \bar{\Psi} \gamma^\mu D_\mu \Psi - M \bar{\Psi} \Psi , \quad (9.30)$$

$$\text{où } D_\mu = \partial_\mu - i A_\mu , \quad (9.31)$$

$$\text{et } F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i [A_\mu, A_\nu] ; \quad (9.32)$$

$$\text{jauge : } \begin{cases} A_\mu & \longrightarrow U A_\mu U^\dagger - i (\partial_\mu U) U^\dagger , \\ \Psi & \longrightarrow U \Psi . \end{cases} \quad (9.33)$$

Nous avons déjà mis en évidence le terme d'interaction qui provient de la dérivée covariante. Parallèlement, on observe que la structure non commutative de l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$ induit directement des termes d'interactions entre les trois champs vectoriels. En effet,

$$F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} = (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}) + 4g \epsilon^{abc} \partial_\mu A_\nu^a A^{\mu b} A^{\nu c} + g^2 \epsilon^{abc} \epsilon^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e} ,$$

où on a bien les termes cinétiques traditionnels, mais en plus deux types d'interaction à trois et à quatre champs de jauge. C'est là une différence fondamentale avec l'électrodynamique quantique où les photons évoluent de manière indépendante les uns par rapport aux autres. La figure 9.2 montre les trois vertex possibles, avec leur facteur respectif.

$$= -ig \frac{\tau^a}{2} \gamma^\mu$$

$$= g\epsilon^{abc} [\eta^{\mu\nu}(k-p)^\rho + \eta^{\nu\rho}(p-q)^\mu + \eta^{\rho\mu}(q-k)^\nu]$$

$$= -ig^2 [\epsilon^{abe}\epsilon^{cde} (\eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) + \epsilon^{ace}\epsilon^{bde} (\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\rho}) + \epsilon^{ade}\epsilon^{bce} (\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma} - \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma})]$$

FIG. 9.2 – Les trois vertex de la théorie de jauge $\mathfrak{su}(2)$.

Finalement, on peut réécrire le Lagrangien (9.30) plus explicitement avec tous les indices. On obtient une expression passablement plus compliquée, mais tout à fait équivalente et plus révélatrice du contenu physique de la théorie :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi - M\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) (\partial^\mu A^{\nu a} - \partial^\nu A^{\mu a}) \\ & + gA_\mu^a \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} \Psi + g\epsilon^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A^{\mu b} A^{\nu c} - \frac{1}{4} g^2 \epsilon^{abc} \epsilon^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e}. \end{aligned} \quad (9.34)$$

A nouveau, il est intéressant de noter qu'il n'y qu'une seule constante de couplage en jeu, la symétrie de jauge ayant imposé une relation stricte entre les différents termes du Lagrangien d'interaction.

Remarque Historiquement, Yang et Mills tentèrent d'appliquer ceci à la théorie de l'interaction forte et de décrire ainsi les mésons vectoriels comme le triplet ρ^0, ρ^\pm . Malheureusement, ce fut un échec, puisque ces particules sont massives et que les bosons de jauge A_μ^a sont sans masse. Il est d'ailleurs impossible d'ajouter des termes de masse dans le Lagrangien qui respecteraient toutes les symétries présentes ici. Nous verrons par la suite comment résoudre ce problème essentiel : comment conférer aux bosons intermédiaires une masse non nulle? On devra faire appel à un principe nouveau, la brisure spontanée de symétrie et le mécanisme de Higgs.

9.2.2 Le groupe SU(3) : la chromodynamique quantique

La construction de la chromodynamique quantique, autrement dit la théorie de l'interaction forte, se fait maintenant très facilement. Dans ce cas-ci, l'interaction est engendrée par le groupe de jauge SU(3) dont on verra qu'il produit huit champs de jauge qu'on appelle des *gluons*. Quant aux spineurs de la théorie, ce sont les six *quarks*, dont chacun forme un triplet par rapport au groupe de symétrie.

L'algèbre $\mathfrak{su}(3)$ Des résultats généraux à propos des groupes SU(n), nous savons que les générateurs T^a qui forment l'algèbre $\mathfrak{su}(n)$ sont auto-adjoints et de trace nulle. De plus, on ajoute généralement une condition d'orthogonalité, ce qui donne :

$$T^a = T^{a\dagger}, \quad (9.35)$$

$$\text{Tr}(T^a) = 0, \quad (9.36)$$

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (9.37)$$

En reprenant les résultats du chapitre 8, nous savons directement que le groupe SU(3) est un groupe à $9 - 1 = 8$ paramètres réels. On aura donc huit générateurs aussi. Il est aisé de les construire. En effet, SU(2) étant un sous-groupe de SU(3) dont on connaît déjà les trois générateurs, on les trouve simplement en construisant les matrices 3×3 dont quatre éléments sont ceux des matrices de Pauli. On obtient alors neuf matrices différentes, mais l'ensemble est linéairement dépendant. Les trois matrices créées à partir de τ^3 sont dépendantes, on en regroupe deux en une seule pour trouver l'ensemble suivant :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On les appelle *matrices de Gell-Mann*. Les générateurs normalisés selon (9.37) sont finalement définis par

$$T^a = \frac{1}{2} \lambda^a. \quad (9.38)$$

Finalement, les constantes de structure f^{abc} ,

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i f^{abc} \frac{\lambda^c}{2}, \quad (9.39)$$

peuvent être explicitées de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \text{Tr}([T^a, T^b] T^d) &= i f^{abc} \text{Tr}(T^c T^d) = \frac{i}{2} f^{abc} \delta^{cd} = \frac{i}{2} f^{abd}, \\ \implies i f^{abc} &= 2 \text{Tr}([T^a, T^b] T^c). \end{aligned} \quad (9.40)$$

Des arguments théoriques plus sophistiqués, complétés par les expériences en physique des hautes énergies, demandent l'introduction de six champs spinoriels, les quarks, dont nous donnons directement les charges électriques Q respectives :

<i>up</i> u	<i>charm</i> c	<i>top</i> t	$Q = +\frac{2}{3}$
<i>down</i> d	<i>strange</i> s	<i>bottom</i> b	$Q = -\frac{1}{3}$

Chacun est considéré comme un triplet par rapport au groupe SU(3), i.e.

$$q_i = \begin{pmatrix} q_i^1 \\ q_i^2 \\ q_i^3 \end{pmatrix}, \quad (9.41)$$

où q_i représente l'un des six quarks. Ainsi chaque type de quark peut apparaître dans trois états différents (analogues des deux états d'isospin), qu'on appelle *couleur*, rouge, vert et bleu, d'où le nom de la théorie. Il est à noter ici que si le nombre de champs de jauge est déterminé par la dimension du groupe de jauge considéré, le nombre de spineurs dans la théorie n'est pas imposé par la symétrie. Les arguments doivent être d'une autre nature.

Toute la démarche que nous avons suivie pour établir le Lagrangien pour la symétrie SU(2) peut être reprise point par point ici. L'essentiel est à nouveau le fait qu'on impose la symétrie de jauge locale $U(x) \in \text{SU}(3)$. Alors

1. On introduit un champ de jauge $A_\mu \in \mathfrak{su}(3)$, ou de manière équivalente huit champs vectoriels A_μ^a , définis par

$$A_\mu = g_S A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}, \quad a = 1, \dots, 8.$$

Ce sont les huit *gluons*;

2. On définit la dérivée covariante par

$$D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu \equiv \partial_\mu - ig_S A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2};$$

3. On ajoute le terme libre pour le champ de jauge. Pour cela, on introduit le tenseur

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu],$$

d'où on obtient

$$F_{\mu\nu}^a = (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + g_S f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c; \quad (9.42)$$

4. On obtient alors le Lagrangien suivant

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \sum_{i=1}^6 i \bar{q}_i \gamma^\mu D_\mu q_i - \sum_{i=1}^6 m_i \bar{q}_i q_i. \quad (9.43)$$

La théorie est complète. Ce Lagrangien contient donc 7 paramètres non déterminés : les six masses des quarks et la constante de couplage g_S . Le lecteur peut se référer au chapitre 1 pour les valeurs numériques actuelles. Les vertex ont la même forme que ceux de la figure 9.2. En particulier, comme le groupe de jauge est non abélien, les gluons interagissent entre eux, comme illustré à la figure 9.3.

Avec la même simplicité que jusqu'ici, il est possible d'établir le Lagrangien de la chromodynamique quantique couplée à l'électrodynamique. Ce sera un Lagrangien invariant sous le groupe

$$\text{SU}(3) \times \text{U}(1) \quad (\text{chromo- \& électrodynamique}). \quad (9.44)$$

Pour cela, il suffit d'ajouter le champ vectoriel du photon A_μ , et d'ajouter à la dérivée covariante le terme correspondant :

$$\tilde{D}_\mu = \partial_\mu - ig_S A_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} - ieQ A_\mu, \quad (9.45)$$

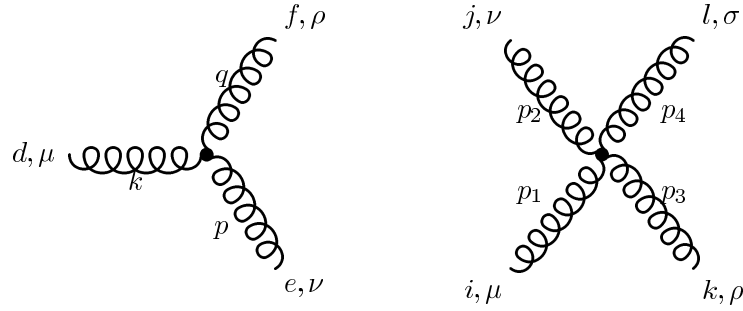


FIG. 9.3 – Les interactions des gluons dans la chromodynamique quantique

où $Q = \frac{2}{3}$ si la dérivée agit sur des quarks u , c , ou t , et $Q = -\frac{1}{3}$ pour les autres quarks. On obtient alors

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \sum_{i=1}^6 i\bar{q}_i \gamma^\mu \tilde{D}_\mu q_i - \sum_{i=1}^6 m_i \bar{q}_i q_i. \quad (9.46)$$

Notons que nous n'avons pas encore introduit l'électron dans la théorie. Ce Lagrangien contient donc six quarks, qui interagissent entre eux par l'intermédiaire des huit gluons pour l'interaction forte et du photon pour l'électromagnétisme.

9.2.3 Discussion qualitative et perspective historique

Historiquement, la notion de couleur est apparue avant que ne se développent les théories de jauge. On se trouvait à une époque où on connaissait déjà des centaines de particules, sans que l'ensemble ne présente de structure apparente. La question qui se posait était naturellement de tenter de ramener cet énorme système à un nombre restreint de particules fondamentales, dont les différents états liés formeraient toutes les autres particules, comme l'atome d'hydrogène est un état lié d'un électron et d'un proton. On introduisit alors trois quarks, qui devaient être des particules fermioniques pour former les *baryons*, états liés de trois quarks, et les *mésons*, paire quark-antiquark. Pour obtenir les charges entières des hadrons, il fallut leur attribuer des charges fractionnaires.

Pour un même état lié, on peut construire plusieurs particules de spin différent, en fonction du moment cinétique orbital de l'état lié. Ce modèle expliquait déjà bon nombre d'observation jusqu'alors incompréhensibles. Mais alors, pourquoi n'observait-on jamais de quark libre ? C'est là que fut introduite la notion de couleur. Considérons le $\Omega^- = sss$. Tous les quarks étant semblables et de spin $\frac{1}{2}$, donc fermioniques, l'état fondamental d'un état lié de trois s doit être formé de deux quarks sur une orbitale de type s , et le troisième sur une orbitale p . Le moment cinétique de la particule alors formée est $\frac{1}{2}$. On observait pourtant $\frac{3}{2}$. Il fallu alors introduire un nouveau nombre quantique qui permette de différencier les quarks l'un de l'autre pour pouvoir tous les placer sur une orbitale s et ainsi 'contourner' le principe d'exclusion. C'est alors qu'on attribua à chaque quark une couleur, hypothèse qui permettait de comprendre la structure de tous les baryons.

Comme on n'observait pas de quark isolé, on émit alors l'hypothèse suivante : tout état lié de quarks (et de gluons) doit être 'neutre', ou *blanc*, par rapport à cette nouvelle propriété quantique. Autrement dit, elle doit être invariante sous les transformations dans l'espace des couleurs, $SU(3)$. Tout quark portant une couleur, il ne peut exister qu'à l'intérieur d'un état lié. On explique du même coup la structure des baryons et des mésons. En effet,

baryons Prenons l'exemple du proton. On écrit sa structure comme

$$p = \epsilon_{ijk} u^i u^j d^k \quad (9.47)$$

En effet, une telle combinaison est invariante sous une transformation $U \in \text{SU}(3)$:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} u^i u^j d^k &\longrightarrow \epsilon_{ijk} U_{ii'} u^{i'} U_{jj'} u^{j'} U_{kk'} d^{k'} = (\epsilon_{ijk} U_{ii'} U_{jj'} U_{kk'}) u^{i'} u^{j'} d^{k'} \\ &= (\epsilon_{i'j'k'} \det U) u^{i'} u^{j'} d^{k'} = \epsilon_{i'j'k'} u^{i'} u^{j'} d^{k'} , \end{aligned}$$

par définition du déterminant.

mésons Prenons par exemple le pion π^- , qui s'écrit comme

$$\pi^- = \overline{u}^i d^i , \quad (9.48)$$

ce qui est aussi invariant :

$$\overline{u}^i d^i \longrightarrow \overline{u}^j (U^\dagger U)_{jk} d^k = \overline{u}^j \delta_{jk} d^k = \overline{u}^j d^j .$$

Ce n'est que plus tard qu'on a formellement introduit le concept de symétrie de jauge, globale puis locale, qui a permis de comprendre la nature des interactions entre quarks, par l'intermédiaire des gluons. Un nouveau problème se pose alors, que nous avons déjà soulevé dans le cadre de la symétrie $\text{SU}(2)$: les champs de jauge sont sans masse, mais on ne les observe pas. Le dernier concept alors introduit est celui de *liberté asymptotique*, qui explique le fait que les particules qui subissent l'interaction forte soient toujours confinées. Un argument théorique, basé sur la notion de polarisation du vide et sur le groupe de renormalisation montre que la constante de couplage g_S entre particules portant une couleur n'est pas une constante, mais est une fonction de l'énergie de la forme

$$g_S = g_S(E) \sim \frac{1}{\ln E} . \quad (9.49)$$

Ainsi, plus l'énergie de liaison est faible, plus le couplage est fort. En d'autres termes, plus la distance entre les composants est grande, plus forte est l'attraction, alors qu'ils sont essentiellement libres lorsque confinés les uns vers les autres. Il forment donc toujours des états liés et on ne peut pas les observer libres.

Une autre formulation de cette propriété se fait en terme de potentiel d'interaction entre quark et antiquark. On accepte généralement aujourd'hui un potentiel de la forme

$$U_S(r) \sim \text{const} \cdot r , \quad (9.50)$$

ce qui produit une force simplement constante. Une telle formule n'a reçu des preuves que numériques, grâce à des simulations sur réseau, mais la preuve analytique est toujours manquante : c'est d'ailleurs l'un des 'problèmes du siècle' à un million de dollars...

C'est aussi cette liberté asymptotique qui permet de justifier l'utilisation de la théorie de perturbation dans les calculs faisant intervenir l'interaction forte, alors même que la constante de couplage est de l'ordre de 1. Précisément, cette valeur n'est valable qu'à faible énergie, alors qu'elle est beaucoup plus faible si l'énergie est plus élevée. Il suffit d'effectuer le calcul perturbatif dans ce domaine-là de la théorie.

L'annihilation électron-positron Avant de passer aux brisures de symétrie, nous illustrons le modèle des quarks et des couleurs par un exemple expérimental où la théorie rencontre parfaitement la phénoménologie. Considérons l'annihilation électron-positron. Elle produit d'abord un photon

virtuel qui doit se désintégrer en d'autres particules. Ce peut aussi bien être une paire muon-antimuon que n'importe quelle paire quark-antiquark (voir la figure 9.4). Le fait que les quarks ne peuvent pas apparaître comme des particules libres vient compliquer le dernier cas. Lorsque deux quarks s'éloignent l'un de l'autre, l'énergie du système deviendra telle que de nouvelles paires quark-antiquark vont se former, qui peuvent alors se recombiner pour former deux 'jets' de hadrons. Ce sont ces deux jets que l'on détecte.

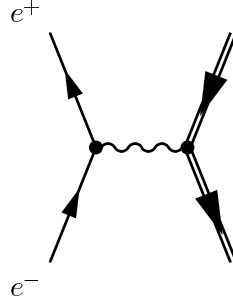


FIG. 9.4 – Le diagramme de l'annihilation électron-positron. La double ligne représente n'importe quel fermion, cinématiquement permis.

L'important ici est le fait que le diagramme est le même, seule change la constante de couplage entre le photon et les particules sortantes, liée au second vertex. On a déjà calculé la section efficace totale dans la limite $m_e \rightarrow 0$:

$$\sigma = \frac{4}{3} \frac{Q^2 \pi \alpha^2}{E_{CM}^2} \sqrt{1 - \frac{M^2}{E^2}} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{M^2}{E^2} \right] \approx \frac{\pi}{3} \left(\frac{Q\alpha}{E} \right)^2, \quad (9.51)$$

où Q est la charge des particules sortantes et E est l'énergie de l'électron dans le référentiel du centre de masse.

