Un opérateur linéaire U_f qui agit sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ est complétement déterminé par son action sur les vecteurs de la base $\{| 0,0\rangle, | 0,1\rangle, | 1,0\rangle, | 1,1\rangle\}$. Dans le cas traité ici, nous avons en particulier

$$\begin{aligned} U_f \, | 0,0\rangle &= | 0, f(0)\rangle \\ U_f \, | 0,1\rangle &= | 0, 1 \oplus f(0)\rangle \\ U_f \, | 1,0\rangle &= | 1, f(1)\rangle \\ U_f \, | 1,1\rangle &= | 1, 1 \oplus f(1)\rangle \ , \end{aligned}$$

où $\oplus$ est la somme modulo 2.
Pour résoudre la problème nous allons calculer les états $| \psi_0\rangle, | \psi_1\rangle, | \psi_2\rangle, | \psi_3\rangle \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ que les deux qubits prennent à chaque étape du calcul quantique, comme décrit dans la figure **??**.

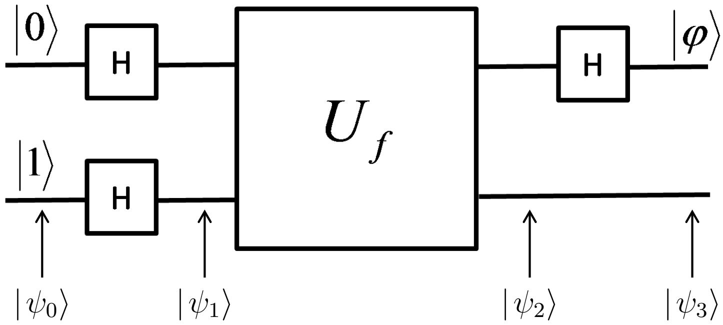

FIGURE 1 – Quatum circuit implementing Deutsch's algorithm.

Nous avons

$$| \psi_0\rangle = | 0\rangle \otimes | 1\rangle = | 0,1\rangle \ ,$$

et

$$\begin{aligned} | \psi_1\rangle &= (H \otimes H) \, | \psi_0\rangle = (H \otimes H) \, | 0\rangle \otimes | 1\rangle \\ &= (H \, | 0\rangle) \otimes (H \, | 1\rangle) \\ &= \left(\frac{| 0\rangle + | 1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{| 0\rangle - | 1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \ , \end{aligned}$$

où H est l'opérateur unitaire correspondant à la porte logique de Hadamard.

Avant de calculer $|\psi_2\rangle = U_f|\psi_1\rangle$, il faut remarquer que

$$
\begin{aligned}
U_f\ |x\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) &= |x\rangle \otimes \left(\frac{|f(x)\rangle - |1 \oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \begin{cases} |x\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) & \text{if } f(x) = 0 \\ |x\rangle \otimes \left(\frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}}\right) & \text{if } f(x) = 1 \end{cases} \\
&= |x\rangle \otimes (-1)^{f(x)} \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\
&= (-1)^{f(x)}\ |x\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \ ,
\end{aligned}
$$

où le dernier passage suit de la linéarité du produit tensoriel, et montre que l'action de l'opérateur sur les deux qubits est essentielle pour le fonctionnement de l'algoritme.
D'après cette relation,

$$
\begin{aligned}
|\psi_2\rangle = U_f\ |\psi_1\rangle = U_f &\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \left(\frac{(-1)^{f(0)}\ |0\rangle + (-1)^{f(1)}\ |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \begin{cases} (-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) & \text{if } f(0) = f(1) \\ (-1)^{f(0)} \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) & \text{if } f(0) \neq f(1)\ . \end{cases}
\end{aligned}
$$

Qui nous mène pour finir à,

$$
\begin{aligned}
|\psi_3\rangle &= (H \otimes \mathbf{1})\ |\psi_2\rangle \\
&= \begin{cases} (-1)^{f(0)}\ |0\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) & \text{if } f(0) = f(1) \\ (-1)^{f(0)}\ |1\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) & \text{if } f(0) \neq f(1) \end{cases} \\
&= (-1)^{f(0)}\ |f(0) \oplus f(1)\rangle \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right).
\end{aligned}
$$

Maintenant, il suffit d'effectuer une mesure sur le premier qubit d'une observable qui soit diagonale dans la base computationnelle $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Le résultat d'une telle mesure nous dira avec certitude si la fonction $f(x)$ est ou non dégénérée.