

Nous allons considérer l'expérience de Stern-Gerlach. Le degré de liberté de spin de l'électron est décrit par trois observables $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$ qui forment les composants d'un vecteur. Ces opérateurs sont exprimés à l'aide des matrices de Pauli, selon $S_j = \frac{\hbar}{2}\sigma_j$ avec $j = x, y, z$ et

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{1}$$

L'expérience consiste à faire passer un faisceau d'électrons à travers un champ magnétique orienté dans une direction \mathbf{n} . Ce passage a comme effet d'effectuer une mesure de la projection du spin dans la direction \mathbf{n} . Autrement dit, on mesure l'observable $\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}$. Pratiquement, après le passage, le faisceau est divisé en deux, avec les électrons dans un état propre $+\hbar/2$ de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}$ dans un faisceau et ceux dans l'état propre $-\hbar/2$ de $\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}$ dans l'autre. Idéalement, au début les électrons sont distribués de manière uniforme sur tous les états de spin possibles. Pour simplifier, nous allons supposer que chaque électron se trouve dans un état $|\psi_\theta\rangle = \cos(\theta)|S_z = +\hbar/2\rangle + \sin(\theta)|S_z = -\hbar/2\rangle$ avec θ qui prend une valeur aléatoire de 0 à 2π pour chaque électron.

Supposons que l'apparat de S-G soit orienté selon $\mathbf{n} = \mathbf{z}$.

1. Quelle fraction des électrons se trouvera dans chaque faisceau après le passage? (suggestion: faire le calcul pour des électrons dans un état $|\psi_\theta\rangle$ et puis moyenner sur θ).
2. On bloque le faisceau correspondant aux électrons $|S_z = -\hbar/2\rangle$ et on fait passer l'autre faisceau dans un deuxième appareil S-G orienté encore selon $\mathbf{n} = \mathbf{z}$. Quelle fraction des électrons se trouvera dans chaque faisceau après ce deuxième passage? Dans quel état ils seront?

3. Comme avant, mais cette fois le deuxième appareil de S-G est orienté selon $\mathbf{n} = \mathbf{x}$. Quelle fraction des électrons se trouvera dans chaque faisceau après le deuxième passage? Dans quel état ils seront?
4. Après le dernier passage décrit dans le point précédant, on bloque le faisceau des électrons dans l'état $|S_x = -\hbar/2\rangle$, et on fait passer les autres dans un troisième appareil de S-G orienté selon $\mathbf{n} = \mathbf{z}$. Quelle fraction des électrons se trouvera dans chaque faisceau après le troisième passage? Dans quel état ils seront?