La condition nécessaire pour qu'un tel processus ait lieu est bien sûr

$$E \geq M. \quad (9.52)$$

Ainsi, en augmentant l'énergie de la collision, on rencontre une série de paliers à chaque fois que l'on remplit la condition ci-dessus pour un nouveau type de quark. D'abord le muon et le quarks les plus légers, puis le quark *charm*, le τ , le quark *bottom*, enfin le quark *top*, le plus lourd de tous. Une manière élégante de mettre ceci en évidence est de calculer le rapport

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)}, \quad (9.53)$$

où $s = (E_1 + E_2)^2$ est le carré de l'énergie dans le référentiel du centre de masse. Comme le numérateur de ce rapport rassemble tous les processus qui finissent en quark-antiquark, quelle que soit leur nature, ce rapport vaut simplement

$$R(s) = 3 \sum Q_i^2, \quad (9.54)$$

où la somme est prise sur tous les quarks dont la masse est inférieure à \sqrt{s} . Le facteur 3 provient des trois couleurs possibles : à chaque couleur correspond un diagramme différent qu'il faut ajouter

au calcul de la section efficace². On s'attend donc à obtenir un graphe en escalier, chaque marche représentant un nouveau quark cinématiquement autorisé. A basse énergie, où seuls les u , d et s apportent une contribution, on doit avoir

$$R_1 = 3 \left[\left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 + \left(-\frac{1}{3} \right)^2 \right] = 2, \quad (9.55)$$

puis au-dessus du c , $\sqrt{s} \sim 1.5 \text{ GeV}$,

$$R_2 = 2 + 3 \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{10}{3}, \quad (9.56)$$

au-dessus du b , $\sqrt{s} \sim 4.5 \text{ GeV}$,

$$R_3 = \frac{10}{3} + 3 \left(-\frac{1}{3} \right)^2 = \frac{11}{3}, \quad (9.57)$$

et on trouverait le t beaucoup plus loin. Le graphique expérimental est illustré à la figure 9.5³. Non seulement on observe les différentes marches, mais en plus la valeur du rapport correspond-elle aux attentes ci-dessus. C'est donc une preuve expérimentale du modèle des quarks, une indication de leur masse et de leur charge respective, mais aussi du nombre de couleurs, puisque le facteur 3 est déterminant pour la valeur de $R(s)$.

²Comme il s'agit alors de processus différents qui n'interfèrent pas entre eux, on ne somme pas les amplitudes, mais les sections efficaces directement.

³O. V. Zenin *et al.*, "A compilation of total cross section data on $e^+e^- \rightarrow \text{hadrons}$ and pQCD tests," arXiv :hep-ph/0110176.

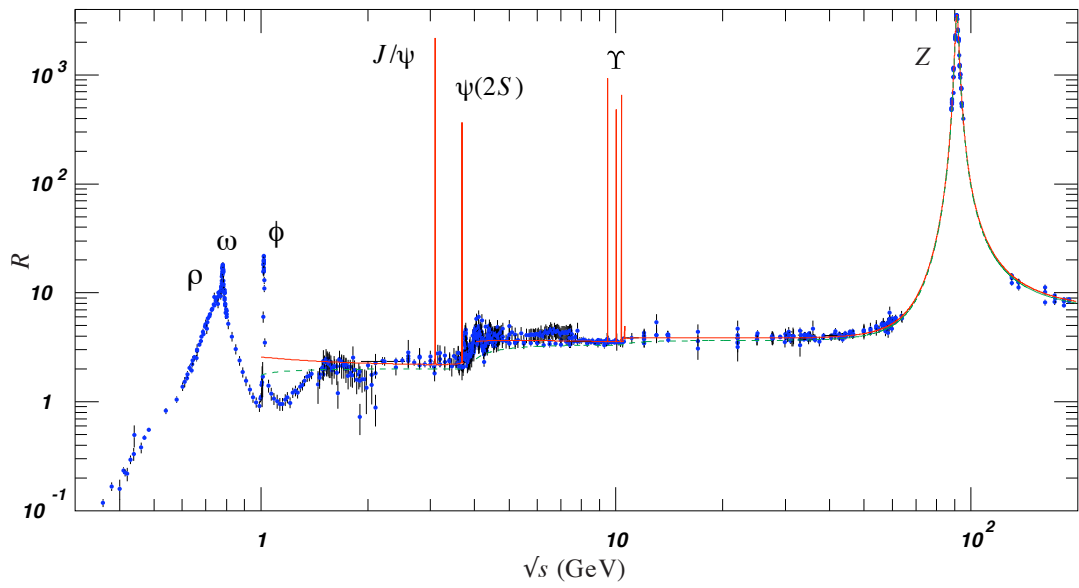


FIG. 9.5 – Graphique du rapport $R(s)$. La ligne pointillée correspond au calcul simple que nous avons mené dans ce chapitre. Pour le point qui nous intéresse ici, on peut ne pas considérer les pics qui correspondent à la production de particules précises. Les deux éléments importants sont (i) les deux escaliers qui correspondent aux quarks c puis b , et (ii) la valeur de R , entre 2 et 4, qui dépend explicitement des trois couleurs pour les quarks.

Chapitre 10

Brisures de symétrie et mécanisme de Higgs

Nous entamons l'étude de la dernière brique nécessaire à la construction du Modèle Standard, les brisures de symétrie. Nous étudierons à la suite le phénomène dans des cas de plus en plus complexes, en partant des symétries discrètes, puis continues, d'abord globales puis locales. Nous atteindrons alors le cas de la brisure spontanée de symétrie dans les théories de jauge, et nous pencherons plus particulièrement sur le cas de $SU(2)$, puisque c'est de là que naît le modèle électrofaible énoncé par Glashow-Weinberg-Salam à la fin des années soixante.

Cette dernière théorie repose lourdement sur un mécanisme générateur de masse pour des champs de jauge a priori sans masse comme nous l'avons déjà mentionné, le mécanisme de Higgs. Précisément, nous noterons alors que le terme de 'brisure de symétrie' est abusif dans le cas des théories de jauge locales. Le mécanisme de Higgs nécessite la présence d'au moins une particule scalaire, le fameux boson de Higgs, dont le LHC devrait enfin révéler l'existence. Finalement, c'est l'ensemble de la construction du Modèle Standard qui est mise en jeu par ce nouvel accélérateur, comme nous le comprendrons tantôt.

10.1 Brisure d'une symétrie globale, discrète

Commençons par un cas simple, la brisure spontanée de symétrie discrète dans la théorie $\lambda\phi^4$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4} \phi^4 . \quad (10.1)$$

Jusqu'ici nous avons toujours considéré le problème suivant

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I , \quad \text{où} \quad \begin{cases} \mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2} \pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 , \\ \mathcal{H}_I &= \frac{\lambda}{4} \phi^4 , \end{cases} \quad (10.2)$$

et utilisé la théorie de perturbations pour trouver les solutions. Ceci revient en fait à assumer que dans l'état du vide, l'espérance de l'opérateur de champ est nulle, $\langle \phi \rangle_0 = 0$, et à décrire la théorie à l'aide de fluctuations du champ autour de ce minimum stable. En particulier, il est important de comprendre ici que le concept de particule est simplement lié à la notion d'excitation autour de cet état fondamental. Tout le formalisme de la seconde quantification que nous avons développé dans la première partie de ce cours, puis les règles de Feynman pour le calcul des processus sont entièrement basés sur cette idée : un état du vide sur lequel des opérateurs de création et d'annihilation ajoutent

ou soustraient des excitations, qu'on interprète comme des particules. Une telle procédure fonctionne parfaitement tant que $m^2 > 0$, auquel cas l'état du vide est facilement identifiable et m est bien la masse de la particule.

La question qui se pose naturellement est de savoir si la théorie peut encore avoir du sens si le paramètre m^2 prend une valeur négative. Comment interpréter ce Lagrangien, quel est son spectre¹ ? La décomposition ci-dessus n'a en tout cas plus de sens. En effet, un aspect essentiel au succès de la procédure perturbative est le fait que l'Hamiltonien libre \mathcal{H}_0 possède un état fondamental bien défini. Or

$$\mathcal{U}_0[\phi] = \frac{1}{2}m^2\phi^2,$$

ne possède de minimum global que si $m^2 > 0$. Dans le cas $m^2 < 0$, le potentiel n'est pas borné inférieurement et il est donc impossible d'identifier un minimum autour duquel calculer une perturbation. Il faut donc abandonner maintenant la décomposition de l'éq. (10.2) et reconsidérer le potentiel total

$$\mathcal{U}[\phi] = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4. \quad (10.3)$$

Outre le point $\phi = 0$, celui-ci présente deux autres points stationnaires en

$$v = \phi_{min} = \pm \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}, \quad (10.4)$$

qui n'existent que lorsque $m^2 < 0$ et sont alors deux minima globaux du potentiel. On a donc identifié un nouvel état du vide dans ce cas-ci, qui n'est plus en $\phi = 0$. La figure 10.1 illustre le potentiel dans les deux cas.

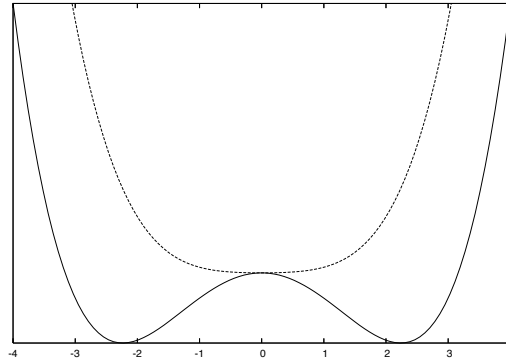


FIG. 10.1 – Les deux états du potentiel lorsque $m^2 > 0$, avec un minimum global en $\phi = 0$, puis lorsque $m^2 < 0$, où deux minima apparaissent, qui brisent la symétrie discrète.

Pour que le calcul perturbatif ait un sens (tant physiquement que mathématiquement, d'ailleurs), nous devons considérer l'un de ces minima comme un état du vide, et analyser les excitations du champ autour de ce nouveau minimum. Pour cela, écrivons

$$\phi(x) = v + h(x), \quad (10.5)$$

¹En physique des particules, on appelle *spectre* d'un Lagrangien son contenu en particules physiques bien définies.

avec v donné par l'une des solutions, arbitrairement choisie, de l'éq. (10.4), et $h(x)$ est désormais la nouvelle variable physiquement significative. Injectons cet ansatz dans le Lagrangien. On obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} m^2 (v^2 + 2vh + h^2) - \frac{\lambda}{4} (v^4 + 4v^3h + 6v^2h^2 + 4vh^3 + h^4) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \left\{ \underbrace{h(m^2v + \lambda v^3)}_{=0} + \underbrace{h^2 \left(\frac{1}{2} m^2 + \frac{3}{2} \lambda v^2 \right)}_{=-m^2} + \lambda v h^3 + \frac{\lambda}{4} h^4 + \left(\frac{1}{2} m^2 v^2 - \frac{\lambda}{4} v^4 \right) \right\}.\end{aligned}$$

Le dernier terme n'est qu'une constante que l'on peut laisser tomber puisqu'elle n'influence pas la physique du système. Nous avons donc obtenu la densité Lagrangienne suivante :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \mathcal{V}[h], \quad \text{où} \quad \mathcal{V}[h] = \frac{1}{2} (-2m^2) h^2 + \lambda v h^3 + \frac{\lambda}{4} h^4. \quad (10.6)$$

En effectuant le développement perturbatif correct autour de v , nous avons ainsi pu mettre en évidence le contenu physique du Lagrangien dans le cas $m^2 < 0$. Il s'agit d'un champ scalaire h , de masse $m_h^2 = -2m^2 > 0$, et qui présente deux termes de self interaction, l'un $\sim h^3$ et le second $\sim h^4$, et dont les constantes de couplage sont reliées entre elles. La théorie est donc parfaitement définie.

Par contre, le Lagrangien original était invariant sous la transformation discrète $\phi \rightarrow -\phi$. Dans sa nouvelle formulation, éq. (10.6), il a perdu cette symétrie à cause du terme en h^3 dans le potentiel. Il est bien clair que la symétrie fondamentale existe toujours, mais elle ne concerne plus le champ physique h . Ceci vient naturellement du fait que nous avons dû choisir l'un des deux minima du potentiel. Ce choix arbitraire d'une des deux solutions est précisément ce qu'on appelle une *brisure spontanée de symétrie*.

En résumé, la transition du paramètre m^2 vers des valeurs négatives a modifié l'interprétation physique du Lagrangien, dans lequel il a été nécessaire de transférer l'attention du champ ϕ au champ 'shifté' h . Ceci a brisé la symétrie discrète, mais a permis d'obtenir la théorie d'un champ scalaire parfaitement définie, dont la signification physique est claire et l'interprétation en termes de particules possible et justifiée.

10.2 Brisure d'une symétrie globale, continue

10.2.1 Symétrie U(1)

Nous passons maintenant à la généralisation naturelle du cas précédent, la brisure de symétrie continue pour le champ scalaire complexe :

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^* - \lambda (\phi \phi^*)^2. \quad (10.7)$$

Lorsque $m^2 > 0$, nous connaissons parfaitement le spectre de la théorie, une paire particule-antiparticule. De plus, le Lagrangien est clairement invariant sous les transformations de phase du champ du type $\phi \rightarrow \exp(i\alpha)\phi$. Il est donc U(1)-invariant.

Comme dans le cas précédent, nous posons maintenant la question du contenu de la théorie dans le cas $m^2 < 0$. Considérons le potentiel

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}(\text{Re}(\phi), \text{Im}(\phi)) = m^2 \phi \phi^* + \lambda (\phi \phi^*)^2. \quad (10.8)$$

Il s'agit d'un potentiel en 'chapeau mexicain', comme l'illustre la figure 10.2. Comme dans le cas précédent, il s'agit d'identifier le nouvel état du vide. On trouve immédiatement la condition

$$w^2 = (\phi \phi^*)_{\min} = -\frac{m^2}{2\lambda}, \quad (10.9)$$

ou encore

$$\phi_{min}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}} e^{i\alpha}, \quad \text{pour } \alpha \in [0, 2\pi). \quad (10.10)$$

On a donc ici un ensemble continu d'états du vide paramétrisés par α , qui forme une variété, dans ce cas-ci le cercle \mathcal{S}^1 .

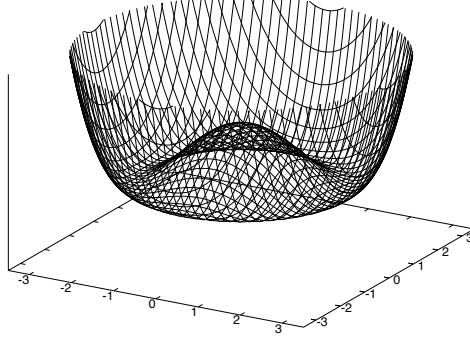


FIG. 10.2 – Le potentiel en chapeau mexicain, qui apparaît lorsque $m^2 < 0$.

Posons alors $v = \sqrt{-\frac{m^2}{\lambda}}$, introduisons deux champs réels $h(x)$ et $\chi(x)$, et développons le champ autour d'un des minima :

$$\phi(x) = \frac{e^{i\alpha}}{\sqrt{2}} (v + h(x) + i\chi(x)). \quad (10.11)$$

Notons qu'à nouveau, nous avons fait ici un choix arbitraire d'un des états du vide, car α est définitivement fixée. Alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu (h + i\chi) \partial^\mu (h - i\chi) - \frac{1}{2} m^2 (v^2 + h^2 + \chi^2 + 2vh) \\ &\quad - \frac{\lambda}{4} (v^4 + h^4 + \chi^4 + 4v^2 h^2 + 2v^2 \chi^2 + 2h^2 \chi^2 + 4v^3 h + 4vh^3 + 4v\chi^2) \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \left\{ \underbrace{h(m^2 v + \lambda v^3)}_{=0} + \underbrace{h^2 \left(\frac{1}{2} m^2 + \frac{3}{2} \lambda v^2 \right)}_{=-2m^2} + \underbrace{\chi^2 \left(\frac{1}{2} m^2 + \frac{\lambda}{2} v^2 \right)}_{=0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{4} (h^2 + \chi^2)^2 + \lambda v h (h^2 + \chi^2) + \left(\frac{1}{2} m^2 v^2 + \frac{\lambda}{4} v^4 \right) \right\}. \end{aligned}$$

En laissant tomber les termes constants, on obtient finalement

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h + \frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi - \mathcal{V}[h, \chi], \quad (10.12)$$

$$\text{où } \mathcal{V}[h, \chi] = \frac{1}{2} (-2m^2) h^2 + \frac{\lambda}{4} \left\{ (h^2 + \chi^2)^2 + 4vh (h^2 + \chi^2) \right\}. \quad (10.13)$$

Le contenu physique de la théorie est à nouveau parfaitement clair. Les termes linéaires dans les champs h et χ ont disparu puisqu'on a effectué un développement perturbatif autour du minimum du potentiel. Le champ h est un champ scalaire massif de masse $m_h^2 = -2m^2 > 0$, alors que χ est un champ scalaire sans masse. Finalement, on a une série de termes d'interaction d'ordre trois et

supérieur, dont les constantes de couplage satisfont à nouveau à des relations bien définies, imposées par la procédure.

Du point de vue des symétries, c'est la symétrie $U(1)$ qui est ici brisée. En effet, le Lagrangien (10.12) n'est clairement plus invariant sous les transformations de $O(2) \sim U(1)$, en raison des termes de masse différents pour h et χ , et du second terme d'interaction. C'est à nouveau lors du choix arbitraire d'un état du vide, i.e. le choix ici d'une phase α , que la symétrie a été spontanément brisée pour m^2 négatif. Insistons encore sur le fait que les manipulations que nous avons effectuées ne modifient pas le contenu du Lagrangien, mais ne font qu'explicitement sa signification physique. En particulier, on vérifie que le nombre de degrés de liberté n'a pas changé : un champ complexe représente deux degrés de liberté réels, et c'est bien ce qu'on retrouve à la fin de la procédure, avec les deux champs scalaires réels h et χ .

Nous avons constaté l'apparition d'un boson de spin 0 et de masse nulle lors de la brisure de cette symétrie continue, ce qui n'était pas arrivé dans le cas discret. En fait, il s'agit ici de la réalisation particulière du théorème de Goldstone, dont on donne ici deux énoncés équivalents² :

Théorème (Goldstone)

- i. S'il existe une transformation continue par rapport à laquelle le Lagrangien est invariant, alors deux cas sont possibles :
 1. l'état du vide est lui aussi invariant sous cette transformation ;
 2. il existe une particule sans spin et de masse nulle.
- ii. Pour chaque symétrie continue spontanément brisée, il apparaît une particule de masse nulle et de spin 0, les *bosons de Goldstone*.

Nous donnons ici une esquisse de preuve dans le cas d'une théorie à n champs sans spin ϕ^i . Soit le Lagrangien

$$\mathcal{L}[\phi^i, \partial_\mu \phi^i] = \mathcal{T}[\phi^i] - \mathcal{V}[\phi^i],$$

où $\mathcal{T}[\phi^i]$ est la partie cinétique du Lagrangien qui dépend des dérivées des champs, et $\mathcal{V}[\phi^i]$ est le potentiel. On suppose que \mathcal{L} est invariant sous la transformation continue donnée par

$$\phi^a \longrightarrow \phi^a + \alpha T_b^a \phi^b,$$

où T est le générateur de la transformation et α est une constante. Définissons un état du vide ϕ_0^i comme la valeur du champ qui minimise le potentiel, i.e. pour laquelle

$$\left. \frac{D}{D\phi} \mathcal{V}[\phi] \right|_{\phi^i = \phi_0^i} = 0.$$

L'hypothèse essentielle ici est de supposer que l'état du vide ϕ_0 n'est pas lui-même invariant sous la transformation, autrement dit que

$$\alpha T_b^a \phi_0^b \neq 0. \quad (10.14)$$

Développons le potentiel autour de son minimum :

$$\mathcal{V}[\phi] = \mathcal{V}[\phi_0] + \frac{1}{2}(\phi - \phi_0)^a (\phi - \phi_0)^b \left(\frac{\partial}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \mathcal{V}[\phi] \right)_{\phi = \phi_0} + \dots$$

²Le premier est la traduction directe de l'énoncé original, cf J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, "Broken Symmetries", Phys. Rev. **127**, 965 (1962).

Le terme linéaire a disparu précisément parce qu'on a effectué le développement autour du minimum du potentiel. On *définit* maintenant la matrice des masses comme la courbure du potentiel autour de son minimum, i.e.

$$m_{ij}^2 = \left(\frac{\partial}{\partial \phi^i \partial \phi^j} \mathcal{V}[\phi] \right)_{\phi=\phi_0}, \quad (10.15)$$

et les masses des particules correspondent bien évidemment aux valeurs propres de cette matrice. Si le Lagrangien est invariant sous la transformation globale donnée ci-dessus, alors son potentiel lui-même doit aussi l'être. Dans le développement du potentiel, choisissons précisément une transformation de symétrie, i.e. $\delta \phi^a = \alpha T_b^a \phi^b$. Alors

$$0 = \delta \mathcal{V} = \mathcal{V}[\phi] - \mathcal{V}[\phi_0] = (\alpha T_b^i \phi_0^b) (\alpha T_c^j \phi_0^c) m_{ij}^2.$$

Comme l'état du vide n'est pas invariant sous la transformation de symétrie, cf l'éq. (10.14), Le vecteur $(T_b^1 \phi^b, \dots, T_b^n \phi^b)$ est non nul et l'équation ci-dessus montre précisément que c'est un vecteur propre de la matrice des masses pour la valeur propre 0. Nous avons ainsi mis en évidence une particule scalaire de masse nulle, ce qui termine la preuve. \blacklozenge

Ce théorème présente une interprétation géométrique immédiate. Reprenons le potentiel en chapeau mexicain de la figure 10.2. Choisissons un état du vide particulier. Observons alors la courbure du potentiel autour de ce point : le long de la variété des états qui minimisent le potentiel, la courbure est naturellement nulle, par définition de cette variété. On doit donc avoir une particule de masse nulle. Dans le cas de la brisure de k paramètres de symétrie, la variété des états du vide sera une variété de dimension k , et la courbure le long de chacune de ces dimension sera nulle, d'où le théorème de Goldstone.

10.2.2 Symétrie U(2)

Nous donnons finalement un exemple légèrement plus compliqué d'une telle brisure de symétrie globale. Soit le champ à deux composantes complexes $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$, et le Lagrangien

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \Phi^\dagger) (\partial^\mu \Phi) - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2. \quad (10.16)$$

Clairement, cette densité lagrangienne décrit quatre degrés de liberté réels et elle est invariante sous les transformations de U(2), $\Phi \rightarrow U\Phi$. Dans le cas $m^2 > 0$, le spectre de la théorie est trivial : il s'agit de deux paires particule-antiparticule. Par contre, si $m^2 < 0$, alors l'ensemble des minima du potentiel est donné par la relation

$$\Phi^\dagger \Phi = -\frac{m^2}{2\lambda}. \quad (10.17)$$

Ecrivons $\Phi_1 = \phi_1 + i\phi_2$ et $\Phi_2 = \phi_3 + i\phi_4$. L'équation ci-dessus devient alors $\sum_{i=1}^4 \phi_i^2 = -\frac{m^2}{2\lambda}$. C'est l'équation d'une sphère \mathcal{S}^3 . Il est donc apparu une variété de dimension trois qui décrit l'ensemble des états du vide possibles.

La démarche est maintenant identique. Posons $v^2 = -\frac{m^2}{\lambda}$. On peut décrire un état du vide arbitraire, solution de l'éq. (10.17) par

$$\Phi_0 = U \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad U \in \text{U}(2), \text{ fixé}. \quad (10.18)$$

Pour effectuer un développement perturbatif, notons

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} U \begin{pmatrix} \chi^1 + i\chi^2 \\ v + h + i\chi^3 \end{pmatrix}. \quad (10.19)$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la substitution de cet ansatz dans le Lagrangien (10.16) produit l'expression suivante, après avoir utilisé la définition de v et soustrait les termes constants :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (\partial_\mu \chi^i)^2 - \frac{1}{2} (-2m^2)^2 h^2 - \frac{\lambda}{4} \left\{ \left(\sum_{i=1}^3 \chi^{i2} + h^2 \right)^2 + 4vh \left(\sum_{i=1}^3 \chi^{i2} + h^2 \right) \right\}. \quad (10.20)$$

On a donc spontanément brisé la symétrie $U(2)$ en choisissant un état du vide particulier autour duquel le développement perturbatif a pu être effectué. Il reste finalement un boson massif, le h de masse $m_h = -2m^2 > 0$, et trois bosons de Goldstone χ^i .

Tout ceci est certes intéressant et élégant, mais rencontre un problème essentiel : aucune particules de Goldstone n'a jamais été détectée. Heureusement, l'introduction des symétries de jauge *locales* va nous permettre de nous en débarrasser : c'est le mécanisme de Higgs, qui sera à l'origine de la masse des bosons de jauge dans la théorie électrofaible. Cette ultime étape met en jeu tous les concepts introduits jusqu'ici, à savoir groupes de symétrie de jauge locale, champs de jauge, et enfin brisure de symétrie.

10.3 Symétrie locale, continue, et mécanisme de Higgs

Pour commencer et en saisir les éléments essentiels, nous allons illustrer le mécanisme de Higgs dans le cas de la symétrie de jauge abélienne $U(1)$, l'électrodynamique quantique scalaire. On part du Lagrangien d'un champ scalaire complexe, auquel on a imposé l'invariance de jauge et donc introduit un champ vectoriel a priori sans masse A_μ :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2, \quad (10.21)$$

où $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ et $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. La situation est connue dans le cas $m^2 > 0$: il s'agit d'une théorie pour une paire particule-antiparticule scalaire massive et un champ vectoriel sans masse. Nous allons montrer dans ce qui suit que si $m^2 < 0$, et que la symétrie est spontanément brisée, alors la théorie contient en fait un champ scalaire massif et un champ vectoriel massif.

Si la symétrie était globale, on aurait par le théorème de Goldstone un champ scalaire massif et un boson de Goldstone sans masse, et toujours le champ de jauge sans masse. Mais précisément, on a noté au chapitre 9 que le champ vectoriel A_μ n'est que l'expression de la symétrie de jauge locale pour ϕ : la brisure de symétrie dans ce cas-ci doit donc aussi prendre en compte le champ de jauge.

Nous avons déjà résolu le problème de la brisure de symétrie $U(1)$ dans le secteur scalaire de cette théorie. On peut se référer à l'éq. (10.12) pour l'expression du potentiel $\mathcal{V}[h, \chi]$. La nouveauté ici provient du terme cinétique, par l'intermédiaire de la dérivée covariante. En effet,

$$\begin{aligned} D_\mu \phi &= (\partial_\mu - ieA_\mu) \frac{1}{\sqrt{2}} (v + h + i\chi) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\mu h + i\partial_\mu \chi) - \frac{1}{\sqrt{2}} ieA_\mu (v + h + i\chi) \\ (D_\mu \phi)^* &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\mu h - i\partial_\mu \chi) + \frac{1}{\sqrt{2}} ieA_\mu (v + h - i\chi) \\ \Rightarrow |D_\mu \phi|^2 &= \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 + \frac{e^2}{2} A_\mu A^\mu [(v + h)^2 + \chi^2] + e(A_\mu \partial^\mu h) \chi - e(v + h) A_\mu \partial^\mu \chi. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 - \frac{1}{2} (-2m^2) h^2 \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} e^2 v^2 A^\mu \left(A_\mu - \frac{2}{ev} \partial_\mu \chi \right) \\ & + (\text{termes d'ordre supérieurs, interactions}) . \end{aligned} \quad (10.22)$$

La première ligne de ce Lagrangien correspond clairement à la partie libre du champ scalaire h . Par contre, l'interprétation des champs A_μ et χ est délicate. En particulier, le terme en $A_\mu \partial^\mu \chi$ ne peut pas recevoir de signification satisfaisante. Par contre, si nous introduisons un nouveau champ W_μ , défini par

$$W_\mu = A_\mu - \frac{1}{ev} \partial_\mu \chi , \quad (10.23)$$

l'ensemble prend un sens clair. Constatons d'abord l'analogie formelle de cette expression avec une simple transformation de jauge du champ A_μ , avec la fonction de jauge $-\frac{1}{v}\chi(x)$. Ceci nous permet directement d'écrire $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu, W} F_W^{\mu\nu}$, où $F_{\mu\nu, W} = \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu$. De plus,

$$\frac{1}{2} e^2 v^2 W_\mu W^\mu = \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi)^2 - ev A_\mu \partial^\mu \chi .$$

Le Lagrangien libre s'écrit alors

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu h)^2 - \frac{1}{2} (-2m^2) h^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu, W} F_W^{\mu\nu} + \frac{1}{2} e^2 v^2 W_\mu W^\mu . \quad (10.24)$$

A ce stade, on peut finalement interpréter le contenu physique de la théorie. Ce Lagrangien décrit un champ scalaire massif, le *boson de Higgs*, et un champ vectoriel massif, de masse $m_W^2 = e^2 v^2$. Par l'intermédiaire de la définition du champ W_μ , on a en fait utilisé la liberté de jauge pour le champ vectoriel pour éliminer le boson de Goldstone χ . On voit aussi pourquoi ce mécanisme n'était pas possible dans le cas de la symétrie globale, c'est le champ de Goldstone lui-même, pas forcément constant, qui représente la fonction de jauge à choisir. La définition (10.23) est donc bien le choix judicieux d'une jauge particulière. Il est intéressant d'analyser le parcours des différents degrés de liberté dans le processus. Nous sommes partis d'un Lagrangien à quatre degrés de liberté, deux liés au champ scalaire complexe, et deux associés au champ vectoriel sans masse. La symétrie de jauge globale et la condition $m^2 < 0$ auraient modifié l'interprétation physique du domaine scalaire de la théorie, avec un champ scalaire réel massif et un degré de liberté associé au boson de Goldstone. La symétrie de jauge *locale* a finalement permis de mettre en évidence un degré de liberté associé au champ de Higgs, et *trois* degrés de liberté associés au champ vectoriel, le champ de Goldstone ayant été effacé par la liberté de jauge et absorbé dans le fait que le boson de jauge acquiert une masse. C'est le fameux *mécanisme de Higgs*, qui permet de conférer de la masse aux bosons vectoriels dans les théories de jauge. On notera au passage l'analogie du mécanisme de Higgs et de l'effet Meissner dans la théorie de la supraconductivité.

Il est possible de redériver ces résultats d'une manière plus simple mais peut-être moins transparente, qui fait appel dès le départ à un choix de jauge bien défini. En particulier, ce calcul a le mérite de bien mettre en évidence la différence entre mécanisme de Higgs et brisure de symétrie. A cette fin rappelons le comportement des champs sous une transformation de jauge :

$$\begin{cases} \phi & \longrightarrow & \phi' = \exp(i\alpha) \phi , \\ A_\mu & \longrightarrow & A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha . \end{cases} \quad (10.25)$$

L'invariance du Lagrangien par rapport à ce type de transformation est l'expression du fait que les champs transformés ϕ' et A'_μ représentent exactement la même physique que les champs originaux.

En effet, le Lagrangien contient toute l'information physique concernant le système. En ce sens-là, *il n'y a pas véritablement une infinité d'états du vide physiques, mais bien un seul*, puisqu'ils sont tous reliés entre eux par des transformations de jauge. Utilisons alors notre liberté de jauge, et choisissons une jauge α telle que

$$e^{i\alpha} = \sqrt{\frac{\phi^*}{\phi}}, \quad (10.26)$$

c'est-à-dire

$$\alpha = \frac{1}{2i} \ln \left(\frac{\phi^*}{\phi} \right). \quad (10.27)$$

A nouveau, un tel choix implique directement que α est une fonction de x , il n'est donc rendu possible que si la symétrie est locale.

En utilisant l'éq. (10.25), on trouve l'expression des nouveaux champs :

$$\phi' = \sqrt{\phi^* \phi} \in \mathbb{R}, \quad (10.28)$$

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{2ie} \left(\frac{\partial_\mu \phi^*}{\phi^*} - \frac{\partial_\mu \phi}{\phi} \right) = \frac{i}{2e} \frac{\phi^* \overleftrightarrow{D}_\mu \phi}{\phi^* \phi}. \quad (10.29)$$

Dans cette notation, il est alors évident que ces champs ont des expressions invariantes sous des transformations de jauge, on parle de variables jauge-indépendantes, ou encore de champs écrits dans une *jauge unitaire*. Comme ϕ' est réel, le terme cinétique pour ϕ devient

$$(D_\mu \phi)'{}^* (D^\mu \phi)' = (D'_\mu \phi') (D'^\mu \phi') = (\partial_\mu \phi' + ie A'_\mu \phi') (\partial^\mu \phi' - ie A'^\mu_\mu \phi') = (\partial_\mu \phi')^2 + (e A'_\mu \phi')^2.$$

Le Lagrangien s'écrit alors (on ne note plus les $'$)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - m^2 \phi^2 - \lambda \phi^4 + \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + e^2 \phi^2 A_\mu A^\mu. \quad (10.30)$$

Nous avons maintenant épuisé notre liberté de jauge. On constate immédiatement que dans cette jauge unitaire, on est ramené au cas du début de ce chapitre. Dans le cas $m^2 < 0$, il suffit de développer ϕ , champ réel, autour d'un des minima du potentiel

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + h(x)], \quad (10.31)$$

pour finalement obtenir un Lagrangien totalement explicite :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} m_h^2 h^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_A^2 A_\mu A^\mu + \lambda v h^3 + \frac{\lambda}{4} h^4 + \frac{1}{2} e^2 h^2 A_\mu A^\mu + e^2 v h A_\mu A^\mu, \quad (10.32)$$

où

$$m_h^2 = -2m^2 \quad \text{et} \quad m_A^2 = e^2 v^2. \quad (10.33)$$

On a donc obtenu le même résultat que par la méthode précédente, soit un champ scalaire réel massif, le boson de Higgs, un champ de jauge vectoriel massif aussi, avec cette fois-ci tous les termes d'interaction fournis explicitement. On pourra se référer à la figure (10.3) pour les différents vertex de cette théorie, qui précède notre analyse du modèle électrofaible.

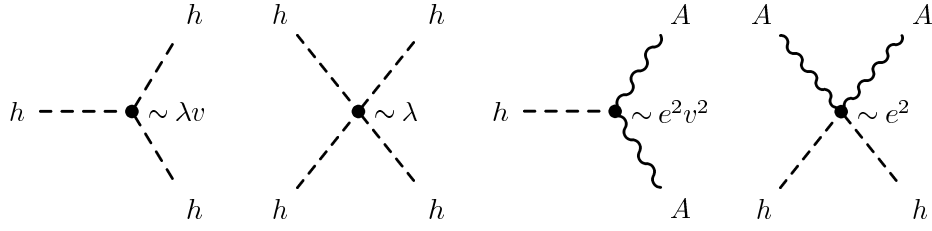


FIG. 10.3 – Les quatre interactions du Lagrangien pour la symétrie locale U(1), après l'action du mécanisme de Higgs

Remarque Nous aimerions à ce point souligner un certain nombre d'éléments clés de la démarche ci-dessus. A chaque fois que nous avons réécrit le Lagrangien, nous n'avons absolument pas modifié son contenu physique. Les deux aspects essentiels que nous avons utilisés sont simplement le choix d'une jauge particulière, la jauge unitaire, et l'écriture du Lagrangien en terme de fluctuations du champ autour d'un état du vide particulier. Le principe derrière le mécanisme de Higgs est le transfert d'un degré de liberté associé à l'origine au champ scalaire complexe vers le champ de jauge vectoriel qui par là acquière une masse. Nous avons donc atteint l'objectif fixé dès l'introduction de ce chapitre : identifier un mécanisme générateur de masse pour les champs de jauge, a priori sans masse par le fait de la symétrie de jauge.

Nous avons proposé ici deux approches du phénomène, qui contiennent fondamentalement les mêmes éléments. Ils ne diffèrent au fond que dans l'ordre d'application des éléments. Dans le premier cas, on brise d'abord la symétrie, pour ensuite utiliser la liberté de jauge et constater qu'il n'y a pas véritablement de brisure, alors que la seconde démarche procède en sens inverse, d'abord par un choix de jauge unitaire, puis par la brisure spontanée de symétrie.

Avec le double outil des théories de jauge et du mécanisme de Higgs en main, nous pouvons enfin décrire le modèle électrofaible GWS et ainsi terminer la construction du Modèle Standard.

Chapitre 11

Le Modèle Standard

Dans ce chapitre, nous allons enfin mettre en commun tous les éléments construits séparément depuis le début de la seconde partie de ce cours afin d'établir la théorie électrofaible, pièce essentielle du Modèle Standard de la physique des particules. Nous serons alors en mesure de décrire toutes les interactions entre tous les types de champs, ce qui nous donnera une image globale, mais certes encore relativement compliquée. En particulier, nous devons introduire des angles de mélange, qui décrivent le fait que les états propres par rapport à un certain groupe de jauge ne le sont pas forcément par rapport à un autre, ou ne diagonalisent pas la matrice des masses.

11.1 Le modèle de Weinberg

A la fin des années '50, plusieurs indices théoriques suggérèrent l'existence d'une particule intermédiaire massive et neutre pour l'interaction faible. C'est en 1961 que Glashow¹ proposa pour la première fois une unification des interactions faible et électromagnétique. En 1967, Weinberg², puis plus tard Salam³, proposèrent un modèle dit *électrofaible*, qui contenait précisément deux champs de jauge non chargés, l'un de masse nulle correspondant au photon, l'autre, lourd, au boson intermédiaire Z^0 .

11.1.1 Groupe de jauge et représentation chirale

Le modèle électrofaible est une théorie de jauge locale pour le groupe de jauge

$$\mathcal{G}_{EW} = \text{SU}(2) \times \text{U}(1) . \quad (11.1)$$

A chacun de ces sous-groupes correspond une constante de couplage, g et g' , respectivement. Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, la symétrie de jauge locale impose l'introduction des champs de jauge associés à chaque sous-groupe. Notons-les A_μ^a , $a = 1, 2, 3$, et B_μ , respectivement.

Considérons maintenant les champs que nous souhaitons inclure dans le modèle. Du point de vue des spineurs, la théorie électrofaible décrit les six leptons que nous avons brièvement introduits au chapitre 1 : l'électron, le muon, le τ et les trois neutrinos correspondants. Il s'avère que la physique du secteur électrofaible est une physique *chirale*, qu'il s'agit de décrire en termes de champs gauchers

¹S. L. Glashow, "Partial Symmetries Of Weak Interactions", Nucl. Phys. **22** (1961) 579.

²S. Weinberg, "A Model Of Leptons", Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.

³A. Salam and J. Strathdee, "A Renormalizable Gauge Model Of Lepton Interactions", Nuovo Cim. **11A** (1972) 397, par exemple.

et droitiers. Rappelons qu'étant donné un spineur Ψ , on définit les spineurs gaucher Ψ_L et droitier Ψ_R par

$$\Psi_L = \frac{\mathbb{I} + \gamma_5}{2} \Psi \quad \text{et} \quad \Psi_R = \frac{\mathbb{I} - \gamma_5}{2} \Psi. \quad (11.2)$$

Pour chaque champ, il s'agit de définir son comportement par rapport aux transformations du groupe de jauge, i.e. de lui attribuer sa 'charge' correspondante. Par rapport à $U(1)$, on a

$$\Psi \longrightarrow e^{iY\alpha(x)} \Psi, \quad (11.3)$$

et on appelle le nombre Y l'*hypercharge*. Par rapport à $SU(2)$, deux cas sont possibles :

$$\Psi \longrightarrow U(x) \Psi \quad (11.4)$$

$$\text{ou} \quad \Psi \longrightarrow \Psi. \quad (11.5)$$

On appellera le premier type de champ un *doublet*, et le second un *singulet*. Pour rendre cette notion plus claire, notons qu'une telle distinction est en tout point identique à celle d'un vecteur et un scalaire par rapport au groupe de Lorentz : le doublet est l'analogue du vecteur, alors que le singulet, invariant par rapport à la transformation, est analogue au scalaire⁴.

Le tableau ci-dessous contient tous les champs composant le modèle électrofaible : un champ scalaire et trois familles de champs spinoriels. Il n'admet pas d'autre justification que son adéquation aux résultats expérimentaux, et sa capacité à décrire dans un cadre unifié la structure des particules élémentaires.

Groupe de jauge :	$SU(2)$	\times	$U(1)$
Constantes de couplage	g		g'
Champs de jauge	A_μ^a		B_μ
Secteur scalaire :			
Doublet complexe	$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$		$Y = +1$
Secteur spinoriel :			
Trois doublets gauchers L_i			
	$L_1 = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$		$Y = -1$
	$L_2 = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$		$Y = -1$
	$L_3 = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$		$Y = -1$
Trois singulets droitiers E_i			
	$E_1 = e_R$		$Y = -2$
	$E_2 = \mu_R$		$Y = -2$
	$E_3 = \tau_R$		$Y = -2$

Le fait que les singulets soient aussi les éléments droitiers n'est en aucun cas imposé par la théorie. Il provient simplement du fait qu'expérimentalement, on n'a jamais observé de neutrino droitier⁵.

⁴On parle d'ailleurs parfois d'isovecteur et d'isoscalaire.

⁵Ceci est sérieusement remis en question à l'heure actuelle, mais nous nous concentrons ici sur le Modèle Standard au sens strict. Diverses extensions de ce dernier ont été proposées, qui incluent des neutrinos droitiers.

De leur côté, l'électron, le muon et le τ peuvent apparaître aussi bien gauchers que droitiers. Pour être explicite, écrivons les lois de transformation des champs par rapport au groupe de jauge :

$$\phi \longrightarrow e^{i\alpha(x)}U(x)\phi, \quad (11.6)$$

$$L_i \longrightarrow e^{-i\alpha(x)}U(x)L_i, \quad (11.7)$$

$$E_i \longrightarrow e^{-2i\alpha(x)}E_i, \quad (11.8)$$

$$B_\mu \longrightarrow B_\mu + \frac{1}{g'}\partial_\mu\alpha(x), \quad (11.9)$$

$$A_\mu \longrightarrow U(x)A_\mu U^\dagger(x) - i(\partial_\mu U)U^\dagger. \quad (11.10)$$

On remarque en particulier que les champs de jauge ne se transforment que sous l'action de leur propre groupe. On pourra se référer au chapitre 9 pour trouver la dérivation de ces expressions.

11.1.2 Le Lagrangien du modèle électrofaible

Ayant introduit tous les champs que nous voulons traiter, et connaissant leur comportement par rapport au groupe de jauge, nous pouvons maintenant construire sans difficulté le Lagrangien de la théorie. Nous avons déjà vu que les termes d'interaction des spineurs avec les champs de jauge sont univoquement déterminés par la symétrie locale, au travers de la dérivée covariante. Par contre, ce n'est pas le cas de l'interaction des spineurs entre eux et avec le champ scalaire. Pour construire un terme légitime, il s'agit de trouver un terme réel qui soit invariant tant par rapport au groupe de jauge que par rapport au groupe de Lorentz, et dont les constantes de couplage aient une dimension ≥ 0 , pour des raisons de renormalisabilité. C'est l'*interaction de Yukawa* :

$$\mathcal{L}^Y = f_{ij}\bar{L}_i E_j \phi + h.c. \quad (11.11)$$

On voit immédiatement qu'il s'agit bien d'un scalaire par rapport au groupe de Lorentz et, sous l'action de $SU(2) \times U(1)$, on a

$$f_{ij}\bar{L}_i E_j \phi \longrightarrow f_{ij}\bar{L}_i U^\dagger e^{i\alpha} e^{-2i\alpha} E_j e^{i\alpha} U \phi = f_{ij}\bar{L}_i E_j \phi.$$

Le Lagrangien du modèle électrofaible s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EW} = & -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} && \text{termes de jauge} \\ & + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 && \text{partie scalaire} \\ & + \sum_i i\bar{L}_i \gamma^\mu D_\mu L_i + \sum_i i\bar{E}_i \gamma^\mu D_\mu E_i && \text{partie fermionique} \\ & + \sum_{ij} [f_{ij}\bar{L}_i E_j \phi + h.c.] && \text{Yukawa} \end{aligned} \quad (11.12)$$

où la dérivée covariante est

$$D_\mu = \partial_\mu - ig\frac{\tau^a}{2}A_\mu^a - ig'\frac{Y}{2}B_\mu. \quad (11.13)$$

La valeur de Y dépend évidemment du champ sur lequel agit la dérivée covariante. De même, si elle agit sur un singulet E_i , la partie qui dépend de $SU(2)$ disparaît (comme si la 'charge' de ce champ par rapport à ce groupe était nulle). Ainsi,

$$\begin{aligned} D_\mu L_i &= \left(\partial_\mu - ig\frac{\tau^a}{2}A_\mu^a + ig'\frac{Y}{2}B_\mu \right) L_i, \\ D_\mu E_i &= (\partial_\mu + ig'B_\mu) E_i, \\ D_\mu \phi &= \left(\partial_\mu - ig\frac{\tau^a}{2}A_\mu^a - ig'\frac{Y}{2}B_\mu \right) \phi. \end{aligned}$$

C'est le Lagrangien qui décrit l'interaction électromagnétique et l'interaction faible du Modèle Standard. Son contenu physique n'est pas encore très clair à ce stade. Mettons donc en évidence son spectre exact. Le problème essentiel ici est celui des masses. Tant les fermions que les champs de jauge sont a priori sans masse dans ce Lagrangien. On a déjà montré que les champs de jauge ne peuvent pas être massifs au chapitre 9, et on constate ici que la symétrie de jauge, associée à la représentation chirale des spineurs ne permet pas non plus de conférer une masse aux fermions. En effet, les termes bilinéaires du type $\bar{L}_i L_i$ ou $\bar{E}_i E_i$ sont nuls (cf le chapitre 5), et ceux de la forme $\bar{L}_i E_i$ ne sont pas des invariants du groupe de jauge.

11.1.3 Spectre de la théorie : secteur bosonique

Nous allons donc considérer tout d'abord la partie qui concerne les champs de jauge dans le Lagrangien. Les résultats expérimentaux imposent la présence de médiateurs massifs de l'interaction faible, or ceci n'est possible qu'au travers du mécanisme de Higgs. La démarche est exactement celle du chapitre précédent.

Supposons donc que $m^2 < 0$. Alors le champ ϕ présente un ensemble de minima sur la sphère \mathcal{S}^3 , telle que $\phi^\dagger \phi = -\frac{m^2}{2\lambda}$. Comme dans le cas abélien considéré plus tôt, utilisons notre liberté de jauge $U(2)$ pour rendre le champ ϕ réel :

$$\phi'(x) = U(x)\phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (11.14)$$

où $\rho(x) \in \mathbb{R}$. Explicitement, étant donné $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$, la matrice $U(x) \in U(2)$ qui remplit cette condition est donnée par

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{\phi^\dagger \phi}} \begin{pmatrix} \phi_2 & -\phi_1 \\ \phi_1^* & \phi_2^* \end{pmatrix}, \quad (11.15)$$

et on note à nouveau la nécessité d'avoir une symétrie de jauge *locale* pour pouvoir satisfaire cette condition.

Appliquons cette jauge au Lagrangien. Par les résultats déjà obtenus au chapitre 9, on sait que les termes cinétiques des champs de jauge sont invariants, i.e. $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$ et $F'^a_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu}$. L'aspect intéressant provient du terme cinétique pour le champ scalaire. En effet, on obtient

$$\begin{aligned} (D_\mu \phi)' &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \rho \end{pmatrix} + \left[-ig \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a - ig' \frac{1}{2} B_\mu \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \rho \end{pmatrix} - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} gA_\mu^3 + g'B_\mu & g(A_\mu^1 - iA_\mu^2) \\ g(A_\mu^1 + iA_\mu^2) & -gA_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{i}{2\sqrt{2}} g (A_\mu^1 - iA_\mu^2) \rho \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \rho - \frac{i}{2\sqrt{2}} (-gA_\mu^3 + g'B_\mu) \rho \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et donc

$$(D_\mu \phi)'^\dagger (D^\mu \phi)' = \frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho + \frac{1}{8} g^2 |A_\mu^1 - iA_\mu^2|^2 \rho^2 + \frac{1}{8} (gA_\mu^3 - g'B_\mu)^2 \rho^2. \quad (11.16)$$

On est ainsi ramené à une théorie dont l'invariance de jauge est réalisée de manière triviale par l'invariance des champs dans la jauge unitaire. Ses degrés de liberté sont clairement définis : un champ scalaire réel ρ et quatre champs vectoriels réels eux aussi A_μ^a et B_μ . On peut alors se référer à la partie libre du champ ρ :

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \rho \partial^\mu \rho - \frac{1}{2} m^2 \rho^2 - \frac{\lambda}{4} \rho^4.$$

Comme $m^2 < 0$, le minimum du potentiel se trouve en v , tel que $\lambda v^2 = -m^2$. Cette situation nous est déjà bien connue. Il suffit de développer le champ autour de ce minimum pour mettre en évidence les véritables degrés de liberté associés à ρ . On écrit $\rho(x) = v + h(x)$, et on obtient alors un champ scalaire réel de masse $m_h^2 = -2m^2$, avec des termes de self-interaction d'ordres supérieurs.

La partie scalaire étant maintenant claire, tournons-nous vers le secteur vectoriel. En utilisant l'éq. (11.16) et l'expression du Lagrangien libre, rassemblons la partie quadratique, i.e. libre, pour les champs de jauge. On obtient

$$\mathcal{L}_{vect}^{quad} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 - \frac{1}{4} \sum_{a=1}^3 (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \frac{1}{8} g^2 v^2 |A_\mu^1 - iA_\mu^2|^2 + \frac{1}{8} v^2 (gA_\mu^3 - g'B_\mu)^2 .$$

Sa signification physique deviendra claire si nous réussissons à l'écrire sous une forme dans laquelle tous les termes ne contiennent plus qu'un seul type de champ. On appelle ce processus la *diagonalisation* du Lagrangien. Les termes quadratiques simples seront alors naturellement des termes de masse. Nous l'avons en effet déjà noté plus haut et utilisé de nombreuses fois jusqu'ici, la masse est définie comme la courbure du potentiel, i.e. précisément le coefficient devant ces termes-là. Les champs qui diagonalisent le Lagrangien quadratique seront parfois appelés états propres de la masse (par abus de langage, naturellement).

A cette fin, définissons le nouveau champ vectoriel complexe W_μ par

$$W_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 + iA_\mu^2) , \quad W_\mu^* = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 - iA_\mu^2) , \quad (11.17)$$

ce qui permet d'écrire l'avant-dernier terme $\frac{1}{4}g^2v^2W_\mu W^{\mu*}$, il ne contient plus de termes croisés.

Quant au dernier terme, écrivons-le sous forme matricielle

$$(gA_\mu^3 - g'B_\mu)^2 = \begin{pmatrix} A_\mu^3 & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}$$

Pour avoir des états propres de la masse, il suffit de diagonaliser cette matrice. On utilise la matrice orthogonale O suivante :

$$O = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g & -g' \\ g' & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Theta_W & -\sin \Theta_W \\ \sin \Theta_W & \cos \Theta_W \end{pmatrix} , \quad (11.18)$$

où nous avons introduit l'angle Θ_W , la *weak mixing angle* ou *angle de Weinberg*, défini par

$$\cos \Theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + g'^2}} , \quad \sin \Theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} . \quad (11.19)$$

Appliquons donc cette rotation pour diagonaliser la matrice des masses. Ses valeurs propres sont $(g^2 + g'^2)$ et 0, ce sont les masses des champs définis dans cette nouvelle base. Le vecteur $(A_\mu^3 \ B_\mu)^T$ devient après la rotation $(Z_\mu \ A_\mu)^T$, où

$$Z_\mu = \cos \Theta_W A_\mu^3 - \sin \Theta_W B_\mu , \quad (11.20)$$

$$A_\mu = \sin \Theta_W A_\mu^3 + \cos \Theta_W B_\mu . \quad (11.21)$$

Rassemblons finalement tous les termes quadratiques du Lagrangien pour les champs scalaire et vectoriels, dans cette jauge unitaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{v+s}^{quad} = & \frac{1}{2} \partial_\mu h \partial^\mu h - \frac{1}{2} W_{\mu\nu} W^{\mu\nu*} - \frac{1}{4} A_{\mu\nu} A^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} \\ & + \frac{1}{2} m_h^2 h^2 + m_W^2 W_\mu W^{\mu*} + 0 + \frac{1}{2} m_Z^2 Z_\mu Z^\mu , \end{aligned} \quad (11.22)$$

où

$$m_h^2 = -2m^2, \quad (11.23)$$

$$m_Z^2 = \frac{v^2}{4} (g^2 + g'^2), \quad (11.24)$$

$$m_W^2 = \frac{1}{4} g^2 v^2. \quad (11.25)$$

11.1.4 Commentaires

Le contenu bosonique de la théorie est maintenant clair. Le Lagrangien 11.12 contient

- un champ scalaire réel, le boson de Higgs h , massif,
- un champ vectoriel complexe W_μ , massif, i.e. une paire vectorielle particule-antiparticule,
- un champ vectoriel réel Z_μ , massif,
- un champ vectoriel réel sans masse A_μ .

Tous ces champs sont des états propres de la masse. Bien qu'apparemment tous sans masse, le mécanisme de Higgs leur en a conféré une bien déterminée et reliée aux paramètres de base m^2 , λ , g et g' . On constate d'ailleurs que si l'on fixe l'angle de mélange, les deux constantes de couplage a priori indépendantes g et g' ne le sont plus, puisqu'on a la relation fondamentale :

$$g \sin \Theta_W = g' \cos \Theta_W, \quad (11.26)$$

ce qui implique directement

$$m_W = m_Z \cos \Theta_W. \quad (11.27)$$

Ces relations, bien que connues expérimentalement avant le modèle GWS, furent ainsi comprises théoriquement grâce à ce dernier.

Finalement, c'est en analysant l'électrodynamique que nous pourrions réellement interpréter physiquement ces différents champs. Mentionnons déjà cependant que le champ sans masse est bien évidemment le photon (c'est le seul candidat possible), et que les trois autres champs sont les bosons intermédiaires pour l'interaction faible, à savoir les courants chargés W^\pm et neutre Z^0 .

11.1.5 Spectre de la théorie : secteur fermionique

La partie bosonique de la théorie étant maintenant clarifiée, tournons-nous vers son secteur fermionique. Tout d'abord, il s'agit d'appliquer ici aussi le choix de jauge de l'éq. (11.15). Les termes cinétiques sont clairement invariants. Seul est vraiment intéressant le terme de Yukawa.

$$f_{ij} \bar{L}_i E_j \phi \longrightarrow f_{ij} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_i & \bar{e}_i \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\rho}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e_{jR} = f_{ij} \bar{e}_{iL} e_{jR} \frac{\rho}{\sqrt{2}}.$$

Lorsque la symétrie est spontanément brisée, on obtient

$$f_{ij} \bar{e}_{iL} e_{jR} \frac{v}{\sqrt{2}} + f_{ij} \bar{e}_{iL} e_{jR} \frac{h(x)}{\sqrt{2}}. \quad (11.28)$$

Si le second terme est une interaction entre fermions et boson de Higgs, le premier est bien finalement un terme de masse. Le mécanisme de Higgs n'a donc pas seulement donné une masse aux champs de jauge, mais à l'électron, au muon et au τ par la même occasion. On constate d'ailleurs que ce modèle implique aussi directement que tous les neutrinos soient sans masse, puisqu'ils n'interagissent pas avec le champ ρ .

Pour trouver les masses des leptons, il reste à diagonaliser la matrice f_{ij} , qui est une matrice 3×3 complexe, et compte donc à priori 18 paramètres. Montrons que seuls trois d'entre eux sont véritablement physiques, ce qui est cohérent avec ce que nous venons de découvrir. Pour cela, montrons le théorème suivant :

Théorème Soit M , une matrice complexe. Alors il existe \tilde{U}_1 et \tilde{U}_2 , deux matrices unitaires telles que $\tilde{U}_1 M \tilde{U}_2^\dagger$ soit diagonale et réelle.

En effet, considérons les deux matrices MM^\dagger et $M^\dagger M$. Elles sont hermitiennes, positives et ont le même spectre :

- positivité : Si $M^\dagger M \psi = \lambda \psi$, pour ψ un vecteur propre normé, alors $\lambda = (M\psi, M\psi) > 0$;
- spectre : Considérons le polynôme caractéristique :

$$\det(M^\dagger M - \lambda) = \det((M^\dagger - \lambda M^{-1})M) = \det(M(M^\dagger - \lambda M^{-1})) = \det(MM^\dagger - \lambda) .$$

Elles sont donc toutes deux unitairement diagonalisables. Soit $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, leur représentation diagonale, avec $\lambda_i > 0$. Par des résultats élémentaires d'algèbre linéaire, il existe des matrices U_1 et U_2 , telles que

$$M^\dagger M = U_1 \Lambda U_1^\dagger, \quad \text{et} \quad MM^\dagger = U_2 \Lambda U_2^\dagger .$$

D'où,

$$\Lambda = U_1^\dagger M^\dagger M U_1, \quad \text{et} \quad \Lambda = U_2^\dagger M M^\dagger U_2 .$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} U_1^\dagger M^\dagger M U_1 &= U_2^\dagger M M^\dagger U_2 \\ \Rightarrow U_1^\dagger M^\dagger U_2 U_2^\dagger M U_1 &= U_2^\dagger M U_1 U_1^\dagger M^\dagger U_2 \\ \Rightarrow [U_1^\dagger M^\dagger U_2, U_2^\dagger M U_1] &= 0 . \end{aligned}$$

La matrice $U_2^\dagger M U_1$ est donc une matrice normale, elle est, elle aussi, unitairement diagonalisable. Soit U , la matrice de changement de base. Les matrices cherchées sont donc $\tilde{U}_1 = U U_2^\dagger$ et $\tilde{U}_2 = U U_1^\dagger$. De plus,

$$\tilde{U}_1 M \tilde{U}_2^\dagger = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}) ,$$

ce qui termine la démonstration. \blacklozenge

Revenons au Lagrangien. Appliquons le théorème ci-dessus à la matrice de Yukawa f_{ij} . Soient U_L et U_E , les deux matrices unitaires telles que $F = U_L f U_E^\dagger$ soit diagonale, i.e. $F = \text{diag}(F_1, F_2, F_3)$, $F_i > 0$. Ecrivons alors le terme d'interaction comme

$$\bar{L} U_L^\dagger F U_E E \phi . \quad (11.29)$$

Il suffit alors de redéfinir les champs spinoriels L_i et E_i par

$$\tilde{L}_i = U_L L_i , \quad (11.30)$$

$$\tilde{E}_i = U_E E_i . \quad (11.31)$$

On vérifie directement qu'une telle redéfinition n'affecte pas les termes cinétiques du Lagrangien ; elle est donc légitime. Ce sont ces nouveaux champs qui sont des états propres de la masse dans la théorie électrofaible. Pour une parfaite clareté, nous écrivons encore le terme de Yukawa dans cette nouvelle base (nous laissons tomber les \sim) :

$$\mathcal{L}^Y = \sum_{i=1}^3 F_i \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{e}_{iL} e_{iR} + \sum_{i=1}^3 F_i \frac{h}{\sqrt{2}} \bar{e}_{iL} e_{iR} . \quad (11.32)$$

On obtient donc les masses de ces fermions

$$m_e = \frac{v}{\sqrt{2}}F_1, \quad m_\mu = \frac{v}{\sqrt{2}}F_2, \quad m_\tau = \frac{v}{\sqrt{2}}F_3, \quad (11.33)$$

et l'interaction avec le champ de Higgs illustrée dans la figure 11.1.

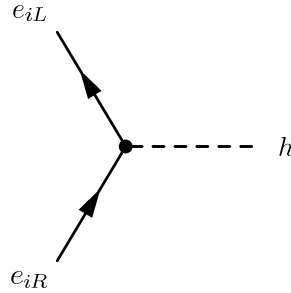


FIG. 11.1 – L'interaction fermion champ de Higgs

11.1.6 Commentaires généraux

Nous avons mis en évidence dans le secteur fermionique du modèle électrofaible le contenu physique suivant :

- trois fermions massifs, e, μ, τ ;
- trois fermions sans masse, les neutrinos.

Le contenu du Lagrangien total est maintenant éclairci. En particulier, notons que *toutes* les masses, à l'exception de celle du boson de Higgs, doivent leur existence au mécanisme de Higgs engendré par la présence dans la théorie du boson du même nom. Il est donc indispensable à la cohérence de l'ensemble du Modèle. Rappelons la démarche globale : chaque interaction est engendrée dans le Modèle Standard par un groupe de symétrie de jauge locale. Or un tel postulat impose que tous les champs de jauge soient sans masse. De plus, si on lui associe le modèle chirale des fermions introduit par Weinberg, la même conclusion s'applique aussi à tous les leptons. Le mécanisme de Higgs 'sauve' finalement l'ensemble de la construction.

Nous sommes maintenant en mesure de compter le nombre de paramètres libres de cette théorie. Dans le secteur bosonique, nous avons g, Θ_W, m_h et λ . Dans la partie fermionique, il faut encore rajouter les trois masses des leptons, ce qui donne en tout sept constantes non déterminées par la théorie, mais qu'il s'agit d'introduire à la main, pour que les prédictions correspondent le mieux possible aux résultats expérimentaux.

11.2 Interactions électromagnétiques

Si le Lagrangien décrit effectivement les interactions électromagnétiques et faibles, il doit être possible de retrouver l'électrodynamique quantique à partir de son expression originale. En particulier, nous devons d'abord identifier le photon. Le seul champ vectoriel sans masse à disposition étant le champ A_μ , il doit nécessairement représenter le médiateur de l'électromagnétisme. Analysons alors ses interactions avec les autres champs.

11.2.1 Interaction électromagnétique des fermions

Définissons pour commencer

$$e = g \sin \Theta_W = g' \cos \Theta_W , \quad (11.34)$$

grandeur que nous identifierons tantôt à la constante de couplage de l'électromagnétisme, la charge de l'électron. Réécrivons la dérivée covariante en termes des champs physiques, et concentrons-nous sur les termes qui contiennent le photon :

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - ig \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a - ig' \frac{Y}{2} B_\mu \\ &= \partial_\mu - ig \frac{\tau^3}{2} (Z_\mu \cos \Theta_W + A_\mu \sin \Theta_W) - ig' \frac{Y}{2} (A_\mu \cos \Theta_W - Z_\mu \sin \Theta_W) + \xi (A_\mu^1, A_\mu^2) \\ &= \partial_\mu - i A_\mu \left(g \sin \Theta_W \frac{\tau^3}{2} + g' \cos \Theta_W \frac{Y}{2} \right) + \zeta (A_\mu^1, A_\mu^2, Z_\mu) \\ &= \partial_\mu - ie A_\mu \left(\frac{\tau^3}{2} + \frac{Y}{2} \right) + \zeta (A_\mu^1, A_\mu^2, Z_\mu) , \end{aligned} \quad (11.35)$$

où les fonctions ξ et ζ contiennent tous les termes qui ne nous intéressent pas ici car ne contenant pas A_μ . Pour que le résultat ci-dessus corresponde à la relation connue de l'électrodynamique, la charge électrique doit être, en multiples de e ,

$$Q = \left(\frac{\tau^3}{2} + \frac{Y}{2} \right) , \quad (11.36)$$

On en déduit alors les charges des champs de la théorie :

	τ^3	Y	Q
neutrinos ν_i	+1	-1	0
e, μ, τ gauchers	-1	-1	-1
e, μ, τ droitiers	0	-2	-1

en particulier, notons que les neutrinos ne ressentent pas l'interaction électromagnétique.

Finalement, la partie leptonique du Lagrangien nous fournit les termes d'interaction lepton-photon. On a

$$i \bar{L}_i \gamma^\mu D_\mu L_i \rightsquigarrow -e \bar{e}_{iL} \gamma^\mu e_{iL} A_\mu , \quad (11.37)$$

$$i \bar{R}_i \gamma^\mu D_\mu R_i \rightsquigarrow -e \bar{e}_{iR} \gamma^\mu e_{iR} A_\mu , \quad (11.38)$$

les neutrinos n'apparaissant plus car leur charge est nulle. Soit e_i , le spineur représentant un e , μ ou τ . Alors $e_{iL} = \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma^5) e_i$, d'où $\bar{e}_{iL} = \bar{e}_i \frac{1}{2} (\mathbb{I} - \gamma^5)$ et donc

$$\bar{e}_{iL} \gamma^\mu e_{iL} = \bar{e}_i \gamma^\mu \left[\frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma^5) \right]^2 e_i = \bar{e}_i \gamma^\mu \frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma^5) e_i ,$$

car les opérateurs de chiralité sont des projecteurs (cf le chapitre 5) et γ^5 anticommute avec les γ^μ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^{EM} &= (-e \bar{e}_{iL} \gamma^\mu e_{iL} - e \bar{e}_{iR} \gamma^\mu e_{iR}) A_\mu = -e \bar{e}_i \gamma^\mu \left[\frac{1}{2} (\mathbb{I} + \gamma^5) + \frac{1}{2} (\mathbb{I} - \gamma^5) \right] e_i A_\mu \\ &= -e \bar{e}_i \gamma^\mu e_i A_\mu . \end{aligned} \quad (11.39)$$

On a effectivement retrouvé l'interaction de l'électrodynamique quantique pour chacune des générations de lepton. C'est uniquement à ce point qu'on est légitimement en droit d'identifier le champ A_μ avec le photon.

Nous avons dérivé l'électrodynamique quantique à partir de la symétrie de jauge locale $U(1)$. On constate ici que dans le cadre de la théorie électrofaible, la situation est plus complexe. Bien que nous partions du groupe $SU(2) \times U(1)$, ce n'est pas le sous-groupe $U(1)$ qui engendre directement l'interaction électromagnétique. Dans ce cadre-ci, interactions faible et électromagnétique sont comprises comme deux manifestations d'une seule force électrofaible, qui ne se distinguent sous la forme que l'on connaît que si la symétrie est brisée, i.e. si $m^2 < 0$. Le photon est alors un 'mélange' des champs de jauge associé à $U(1)$ et au troisième générateur de $SU(2)$, cf l'éq. (11.21).

11.2.2 Interaction électromagnétique des bosons

Le cas du boson de Higgs est aisé : il suffit d'appliquer la même formule que pour les fermions, avec $\tau^3 = -1$ et $Y = +1$. On trouve donc que le champ de Higgs n'est pas chargé, ce à quoi on devait s'attendre puisque c'est un champ réel.

Quant aux champs de jauge W et Z , le calcul est direct mais quelque peu pénible. Etant donné $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$, on obtient

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} = & -\frac{1}{2}[(D_\mu W_\nu)^* - (D_\nu W_\mu)^* - ig \cos \Theta_W (Z_\mu W_\nu^* - Z_\nu W_\mu^*)] \\ & \times [D^\mu W^\nu - D^\nu W^\mu + ig \cos \Theta_W (Z^\mu W^\nu - Z^\nu W^\mu)] - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^3 F^{\mu\nu 3}, \end{aligned} \quad (11.40)$$

où les dérivées covariantes ont été définies comme suit :

$$(D_\mu W_\nu)^* = (\partial_\mu - ieA_\mu) W_\nu^* \quad \text{et} \quad D_\mu W_\nu = (\partial_\mu + ieA_\mu) W_\nu. \quad (11.41)$$

Le champ W a donc une charge entière et on peut écrire $W_\mu^* \equiv W_\mu^+$ et $W_\mu \equiv W_\mu^-$, avec $e_{W^+} = +1$ et $e_{W^-} = -1$. La démarche est la même pour Z , et on trouve $e_Z = 0$, autrement dit il n'y a pas d'interaction entre le photon et le boson Z . Nous verrons par la suite que ces charges sont aussi imposées par la conservation de la charge aux vertex décrivant l'interaction faible.

11.2.3 Interactions faibles

Nous nous intéressons maintenant aux interactions des bosons W^\pm et Z^0 avec les fermions. Ces couplages apparaissent naturellement des termes suivants du Lagrangien :

$$\sum_i i\bar{L}_i \not{D} L_i + \sum_i i\bar{E}_i \not{D} E_i.$$

Développons ces termes en utilisant les champs physiques ; on obtient

$$\mathcal{L}_I^{EW} = i\bar{L}_i \not{D} L_i + i\bar{E}_i \not{D} E_i + g(W_\mu^* J_W^{\mu+} + W_\mu J_W^{\mu-} + Z_\mu^0 J_Z^\mu) + eA_\mu J_{EM}^\mu, \quad (11.42)$$

où

$$J_W^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu e_{iL}, \quad (11.43)$$

$$J_W^{\mu-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{e}_{iL} \gamma^\mu \nu_{iL}, \quad (11.44)$$

$$J_Z^\mu = \frac{1}{\cos \Theta_W} \left[\frac{1}{2} \bar{\nu}_{iL} \gamma^\mu \nu_{iL} + \left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \Theta_W \right) \bar{e}_{iL} \gamma^\mu e_{iL} + \sin^2 \Theta_W \bar{e}_{iR} \gamma^\mu e_{iR} \right], \quad (11.45)$$

$$J_{EM}^\mu = -\bar{e}_i \gamma^\mu e_i. \quad (11.46)$$

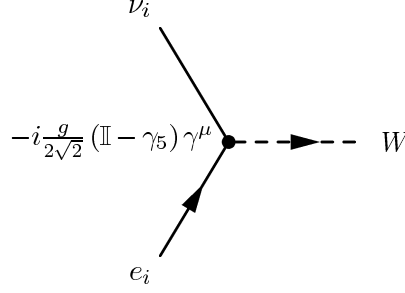


FIG. 11.2 – Le vertex associé aux bosons W . Notons que le vertex où toutes les flèches seraient inversées est aussi possible, avec le même facteur.

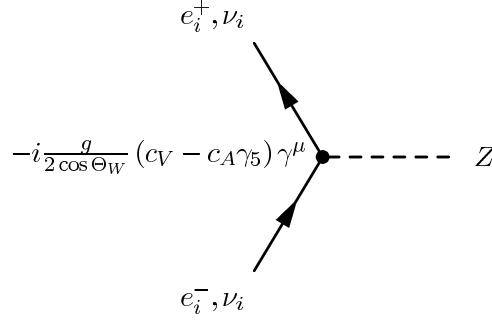


FIG. 11.3 – Le vertex associé au boson Z . Les valeurs des constantes c_V et c_A dépendent des champs en interaction. Pour les neutrinos, $c_V = \frac{1}{2}$ et $c_A = \frac{1}{2}$; pour les autres leptons, $c_V = -\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \Theta_W$ et $c_A = -\frac{1}{2}$.

Les vertex associés à ces termes d'interaction sont représentés aux figures 11.2 et 11.3.

Nous avons volontairement réécrit le terme électromagnétique pour marquer une différence fondamentale : l'interaction faible est chirale, ce qui n'est pas le cas de l'interaction électromagnétique. En effet, le courant J_{EM} contient les spineurs entiers, alors que les trois autres courants ne couplent que des champs de même chiralité. Il n'est donc pas surprenant de constater expérimentalement que c'est précisément dans le secteur faible du Modèle Standard que l'on observe des violations de la parité.

Chaque terme du Lagrangien doit naturellement être globalement neutre, i.e. invariant. Comme les courants J_W^\pm portent une charge entière, et que J_Z est neutre, le champ W doit bien lui aussi porter une charge entière alors que le Z est neutre. C'est le résultat que nous avons annoncé plus haut.

Finalement, notons encore que ces termes d'interaction ne mélangent pas les générations : ils ne couplent que les électrons et neutrinos électroniques entre eux, les μ et ν_μ , les τ et ν_τ . En particulier, le phénomène d'oscillation des neutrinos, i.e. la modification de la nature d'un neutrino, n'est pas autorisé dans le cadre du Modèle Standard. Ces oscillations ont pourtant été observées expérimentalement, et un effort intense est en cours pour modifier le Modèle Standard afin d'y

incorporer un tel phénomène.

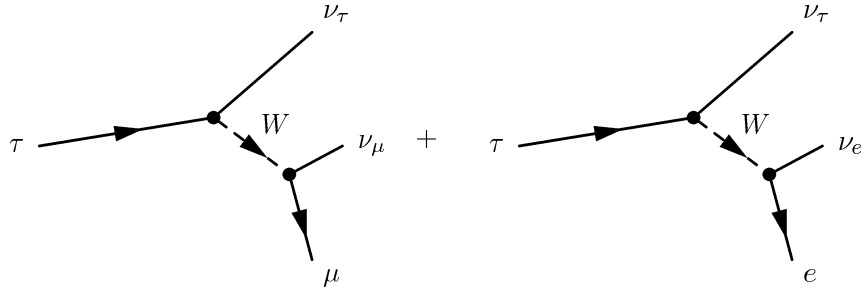


FIG. 11.4 – Un exemple de processus faisant intervenir des courants faibles chargés : la désintégration du τ .

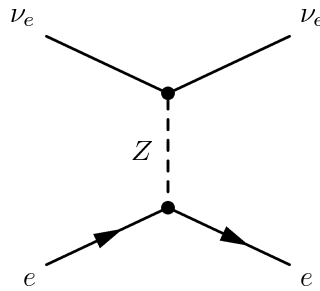


FIG. 11.5 – Un processus avec les courants faibles neutres : la diffusion élastique électron-neutrino.

Nous illustrons aux figures 11.4 et 11.5 deux processus faisant intervenir d’une part les courants chargés puis les courants neutres. Notons que de tels processus ne sont possibles que dans le secteur faible du Modèle Standard, puisque les neutrinos n’interagissent que par l’intermédiaire de la force faible. C’est la masse très élevée des bosons qui forment les courants neutres qui est responsable de la très faible section efficace de ce genre de processus : les neutrinos sont des particules extrêmement difficiles à détecter puisqu’elles n’interagissent que très faiblement avec la matière.

11.3 Les quarks et le Modèle Standard

Nous avons décrit pour l’instant les interactions faible et électromagnétique des leptons. Pour avoir une image globale des processus élémentaires, il reste à introduire dans le modèle les quarks et l’interaction forte. On aura alors une image générale de tous les processus non gravitationnels.

11.3.1 Groupe de jauge et champs du Modèle Standard

Le groupe de jauge du Modèle Standard doit décrire à la fois la chromodynamique quantique et le modèle électrofaible. Il s'agit donc de

$$\mathcal{G}_{SM} = \text{SU}(3) \times \text{SU}(2) \times \text{U}(1) . \quad (11.47)$$

Nous avons déjà les champs de jauge pour les deux derniers sous-groupes, à savoir A_μ^a et B_μ , ou de manière équivalente, mais physiquement plus intéressante le photon A_μ et les bosons massifs W_μ^\pm et Z_μ . Pour pouvoir construire un Lagrangien symétrique par rapport au groupe de jauge local $\text{SU}(3)$, nous introduisons en plus une constante de couplage g_S , et un champ de jauge $G_\mu \in \mathfrak{su}(3)$. Ce dernier comprend huit degrés de liberté, associés aux huit générateurs de l'algèbre, ce sont les gluons G_μ^a ,

$$G_\mu = g_S G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2} . \quad (11.48)$$

Il reste à décrire les six quarks, et à connaître leurs propriétés par rapport à chacun des sous-groupes de jauge. La structure des six quarks en trois couples identiques d'un point de vue des charges devient enfin claire ici : ils forment des doublets par rapport au groupe de jauge $\text{SU}(2)$, de même que chaque paire leptonique, avec l'électron et son neutrino, etc. On introduit donc les champs suivants :

Secteur spinoriel :

Trois doublets gauchers Q_L

$$\begin{aligned} Q_1 &= \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L & Y_Q &= \frac{1}{3} \\ Q_2 &= \begin{pmatrix} c_i \\ s_i \end{pmatrix}_L & Y_Q &= \frac{1}{3} \\ Q_3 &= \begin{pmatrix} t_i \\ b_i \end{pmatrix}_L & Y_Q &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Six singulets droitiers U_R et D_R

$$\begin{aligned} U_1 &= u_{iR} & Y_U &= \frac{4}{3} \\ U_2 &= c_{iR} & Y_U &= \frac{4}{3} \\ U_3 &= t_{iR} & Y_U &= \frac{4}{3} \\ D_1 &= d_{iR} & Y_D &= -\frac{2}{3} \\ D_2 &= s_{iR} & Y_D &= -\frac{2}{3} \\ D_3 &= b_{iR} & Y_D &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Les indices i sont les indices de couleurs, autrement dit $i = 1, 2, 3$. Chaque quark forme donc un triplet par rapport à $\text{SU}(3)$. Le lecteur pourra se référer au chapitre 9 pour revoir les éléments de la chromodynamique quantique que nous avons réintroduits ici très sommairement.

Notons ici que si on a fait de certains quarks des doublets par rapport à $\text{SU}(2)$, les leptons restent des singulets par rapport à $\text{SU}(3)$, ils n'ont pas de couleur. Ils n'interagiront donc pas avec les gluons.

Dans ce cadre plus large, nous remarquons que tous les quarks peuvent être à la fois droitiers et gauchers. Le cas des neutrinos est donc unique dans le modèle standard. Les termes d'interactions

quarks-champs de jauge et les termes cinétiques pour les quarks sont naturellement donnés par

$$\sum_{Q=1}^3 i\bar{Q}_L \not{D} Q_L, \quad (11.49)$$

$$\sum_{U=1}^3 i\bar{U}_R \not{D} U_R, \quad (11.50)$$

$$\sum_{D=1}^3 i\bar{D}_R \not{D} D_R, \quad (11.51)$$

$$(11.52)$$

où la dérivée covariante la plus générale est

$$D_\mu = \partial_\mu - \underbrace{ig_S G_\mu^a \frac{\lambda^a}{2}}_{\text{SU(3)}} - \underbrace{ig A_\mu^a \frac{\tau^a}{2}}_{\text{SU(2)}} - \underbrace{ig' B_\mu \frac{Y}{2}}_{\text{U(1)}}. \quad (11.53)$$

Evidemment, le terme en τ^a sera absent pour les singulets de SU(2), i.e. les quarks et leptons droitiers, celui en λ^a pour les champs sans couleur (i.e. les singulets de SU(3)), donc en particulier pour tous les leptons, et celui en U(1) pour tous les champs à hypercharge nulle.

A ce stade notons qu'un champ peut désormais porter au maximum trois indices. Outre l'indice de Lorentz (ou de Dirac), il peut avoir un indice par rapport à SU(2) et un par rapport à SU(3) (c'est la *couleur*).

Outre les vertex de la chromodynamique quantique, il apparaît donc les trois nouveaux types de vertex illustrés à la figure 11.6. Notons encore une fois que les différentes générations de quarks, comme les générations de leptons ne sont pas couplées entre elles par l'interaction faible.

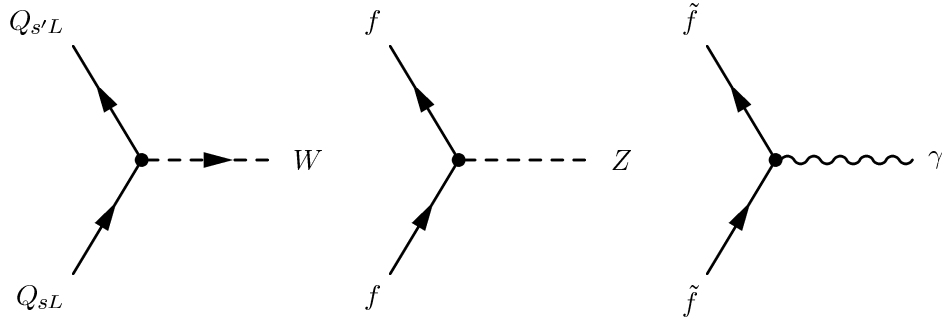


FIG. 11.6 – Les processus électrofaibles qui peuvent faire intervenir des quarks. s et s' sont les deux valeurs d'isospin, soit u et d , c et d ou t et b . f représente n'importe quel fermion, \tilde{f} aussi, à l'exception des neutrinos.

11.3.2 Termes de Yukawa et matrice de Kobayashi-Maskawa

Finalement, nous allons analyser le problème des interactions entre les quarks et le champ de Higgs, ce qui nous permettra de déterminer leur masse respective. Cherchons des termes d'interaction du type Yukawa, autrement dit, trouvons des termes bilinéaires dans les spineurs de quarks,

qui soient invariants par rapport SU(3), Lorentz invariants, et qui soient non nuls. Deux termes sont possibles :

$$\bar{Q}_L D_R \quad \text{et} \quad \bar{Q}_L U_R .$$

Pour en faire des termes légitimes du Lagrangien, déterminons leurs charges par rapport aux autres sous-groupes de jauge et complétons-les par la bonne expression du champ de Higgs. L'hypercharge de ces termes est respectivement $-\frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3}\alpha = -\alpha$ et $-\frac{1}{3}\alpha + \frac{4}{3}\alpha = +\alpha$. Par rapport au sous-groupe SU(2), tout deux se transforment selon $\bar{Q}_L D_R \rightarrow \bar{Q}_L D_R U^\dagger$.

Sous une rotation de SU(2) \times U(1), le champ ϕ se transforme selon $\phi \rightarrow U \exp(i\alpha)\phi$. Nous pouvons donc immédiatement l'utiliser pour construire un premier terme du type Yukawa, à savoir

$$\mathcal{L}_{Q,1}^Y = a_{ij} \bar{Q}_{iL} D_{jR} \phi + h.c. . \quad (11.54)$$

Pour le second, introduisons le champ $\tilde{\phi}$, orthogonal à ϕ ,

$$\tilde{\phi} = \mathcal{E} \phi^*, \quad \mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} . \quad (11.55)$$

Au chapitre 5, nous avons montré que pour toute matrice de SL(2, \mathbb{C}), on a $A^T \mathcal{E} A = \mathcal{E}$. Pour le sous-groupe de matrices unitaires, ceci peut se réécrire $\mathcal{E} U^* = U \mathcal{E}$, $U \in \text{SU}(2)$. Sous une transformation du groupe de jauge, le champ $\tilde{\phi}$ devient alors

$$\tilde{\phi} \longrightarrow \mathcal{E} (U \exp(i\alpha)\phi)^* = \mathcal{E} U^* \exp(-i\alpha)\phi^* = \exp(-i\alpha) U \mathcal{E} \phi^* = \exp(-i\alpha) U \tilde{\phi} , \quad (11.56)$$

et la seconde combinaison de Yukawa s'écrit donc

$$\mathcal{L}_{Q,2}^Y = b_{ij} \bar{Q}_{iL} U_{jR} \tilde{\phi} + h.c. . \quad (11.57)$$

Il s'agit maintenant d'extraire les véritables paramètres physiques des deux matrices a et b , qui a priori en contiennent au total 36. Montrons que seuls 10 sont importants. En utilisant le théorème précédent, diagonalisons la matrice b à l'aide de deux matrices 3×3 unitaires. Il suffit alors de redéfinir les champs Q_{iL} et U_{jR} en y incluant ces deux matrices comme dans le cas des leptons. Le second terme devient donc

$$\mathcal{L}_{Q,2}^Y = B_i \bar{Q}_{iL} \tilde{U}_{iR} \mathcal{E} \phi^* + h.c. ,$$

et contient donc seulement 3 paramètres B_i , $i = 1, 2, 3$.

Faisons de même pour la matrice a . Redéfinissons le champ D_R comme dans les cas précédents. Par contre, la procédure n'est plus possible pour le champ Q_L , celui-ci ayant déjà été fixé pour diagonaliser b . Soit \mathcal{U} , la matrice restante. La première interaction de Yukawa devient

$$\mathcal{L}_{Q,1}^Y = \bar{Q}_{iL} \mathcal{U}_{ij}^\dagger A_j \tilde{D}_{jR} \phi + h.c. .$$

Comme $\mathcal{U} \in \text{U}(3)$, elle contient 9 paramètres réels. Nous sommes encore libres de fixer arbitrairement les phases des spineurs, ce qui permet de soustraire encore cinq degrés de liberté, trois par champ moins un, puisque changer la phase de tous les quarks d'une même quantité n'affecte pas la matrice \mathcal{U} . Il reste donc quatre paramètres, trois angles θ_{12} , θ_{13} , θ_{23} , et une phase, généralement dénotée par δ . Les interactions de Yukawa s'écrivent alors sous forme canonique

$$\mathcal{L}^Y = \frac{\sqrt{2}}{v} [\bar{L} M_L E \phi + \bar{Q}_L \mathcal{K} M_D D_R \phi + \bar{Q}_L M_U U_R \mathcal{E} \phi + h.c.] , \quad (11.58)$$

où les matrices des masses M_L , M_D et M_U sont diagonales. La matrice \mathcal{K} est la matrice de *Kobayashi-Maskawa*, elle décrit le fait que les matrices des masses des quarks U et D ne peuvent

pas être diagonalisées simultanément. On l'écrit en général sous la forme standard suivante :

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} c_{12} c_{13} & s_{12} c_{13} & s_{13} e^{-i\delta} \\ -s_{12} c_{23} - c_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{12} c_{23} - s_{12} s_{23} s_{13} e^{i\delta} & s_{23} c_{13} \\ s_{12} s_{23} - c_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & -c_{12} s_{23} - s_{12} c_{23} s_{13} e^{i\delta} & c_{23} c_{13} \end{pmatrix}, \quad (11.59)$$

où $c_{ij} = \cos \theta_{ij}$ et $s_{ij} = \sin \theta_{ij}$.

La désintégration β du neutron Penchons-nous brièvement sur le processus suivant :

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e.$$

Le diagramme correspondant, à l'ordre le plus bas est

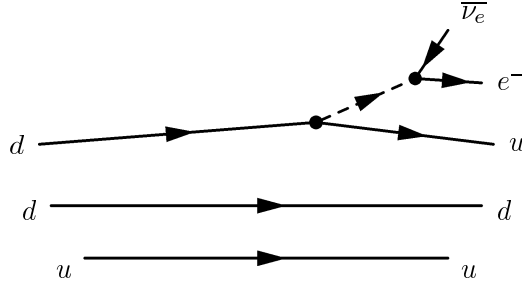


FIG. 11.7 – La désintégration β du neutron. Un quark d devient u , d'où une influence de la matrice de mélange de Kobayashi-Maskawa.

On constate qu'un quark *down* change de saveur pour devenir *up*. Ce processus est donc sensible au mélange $U - D$, et la détermination expérimentale précise du temps de vie du neutron permet de déterminer l'amplitude de ce mélange.

Enfin, on peut compter le nombre de paramètres du Modèle Standard. Il y en avait déjà 7 dans le secteur électrofaible. S'y ajoutent la constante de couplage de la chromodynamique quantique g_s , puis les six masses des quarks (les valeurs propres des matrices M_D et M_U), les trois angles de la matrice K.-M. et sa phase, ce qui donne au total 18 paramètres libres. A cela, il faudrait encore ajouter un angle du vide Θ_C , dont nous n'avons pas parlé ici. Le Modèle Standard contient donc au total 19 paramètres libres.

Notons ici que la phase δ joue un rôle important dans les interactions faibles des quarks. En particulier, c'est elle qui est responsable de la brisure de la symétrie CP, découverte dans les processus de désintégration du K^0 .

Pour terminer, nous écrivons le Lagrangien total du Modèle Standard :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{SM} = & -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ & + (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \\ & + \sum i \bar{Q}_L \not{D} Q_L + \sum i \bar{U}_R \not{D} U_R + \sum i \bar{D}_R \not{D} D_R + \sum i \bar{L}_i \not{D} L_i + \sum i \bar{E}_i \not{D} E_i \\ & + \frac{\sqrt{2}}{v} [\bar{L} M_L E \phi + \bar{Q}_L \mathcal{K} M_D D_R \phi + \bar{Q}_L M_U U_R \mathcal{E} \phi + h.c.] . \end{aligned} \quad (11.60)$$

C'est le Lagrangien qui décrit à l'heure actuelle de la manière la plus précise toutes les interactions connues des particules élémentaires, et tous les processus observés, à l'exception notoire des oscillations des neutrinos dont nous avons déjà noté qu'elles ne peuvent pas être décrites dans le cadre du Modèle Standard. Nous avons donc au total, six quarks massifs, six leptons dont trois sans masse (les neutrinos), un boson de Higgs massif, huit gluons et un photon, tous sans masse, et finalement trois bosons de jauge massifs. Toutes ces particules ont été observées expérimentalement, à l'exception du boson de Higgs, dont nous avons noté plus haut qu'il est pourtant essentiel à la cohérence de l'ensemble.

Annexe A

Exercices

• Exercice 1 : Limite continue

Considérer un système d'oscillateurs harmoniques de masses m et de fréquences propres ω , libres de se déplacer sur l'axe \hat{x} d'un référentiel cartésien. Les positions d'équilibre des oscillateurs sont données par $x_n = a n$, où $n \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$ est une distance donnée. On utilise la variable q_i pour décrire le déplacement de l'oscillateur i de sa position d'équilibre. Introduisons des forces attractives entre deux voisins, leurs modules étant donnés par $F_{i,i+1} = \lambda |q_{i+1} - q_i|$, où λ est une constante positive.

1. Trouver le Lagrangien du système ainsi que les équations du mouvement.
2. Trouver l'Hamiltonien ainsi que les équations de Hamilton. Vérifier l'équivalence avec le formalisme de Lagrange.
3. Effectuer la limite continue dans les expressions du Lagrangien et du Hamiltonien, c'est-à-dire prendre la limite $a \rightarrow 0$ en gardant constantes les quantités physiques suivantes :
 - $\mu = \frac{m}{a}$... la masse par unité de longueur de la chaîne des oscillateurs,
 - $Y = \lambda a$... le coefficient d'élasticité de Young,
 - ω ... la fréquence propre.
4. Effectuer la même limite dans les équations du mouvement.
5. Donner la forme continue de la fonctionnelle de l'action.
6. Redériver les équations du mouvement en se servant du principe de moindre action.
7. Trouver la solution générale de l'équation du mouvement pour le champ continu.

• Exercice 2 : Unités I

Convertir en unités 'naturelles' (GeV) :

1. 1 cm
2. 1 s
3. 1 g
4. 1 K
5. la limitation de vitesse sur l'autoroute 120 km/h
6. la constante de Hubble $H \simeq 100 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ (1 pc = 3.26 année-lumière)

• **Exercice 3 : Unités II**

Dans le système d'unités naturel $\hbar = c = k = 1$, donner la dimension de chacune des entités suivantes :

1. l'action
2. la force
3. la constante de gravitation G_N
4. le champ électrique
5. le champ magnétique
6. la charge électrique.

• **Exercice 4 : Unités III**

Convertir en unités 'naturelles' (GeV) :

1. la constante de gravitation $G_N = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
2. la densité critique de l'univers $\rho_{\text{crit}} = 3H_0^2/(8\pi G_N)$
3. 1 Gauss
4. la charge d'un électron

• **Exercice 5 : Modèle Standard**

Enumérer les particules élémentaires (quarks, leptons, bosons) ainsi que leurs propriétés fondamentales (masse, charge, spin).

• **Exercice 6 : Champ scalaire réel, équations du mouvement**

Considérer l'action d'un champ scalaire réel massif donné par :

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_0 \phi(x))^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi(x))^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2 \right\} .$$

1. Trouver les équations du mouvement pour $\phi(x)$.
2. Trouver le moment conjugué $\pi(x)$ associé à $\phi(x)$.
3. Trouver l'Hamiltonien.

• **Exercice 7 : Champ scalaire complexe, équations du mouvement**

Considérer l'action d'un champ scalaire complexe donné par :

$$S = \int d^4x \{ \partial_0 \phi(x)^* \partial_0 \phi(x) - \partial_i \phi(x)^* \partial_i \phi(x) - V[\phi^* \phi] \} .$$

1. En utilisant la décomposition :

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) + i \phi_2(x)) , \\ \phi^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1(x) - i \phi_2(x)) , \end{aligned}$$

réécrire l'action en terme des champs réels $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$. Trouver les équations du mouvement pour $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$.

2. En considérant $\phi(x)$ et $\phi^*(x)$ comme des champs indépendants, trouver leurs équations du mouvement. Comparer avec les résultats trouvés au point 1.

• **Exercice 8** : Minimisation sous contrainte

Considérer l'action suivante :

$$S = \int d^2x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a(x) \partial^\mu \phi^a(x), \quad a = 1, 2, 3.$$

où les ϕ^a sont soumis à la contrainte

$$\phi^a(x) \phi^a(x) \equiv \sum_{a=1}^3 \phi^a(x) \phi^a(x) = 1.$$

Trouver les équations du mouvement.

• **Exercice 9** : Electrodynamique scalaire

Considérer l'action :

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) [(\partial^\mu + ieA^\mu(x))\phi^*(x)] \cdot [(\partial_\mu - ieA_\mu(x))\phi(x)] \right\} - V[\phi^*\phi],$$

avec $F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x)$. Trouver toutes les équation du mouvement.

• **Exercice 10** : Champ spinoriel, équations du mouvement

Considérer l'action

$$S = \int d^4x \left\{ i \bar{\Psi}_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu \Psi_\beta - m \bar{\Psi}_\alpha \Psi_\alpha \right\}.$$

où les Ψ_α représentent 4 variables complexes ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) et les $\bar{\Psi}_\alpha$ sont les 4 variables complexes conjuguées aux Ψ_α . Les $(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$ sont des matrices 4×4 données. En traitant les variables Ψ_α et $\bar{\Psi}_\alpha$ indépendamment, calculer la variation de l'action pour obtenir les équations du mouvement.

• **Exercice 11** : Couplage de Yukawa, équations du mouvement

En calculant la variation de

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V[\phi] + i \bar{\Psi}_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu \Psi_\beta - m \bar{\Psi}_\alpha \Psi_\alpha + f \phi \bar{\Psi}_\alpha \Psi_\alpha \right\},$$

trouver les équations du mouvement.

• **Exercice 12** : Electrodynamique

Trouver les équations du mouvement pour $A_\mu(x)$ et $\Psi_\alpha(x)$ ($\bar{\Psi}_\alpha(x)$) en calculant la variation de l'action :

$$S = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + i \bar{\Psi}_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} [\partial_\mu - ieA_\mu(x)] \Psi_\beta - m \bar{\Psi}_\alpha \Psi_\alpha \right\}.$$

• **Exercice 13** : Symétrie et théorème de Noether I

On considère un champ scalaire réel sans masse ϕ avec l'action :

$$S = \int d^4x \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi .$$

Cette action est clairement invariante sous la transformation $\phi \rightarrow \phi + c$.

- Trouver le courant de Noether correspondant et vérifier qu'il est conservé.
- Trouver la variation de l'action pour un $c(x)$ qui dépend de x et la rendre sous la forme suivante :

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu c(x) J^\mu(x) .$$

Comparer $J^\mu(x)$ avec le résultat trouvé à l'aide du théorème de Noether.

• **Exercice 14** : Symétrie et théorème de Noether II

On considère un système de deux champs scalaires avec l'action :

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2 - V[\phi_1^2 + \phi_2^2] \right\}$$

Cette action est symétrique sous les transformations

$$\begin{aligned} \phi_1 &\rightarrow \cos \alpha \phi_1 + \sin \alpha \phi_2 , \\ \phi_2 &\rightarrow -\sin \alpha \phi_1 + \cos \alpha \phi_2 , \end{aligned}$$

où α est un paramètre continu.

- Trouver le courant J_μ correspondant et vérifier qu'il est conservé.
- Exprimer le courant en termes de ϕ_1 , ϕ_2 et des moments canoniquement conjugués π_1 et π_2 .
Considérer la charge $Q = \int d^3x J_0(x)$. Montrer qu'elle est conservée, i.e.

$$\{Q, \mathcal{H}\} = 0 ,$$

où \mathcal{H} est l'hamiltonien et $\{\cdot, \cdot\}$ le crochet de Poisson.

- Montrer que la charge Q génère les transformations de symétrie ci-dessus, au sens suivant :

$$\begin{aligned} \delta \phi_1 &= \alpha \{Q, \phi_1\} , \\ \delta \phi_2 &= \alpha \{Q, \phi_2\} . \end{aligned}$$

- Trouver la variation de l'action pour un $\alpha(x)$ qui dépend de x et l'écrire sous la forme suivante :

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu \alpha(x) \tilde{J}^\mu(x) .$$

Comparer $\tilde{J}^\mu(x)$ avec le résultat trouvé à l'aide du théorème de Noether.

• **Exercice 15 :** Symétrie et théorème de Noether III

On considère à nouveau un champ scalaire réel sans masse.

- Montrer que l'action possède la symétrie

$$\begin{cases} x^\mu & \longrightarrow x'^\mu = \lambda^{-1} x, \\ \phi(x) & \longrightarrow \phi'(x') = \lambda \phi(x). \end{cases}$$

- Trouver les courants correspondants et vérifier qu'ils sont conservés.
– Trouver la variation de l'action pour un $\lambda(x)$ qui dépend de x et l'écrire sous la forme suivante :

$$\delta S = \int d^4x \partial_\mu \lambda(x) \tilde{J}^\mu(x).$$

Comparer $\tilde{J}^\mu(x)$ avec le résultat trouvé à l'aide du théorème de Noether.

• **Exercice 16 :** Algèbre d'opérateurs I

Vérifier les relations suivantes :

1. $[AB, C] = [A, C]B + A[B, C]$.
2. $[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] = -\hat{a}$.
3. $[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$.

• **Exercice 17 :** Algèbre d'opérateurs II

On définit une fonction analytique d'un opérateur par sa série de Taylor :

$$f(\hat{a}) = f(0) + f'(0)\hat{a} + \frac{1}{2}f''(0)\hat{a}^2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} f^{(i)}(0)\hat{a}^i.$$

Calculer :

1. $[\hat{a}^\dagger, f(\hat{a})]$.
2. $[\hat{a}, f(\hat{a}^\dagger)]$.
3. $e^{\gamma \hat{a}} \hat{a}^\dagger e^{-\gamma \hat{a}}$.
4. $e^{\gamma \hat{a}^\dagger} \hat{a} e^{-\gamma \hat{a}^\dagger}$.
5. $e^{\gamma \hat{a}^2} \hat{a}^\dagger e^{-\gamma \hat{a}^2}$.
6. $e^{\gamma \hat{a}^{\dagger 2}} \hat{a} e^{-\gamma \hat{a}^{\dagger 2}}$.
7. $e^{\gamma \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a} e^{-\gamma \hat{a}^\dagger \hat{a}}$.
8. $e^{\gamma \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a}^\dagger e^{-\gamma \hat{a}^\dagger \hat{a}}$.

• **Exercice 18 :** Exponentielle d'opérateurs I

1. Soit \hat{A} et \hat{B} deux opérateurs tels que $[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = 0$. Vérifier que

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B} + 1/2 [\hat{A}, \hat{B}]}.$$

Comment faudrait-il modifier cette formule si les commutateurs ci-dessus ne s'annulent pas ?

2. Montrer la relation

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots$$

• **Exercice 19** : Exponentielle d'opérateurs II

Calculer

$$\frac{d}{d\lambda} e^{B(\lambda)} .$$

Attention : $B(\lambda)$ et $B'(\lambda)$ ne commutent pas forcément.

• **Exercice 20** : Transformation de Bogoliubov

Soit $[a, a^\dagger] = 1$, considérer la transformation suivante :

$$\begin{aligned} b &= Aa^\dagger + Ba + C , \\ b^\dagger &= B^*a^\dagger + A^*a + C^* . \end{aligned}$$

Sous quelle conditions sur les nombres complexes A , B et C les opérateurs b^\dagger et b peuvent être interprétés comme des opérateurs de création et d'annihilation ?

• **Exercice 21** : Diagonalisation de l'Hamiltonien

Soit

$$\mathcal{H} = \omega_1 (a^\dagger)^2 + \omega_1^* (a)^2 + \omega_3 a^\dagger a ,$$

avec $[a, a^\dagger] = 1$. Trouver le spectre de \mathcal{H} .

• **Exercice 22** : Diagonalisation du Lagrangien

Considérer le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \int d^3x \{ \alpha_{11} (\partial_\mu \phi_1)^2 + 2\alpha_{12} (\partial_\mu \phi_1) (\partial^\mu \phi_2) + \alpha_{22} (\partial_\mu \phi_2)^2 - m_{11}^2 \phi_1^2 - 2m_{12}^2 \phi_1 \phi_2 - m_{22}^2 \phi_2^2 \} ,$$

où α_{ij} et m_{ij} sont des paramètres réels et ϕ_i sont des champs scalaires réels. Trouver les masses des particules physiques. Quelles sont les valeurs acceptables pour les paramètres α_{ij} et m_{ij} ?

• **Exercice 23** : Seconde quantification I

Considérer le Lagrangien d'un champ scalaire massif donné par

$$\mathcal{L} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{2} (\partial_0 \phi)^2 - \frac{1}{2} (\partial_i \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right\} .$$

Exprimer ϕ , π et l'Hamiltonien en fonction d'opérateurs de création et d'annihilation et montrer que ϕ et π satisfont les relations de commutations typiques des champs bosoniques.

• **Exercice 24** : Seconde quantification II

Considérer le cas du Lagrangien d'une particule scalaire chargée donné par

$$\mathcal{L} = \int d^3x \{ \partial_0 \phi^* \partial_0 \phi - \partial_i \phi^* \partial_i \phi - m^2 \phi^* \phi \} .$$

- Trouver l'Hamiltonien.
- Exprimer les champs et leurs moments conjugués et l'Hamiltonien en fonction d'opérateurs de création et d'annihilation.
- Montrer que la charge Q définie par

$$Q = \int d^3x i(\phi^* \partial_0 \phi - \partial_0 \phi^* \phi)$$

est indépendante du temps. Exprimer la charge en terme d'opérateurs de création et d'annihilation.

• **Exercice 25** : Représentation de Heisenberg

Trouver comment les opérateurs de création et d'annihilation dépendent du temps dans la représentation de Heisenberg. On rappelle l'équation de Heisenberg, valable pour un opérateur quelconque :

$$i\partial_t \hat{A} = [\hat{A}, \hat{\mathcal{H}}] .$$

Est-ce que le commutateur de a et a^\dagger change dans le temps ?

• **Exercice 26** : Equations du mouvement et représentation de Heisenberg

Exprimer le champ de Heisenberg $\phi(t, x)$ ainsi que son moment conjugué en fonction des opérateurs de création et d'annihilation. Montrer que $\phi(t, x)$ satisfait les mêmes équations que le champ classique.

• **Exercice 27** : Opérateur impulsion

On considère un champ scalaire réel $\phi(\vec{x}, t)$. Soit l'opérateur d'énergie-impulsion P_μ , donné par

$$P_\mu = \int d^3x T_{0\mu} .$$

Calculer

$$[P_\mu, \phi(\vec{x}, t)] ,$$

ainsi que

$$e^{iP_\mu a^\mu} \phi(\vec{x}, t) e^{-iP_\mu a^\mu} .$$

• **Exercice 28** : Charge

Considérer un champ scalaire complexe massif et calculer :

$$\begin{aligned} e^{iQ} \phi(x) e^{-iQ} , \\ e^{iQ} \phi^*(x) e^{-iQ} , \end{aligned}$$

où Q est l'opérateur de charge défini par

$$Q = \int d^3x i(\phi^* \partial_0 \phi - \partial_0 \phi^* \phi) .$$

• **Exercice 29** : Spin du champ scalaire I

Considérer le tenseur du moment cinétique d'un champ scalaire réel :

$$\begin{aligned} M^\mu_{\nu\rho} &= T^\mu_{\nu} x_\rho - T^\mu_{\rho} x_\nu \\ &= \partial^\mu \phi (\partial_\nu \phi x_\rho - \partial_\rho \phi x_\nu) - \mathcal{L} (x_\rho \delta^\mu_\nu - x_\nu \delta^\mu_\rho) . \end{aligned}$$

Définissons l'opérateur suivant :

$$J^k = -\frac{1}{2} \int d^3x \epsilon^{ijk} M_{ij}^0 .$$

- Exprimer J^k en termes d'opérateurs de création et d'annihilation.
- Calculer

$$J^k |p_0\rangle$$

pour trouver le spin du champ scalaire, où

$$|\vec{p}_0\rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2\epsilon_{\vec{p}}} f(\vec{p}) a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle$$

est une superposition d'états à une particule. La 'fonction d'onde' $f(\vec{p})$ est centrée autour de $\vec{p}_0 = 0$. On suppose qu'elle est normalisée de sorte à satisfaire la condition suivante :

$$\langle \vec{p}_0 | \vec{p}_0 \rangle = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3 2\epsilon_{\vec{p}}} f(\vec{p}) f^*(\vec{p}) = 1 .$$

• **Exercice 30** : Spin du champ scalaire II

Pour un champ scalaire réel, soit l'opérateur J_k , défini par

$$J^k = -\frac{1}{2} \int d^3x \epsilon^{ijk} M_{ij}^0 .$$

Calculer

- Son commutateur avec le champ,

$$[J_k, \phi(\vec{x}, t)] .$$

- Son action sur le champ,

$$e^{i\alpha_k J^k} \phi(\vec{x}, t) e^{-i\alpha_k J^k} .$$

Cet opérateur est donc le générateur des rotations dans l'espace.

- Les commutateurs suivants :

$$[J_k, P_i] \quad \text{et} \quad [J_k, J_i] .$$

• **Exercice 31** : Champ vectoriel massif et nombre de degrés de liberté

Considérer un champ vectoriel massif en $(n+1)$ dimensions avec le Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu . \quad (\mu, \nu = 0, \dots, n)$$

Trouver les équations du mouvement et donner la solution générale pour $n = 1, 2, 3$. Combien de degrés de liberté faut-il pour décrire un tel champ ?

• **Exercice 32 :** Quadri-vecteurs de polarisation

Construire les trois quadri-vecteurs de polarisation $\epsilon_\mu^m(k)$, $m = 1, 2, 3$ du champ vectoriel massif en $(3 + 1)$ dimensions,

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\epsilon_k} \sum_{m=1}^3 \epsilon_\mu^m(k) \left[a_m e^{i\vec{k}\vec{x}} + a_m^\dagger e^{-i\vec{k}\vec{x}} \right],$$

de telle manière que

$$k^\mu \epsilon_\mu^m(k) = 0,$$

et tels qu'ils satisfassent les relations suivantes

$$\begin{aligned} (\text{orthogonalité}) \quad & \epsilon_\mu^m(k) \epsilon^{n\mu}(k) = -\delta^{mn}, \\ (\text{fermeture}) \quad & -\sum_{m=1}^3 \epsilon_\mu^m(k) \epsilon_\nu^m(k) = \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{m^2}. \end{aligned}$$

• **Exercice 33 :** Champ vectoriel sans masse

Répéter l'exercice précédent dans le cas d'un champ vectoriel sans masse.

• **Exercice 34 :** Masse topologique

Considérer le système en $(2 + 1)$ dimensions décrit par le Lagrangien

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \lambda \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu F_{\nu\rho}.$$

Le deuxième terme est appelé un *terme de masse topologique*.

- Quelles sont les dimensions de A_μ et de λ ?
- Trouver les équations du mouvement ainsi que la solution générale.
- Combien de degrés de liberté faut-il pour décrire un tel champ ?
- Ces degrés de liberté sont-ils massifs ou sans masse ?

• **Exercice 35 :** Groupe de Lorentz et $\text{SL}(2, \mathbb{C})$

Montrer que pour chaque matrice A paramétrisée par

$$A = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sigma_0 - i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{\sigma} \cdot \hat{u}$$

la transformation de Lorentz donnée par

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \text{Tr} [\tilde{\sigma}^\mu A^\dagger \sigma_\nu A]$$

représente une rotation d'angle θ autour de l'axe \hat{u} .

Montrer de la même manière que la relation donnée ci-dessus associe chaque matrice A paramétrisée par

$$A = \cosh\left(\frac{\Phi}{2}\right) \sigma_0 - \sinh\left(\frac{\Phi}{2}\right) \vec{\sigma} \cdot \hat{u}$$

à un boost de rapidité Φ dans la direction \hat{u} . Rappelons que $\sigma_\mu = (\sigma_0, \vec{\sigma})$ et $\tilde{\sigma}_\mu = (\sigma_0, -\vec{\sigma})$, où $\vec{\sigma}$ et σ_0 sont les matrices de Pauli et la matrice identité 2×2 , respectivement.

• **Exercice 36** : $\text{SL}(2, \mathbb{C})$, propriétés

Montrer que pour toute matrice $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ on a

$$A^T \mathcal{E} A = \mathcal{E},$$

où \mathcal{E} est donné par

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

• **Exercice 37** : Matrices de Dirac

Vérifier les propriétés suivantes des matrices γ :

- $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$,
- $\text{Tr}[\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_{2n+1}}] = 0$,
- $\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = 4\eta_{\mu\nu}$,
- $\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho] = 4(\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\rho} - \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\rho} + \eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\lambda})$,
- $\text{Tr}[\gamma_5(\gamma \text{ ou } \gamma\gamma \text{ ou } \gamma\gamma\gamma)] = 0$,
- $\text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\rho] = -4i \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}$.

• **Exercice 38** : Symétries globales I

Déterminer la loi de transformation du Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + h.c. - m \bar{\Psi} \Psi$$

sous les deux transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \Psi &\longrightarrow e^{i\alpha} \Psi, \\ \Psi &\longrightarrow e^{i\alpha\gamma^5} \Psi. \end{aligned}$$

Dans le cas d'une symétrie, trouver les courants conservés.

• **Exercice 39** : Symétries globales III

Soit le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi + h.c. - m \bar{\Psi} \Psi,$$

En supposant le bon nombre de composantes pour le champ Ψ , déterminer la loi de transformation de ce Lagrangien sous les transformations suivantes :

$$\begin{aligned} \Psi &\longrightarrow e^{i\frac{\tau^a}{2}\alpha^a} \Psi, \\ \Psi &\longrightarrow e^{i\frac{\tau^a}{2}\alpha^a\gamma^5} \Psi, \\ \Psi &\longrightarrow e^{i\frac{\lambda^b}{2}\alpha^b} \Psi, \\ \Psi &\longrightarrow e^{i\frac{\lambda^b}{2}\alpha^b\gamma^5} \Psi. \end{aligned}$$

Les matrices τ^a , $a = 1, 2, 3$ et λ^b , $b = 1, \dots, 8$ sont respectivement les matrices de Pauli et de Gell-Mann. Dans le cas d'une symétrie, trouver les courants conservés.

• **Exercice 40** : Solution de l'équation de Dirac

Trouver les expressions pour les spineurs u_σ et v_σ pour un \vec{k} arbitraire dans la représentation de Weyl.

• **Exercice 41** : Seconde quantification du champ spinoriel

Exprimer l'Hamiltonien et la charge des fermions en termes d'opérateurs de création et d'annihilation.

• **Exercice 42** : La parité

A partir de la transformation d'un spineur de Dirac sous la parité

$$\Psi(t, \vec{x}) \longrightarrow \Psi_P(t, \vec{x}) = \eta_P \gamma^0 \Psi(t, -\vec{x}), \quad \text{avec } |\eta_P|^2 = 1,$$

trouver les transformations des termes bilinéaires suivants :

$$\bar{\Psi}\Psi, \quad i\bar{\Psi}\gamma_5\Psi, \quad \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi.$$

• **Exercice 43** : La conjugaisons de charge

1. A partir de la transformation d'un spineur de Dirac sous la conjugaisons de charge

$$\Psi \longrightarrow \Psi_C = C (\bar{\Psi})^T,$$

trouver les transformations des termes bilinéaires suivants :

$$\bar{\Psi}\Psi, \quad i\bar{\Psi}\gamma_5\Psi, \quad \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi, \quad \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma_5\Psi.$$

Utiliser les propriétés suivantes de la matrice C :

$$\begin{aligned} C^T &= C^\dagger = -C & CC^\dagger &= C^\dagger C = 1 & C^2 &= -1 \\ C\gamma_\mu C^{-1} &= -\gamma_\mu^T. \end{aligned}$$

2. Vérifier que dans la représentation de Weyl un choix possible pour la matrice C est

$$C = i\gamma^2\gamma^0.$$

3. Soit

$$\Psi(x) \longrightarrow \Psi'(x') = S(\Lambda)\Psi(x) \quad \text{où} \quad S(\Lambda) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -\mathcal{E}A^*\mathcal{E} \end{pmatrix}.$$

la transformation de Lorentz d'un spineur de Dirac.

Montrer que le spineur Ψ_C se transforme sous les transformation de Lorentz de la même manière que le spineur Ψ .

• **Exercice 44** : La section efficace dans le C.M.

Définir la section efficace différentielle pour une diffusion $2 \rightarrow 2$ dans le référentiel du centre de masse. En particulier, effectuer toutes les intégrations possibles sur l'espace de phase pour obtenir

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega_{p_1}} \right)_{C.M.}.$$

• **Exercice 45** : Le temps de vie

Répéter le calcul de l'exercice précédent, mais pour la désintégration $1 \rightarrow 2$ d'une particule, dans le référentiel où celle-ci est au repos.

• **Exercice 46** : Calcul perturbatif et produit chronologique

Soit une fonction f , de classe \mathcal{C}^1 , qui satisfait l'équation intégrale

$$f(x) = 1 + \lambda \int_{x_0}^x g(y)f(y) dy .$$

1. Trouver l'équation différentielle dont f est solution.
2. En admettant que λ est un petit paramètre, i.e. que $|\lambda| \ll 1$, résoudre cette équation perturbativement.
3. Montrer finalement l'égalité suivante

$$\int_{x_0}^x dy_1 \cdots \int_{x_0}^{y_{n-1}} dy_n g(y_1) \cdots g(y_n) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x dy_1 \cdots dy_n T[g(y_1) \cdots g(y_n)] ,$$

où $T[g(x_1) \cdots g(x_n)]$ est le produit chronologique des $g(x_i)$.

• **Exercice 47** : Section efficace dans la théorie $\lambda\phi^4$

Par un calcul direct (i.e. sans utiliser les règles de Feynman), obtenir la section efficace du processus $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$ à l'ordre le plus bas dans la théorie $\lambda\phi^4$, i.e. avec le Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 .$$

On se placera dans le référentiel du centre de masse pour effectuer les intégrations sur l'espace de phase.

• **Exercice 48** : Désintégration d'une particule scalaire

Considérer le Lagrangien suivant

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 - \frac{1}{2} M^2 \Phi^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \mu \Phi \phi \phi ,$$

où le dernier terme permet la désintégration d'une particule Φ en deux particules ϕ .

1. Quelle condition faut-il imposer pour que la désintégration soit possible ?
2. En supposant que cette condition est satisfaite, calculer le taux de désintégration du Φ à l'ordre principal en μ .

• **Exercice 49** : Propagateurs des champs

- A partir des expressions des champs quantifiés (champ scalaire, champ de Dirac, champ vectoriel massif) trouver les fonctions de corrélations suivantes :

$$\begin{aligned} D(x-y) &= \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle, \\ D_{ab}(x-y) &= \langle 0 | \Psi_a(x) \bar{\Psi}_b(y) | 0 \rangle, \\ D_{\mu\nu}(x-y) &= \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

- Vérifier que les propagateurs de Feynman du champ scalaire, spinoriel et vectoriel massif définies par

$$\begin{aligned} S^F(x-y) &= \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle, \\ S_{ab}^F(x-y) &= \langle 0 | T \Psi_a(x) \bar{\Psi}_b(y) | 0 \rangle, \\ S_{\mu\nu}^F(x-y) &= \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

sont donnés par :

$$\begin{aligned} S^F(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}, \\ S_{ab}^F(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i(\not{p} + m)_{ab}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip(x-y)}, \\ S_{\mu\nu}^F(x-y) &= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}) e^{-ip(x-y)}. \end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ est un paramètre auxiliaire déterminant le chemin d'intégration sur p_0 .

Utiliser les définitions suivantes des produits chronologiques :

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle, \\ \langle 0 | T \Psi_a(x) \bar{\Psi}_b(y) | 0 \rangle &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | \Psi_a(x) \bar{\Psi}_b(y) | 0 \rangle - \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | \bar{\Psi}_b(y) \Psi_a(x) | 0 \rangle, \\ \langle 0 | T A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle &= \theta(x^0 - y^0) \langle 0 | A_\mu(x) A_\nu(y) | 0 \rangle + \theta(y^0 - x^0) \langle 0 | A_\nu(y) A_\mu(x) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

• **Exercice 50** : Section efficace dans la théorie $\lambda\phi^4$

En utilisant les règles de Feynman, calculer l'amplitude \mathcal{M} du processus $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + p_4$, au plus bas ordre dans la théorie

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4.$$

On appliquera les règles de Feynman d'abord en représentation k , puis en représentation x .

• **Exercice 51** : Éléments de matrices dans la théorie $\lambda\phi^4$

Considérer la théorie $\lambda\phi^4$.

Exprimer les éléments de la matrice suivants en fonction du propagateur $D(x - y) = \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$:

$$\begin{aligned} & \langle 0|T(\frac{1}{4!} \int d^4x \phi^4(x))|0\rangle \\ & \langle 0|T(\frac{1}{4!} \int d^4x \phi^4(x) \frac{1}{4!} \int d^4y \phi^4(y))|0\rangle \\ & \langle p_1|T(\frac{1}{4!} \int d^4x \phi^4(x))|k_1\rangle \\ & \langle p_1|T(\frac{1}{4!} \int d^4x \phi^4(x) \frac{1}{4!} \int d^4y \phi^4(y))|k_1\rangle \\ & \langle p_1 p_2|T(\frac{1}{4!} \int d^4x \phi^4(x))|k_1 k_2\rangle \\ & \langle p_1 p_2|T(\frac{1}{4!} \int d^4x \phi^4(x) \frac{1}{4!} \int d^4y \phi^4(y))|k_1 k_2\rangle \end{aligned}$$

• **Exercice 52** : Règles de Feynman pour la théorie de Yukawa

Obtenir les règles de Feynman pour la théorie de Yukawa :

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 + i \bar{\Psi}_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu \Psi_\beta - m \bar{\Psi}_\alpha \Psi_\alpha + g \phi \bar{\Psi}_\alpha \Psi_\alpha \right\}.$$

• **Exercice 53** : Règles de Feynman pour la théorie de Yang-Mills

Identifier les différents vertex dans la théorie de Yang-Mills, et obtenir les règles de Feynman correspondantes

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} \quad a = 1, 2, 3,$$

avec

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

Les constantes de structure f^{abc} sont complètement antisymétriques par rapport à l'échange de deux indices.

• **Exercice 54** : Diagrammes de Feynman dans la théorie de Yukawa

Considérer le Lagrangien de Yukawa :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} M^2 \phi^2 + i \bar{\Psi}_\alpha (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \partial_\mu \Psi_\beta - m \bar{\Psi}_\alpha \Psi_\alpha + g \phi \bar{\Psi}_\alpha \Psi_\alpha.$$

1. Trouver tous les processus possibles au premier ordre dans la théorie de perturbation. Donner les éventuelles conditions nécessaires pour la réalisation de ces processus.
2. Estimer la section efficace / le temps de vie dans chacun de ces cas.
3. Dessiner tous les diagrammes de Feynman possibles au second ordre.

• **Exercice 55** : La section efficace pour $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

Trouver la section efficace non-polarisée pour la diffusion $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ en l'électrodynamique quantique dans le référentiel du centre de masse. Ne considérer que l'ordre plus bas en théorie de perturbation. On pourra négliger la masse de l'électron.

• **Exercice 56** : L'électrodynamique aux ordres supérieurs

1. Dessiner tous les processus possibles en électrodynamique quantique (électron-positron et photon) au troisième ordre en théorie de perturbation ;
2. Prouver le théorème suivant :

Considérons les processus en électrodynamique dont toutes les lignes externes sont des photons. L'amplitude de ceux qui possèdent un nombre impair de pattes est nulle.

• **Exercice 57** : Groupes de Lie

Considérer les quatre types de groupe de Lie suivants :

$$U(N), \quad SU(N), \quad SO(N), \quad SL(N, \mathbb{C}).$$

Pour chaque groupe compter le nombre de paramètres indépendants nécessaires pour décrire un élément général du groupe.

• **Exercice 58** : Les matrices de Pauli

Considérer les matrices de Pauli données par

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Montrer l'identité suivante :

$$\tau_i \tau_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \tau_k,$$

où ϵ_{ijk} représente le tenseur complètement antisymétrique par rapport à l'échange de deux indices arbitraires, avec la définition $\epsilon_{123} = +1$.

- Vérifier que la relation ci-dessus implique immédiatement

$$[T_i, T_j] = \epsilon_{ijk} T_k,$$

où on a défini $T_k = -\frac{i}{2} \tau_k$.

- Prouver enfin les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} &= 6, \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{ijp} &= 2\delta_{kp}, \\ \epsilon_{ijk} \epsilon_{ipq} &= \delta_{jp} \delta_{kq} - \delta_{jq} \delta_{kp}. \end{aligned}$$

• **Exercice 59** : Groupe $SU(2)$

Calculer

$$e^{i\xi_a \frac{\tau_a}{2}},$$

où $\xi_a \in \mathbb{R}$ et τ_a sont les matrices de Pauli.

• **Exercice 60** : Représentation adjointe

Considérer trois matrices réelles T_a de dimension 3×3 définies par la relation :

$$(T_a)_{bc} = -\epsilon_{abc},$$

avec $a, b, c = 1, 2, 3$.

- Trouver les relations de commutation $[T_a, T_b]$
- Calculer l'exponentielle : $e^{\xi_a T_a}$, avec $\xi_a \in \mathbb{R}$.

• **Exercice 61** : Groupe SU(2) et rotations

Soient n_i les composantes d'un vecteur tridimensionnel. Montrer que la transformation définie par :

$$(n'_i \tau_i) = e^{i\xi_a \frac{\tau_a}{2}} (n_j \tau_j) e^{-i\xi_a \frac{\tau_a}{2}},$$

correspond à une rotation du vecteur n_i en n'_i .

• **Exercice 62** : Groupe des rotations

Considérer l'espace Euclidien à deux dimensions x_i , $i = 1, 2$. Trouver la transformation

$$x'_i = U_{ij} x_j$$

telle que $x'^2_1 + x'^2_2 = x^2_1 + x^2_2$, et trouver son générateur.

• **Exercice 63** : Groupe de Lorentz

Considérer l'espace Minkowskien à deux dimensions x_i , $i = 0, 1$. Trouver la transformation

$$x'_i = \tilde{U}_{ij} x_j$$

telle que $x'^2_0 - x'^2_1 = x^2_0 - x^2_1$, et trouver son générateur.

• **Exercice 64** : Dérivée covariante I

Montrer que

$$[D_\mu, D_\nu] \Psi \propto F_{\mu\nu} \Psi,$$

où $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$ est la dérivée covariante abélienne. Trouver le coefficient de proportionnalité. Répéter les calculs dans le cas de la dérivée covariante non-abélienne.

• **Exercice 65** : Dérivée covariante II

Montrer que sous la transformation de jauge :

$$\Psi \rightarrow U(x)\Psi,$$

la dérivée covariante se transforme comme :

$$D_\mu \rightarrow U(x)D_\mu U^{-1}(x).$$

• **Exercice 66** : Confinement

– Considérer des quarks q_i qui forment des triplet sous le groupe SU(3)_{couleur} :

$$q_i \rightarrow U_{ij} q_j,$$

où la matrice U est un élément du groupe de Lie SU(3). Montrer qu'un état à trois quarks (un baryon) du type

$$\epsilon_{ijk} q_i q_j q_k$$

n'a pas de couleur, c'est-à-dire qu'un tel état est invariant sous les transformations de SU(3).

– Trouver une autre configuration 'blanche' possible (les mésons).

• **Exercice 67** : Baryons et mésons

On considère ici un modèle à trois quarks u , d , et s . On introduit un nouveau nombre quantique, l'étrangeté S , associée à chaque quark. Le tableau suivant résume les informations utiles :

	d	u	s
Charge électrique Q	$-\frac{1}{3}$	$+\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$
Isospin I_z	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0
Etrangeté S	0	0	-1
Masse, en MeV	~ 7.5	~ 4	~ 150

– Mésons. Soient les six mésons suivants, K^0 , K^+ , K^- , π^+ , π^- , \bar{K}^0 , avec les propriétés suivantes :

	K^0	K^+	K^-	π^+	π^-	\bar{K}^0
Charge électrique Q	0	+1	-1	+1	-1	0
Etrangeté S	+1	+1	-1	0	0	-1
Masse, en MeV	497	493	493	139	139	497

Donner le contenu de ces différentes particules, sachant qu'elles ne contiennent que les trois quarks du premier tableau.

– Baryons. On considère six baryons, n (neutron), p (proton), Σ^- , Σ^+ , Ξ^- , Ξ^0 , avec

	n	p	Σ^-	Σ^+	Ξ^-	Ξ^0
Charge électrique Q	0	+1	-1	+1	-1	0
Etrangeté S	0	0	-1	-1	-2	-2
Masse, en MeV	939	938	1197	1189	1321	1314

Identifier à nouveau leur contenu.

• **Exercice 68** : Brisure de symétrie globale I

Considérer le Lagrangien suivant :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a - \frac{1}{2} m^2 \phi_a^2 - \frac{\lambda}{4} (\phi_a^2)^2,$$

où ϕ_a , $a = 1, 2, 3$ sont trois champs scalaires réels.

1. Quelle est le groupe de symétrie de ce Lagrangien ? Combien de paramètres ce groupe a-t-il ?
2. Trouver l'état de vide dans le cas $m^2 > 0$. Considérer des petites perturbations autour du vide pour déterminer les masses de ces excitations.
3. Répéter les discussions pour le cas $m^2 < 0$.
4. Quelle est la symétrie résiduelle dans ce cas $m^2 < 0$? Comparer avec le point 1 et appliquer le théorème de Goldstone. Ceci correspond-il aux résultats du point 3 ?

Considérons maintenant le cas de deux tels champs ϕ_a et χ_a , $a = 1, 2, 3$. Ecrivons le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_a)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \chi_a)^2 - \mathcal{V}[\phi_a, \chi_a].$$

1. Quel est le potentiel $\mathcal{V}[\phi_a, \chi_a]$ le plus général, qui soit invariant sous le groupe de $SO(3)$?
2. Quelle est la symétrie résiduelle après la brisure de symétrie ?

• **Exercice 69** : Brisure de symétrie globale II

Considérer le Lagrangien

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi^\dagger \partial^\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 ,$$

où Φ se transforme comme un doublet sous la symétrie SU(2) globale :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}; \quad \Phi \rightarrow U\Phi; \quad U \in \text{SU}(2) .$$

1. Trouver l'état de vide dans le cas $m^2 < 0$. Considérer des petites perturbations autour du vide pour déterminer les masses de ces excitations.
2. Montrer que le doublet défini comme :

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi_2^* \\ -\Phi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Phi^* .$$

se transforme de la même façon que $\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$.

3. Serait-ce aussi le cas si le groupe de symétrie considéré était U(2) ?

• **Exercice 70** : Symétrie locale et mécanisme de Higgs

Considérer la théorie de deux champs de jauge et un champ scalaire complexe invariante sous les transformation de jauge locale du groupe U(1) :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(1)} F^{(1)\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{(2)} F^{(2)\mu\nu} + (\mathcal{D}_\mu \varphi)^\star (\mathcal{D}^\mu \varphi) - \frac{\lambda}{4} (\varphi \varphi^\star - v^2)^2 ,$$

avec

$$\mathcal{D}_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi - ie_1 A_\mu^{(1)} \varphi - ie_2 A_\mu^{(2)} \varphi .$$

En supposant que $v^2 > 0$, trouver les masses des particules vectorielles.

• **Exercice 71** : Jauge unitaire et mécanisme de Higgs II

Considérer la théorie d'un doublet de champ scalaire, invariante sous les transformations locales de SU(2),

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2,$$

avec,

$$\begin{aligned}\phi &= \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \quad D_\mu \phi = (\partial_\mu - iA_\mu)\phi, \\ A_\mu &= g \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a.\end{aligned}$$

1. Vérifier que la transformation définie par :

$$U = \frac{1}{\sqrt{\phi^\dagger \phi}} \begin{pmatrix} \phi_0 & -\phi_1 \\ \phi_1^* & \phi_0^* \end{pmatrix}$$

est un élément de SU(2). Montrer que :

$$\phi' = U\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\phi^\dagger \phi} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \chi \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que sous cette transformation le champ de jauge prend la forme :

$$A'_\mu = \frac{i}{2} \frac{1}{\phi^\dagger \phi} \begin{pmatrix} \tilde{\phi}^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu \tilde{\phi} & \tilde{\phi}^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu \phi \\ \phi^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu \tilde{\phi} & \phi^\dagger \overleftrightarrow{D}_\mu \phi \end{pmatrix}$$

3. Ecrire le Lagrangien en terme des nouveaux champs $A_\mu^{a'}$ et χ .

• **Exercice 72** : Modèle Standard

Montrer l'identité suivante

$$Q = e(T_3 + \frac{1}{2}Y),$$

pour les particules gauchères et droitères.

• **Exercice 73** : Charges des bosons W^\pm

Trouver les charges des bosons W^\pm .

• **Exercice 74** : Le temps de vie du muon μ^-

Dessiner un diagramme de Feynman qui décrit la désintégration du muon μ^- . Estimer son temps de vie. ($m_\mu \simeq 106$ MeV)