Exercice 1 Système à deux niveaux

Il faut trouver les solutions de

$$\det(H - E\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} E_1 - E & V \\ V^* & E_2 - E \end{pmatrix} = 0 \tag{1}$$

Donc

$$(E_1 - E)(E_2 - E) - |V|^2 = 0$$
$$E^2 - (E_1 + E_2)E + E_1 E_2 - |V|^2 = 0$$

$$\begin{aligned} E_\pm &= \frac{E_1 + E_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(E_1 + E_2)^2}{4} - E_1 E_2 + |V|^2} \\ &= \frac{E_1 + E_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(E_1 - E_2)^2}{4} + |V|^2} \\ &= \frac{E_1 + E_2}{2} \pm \sqrt{\frac{\delta^2}{4} + |V|^2} \end{aligned}$$

Pour les vecteurs propres il faut résoudre

$$H\psi = E_\pm \psi$$

Considérons d'abord E_+

$$\begin{pmatrix} E_1 & V \\ V^* & E_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = E_+\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$E_1 x + V y = E_+ x$$
$$V^* x + E_2 y = E_+ y$$

C'est un système homogène. On résout la première équation

$$y = \frac{E_+ - E_1}{V} x$$

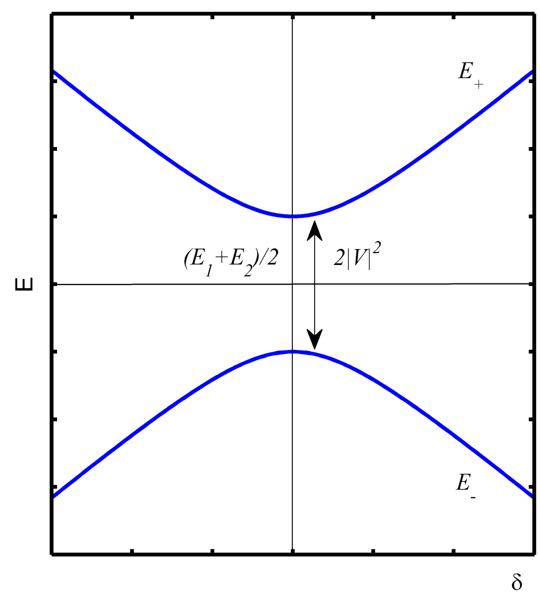
Donc

$$\psi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\delta}{2V} + \sqrt{\frac{\delta^2}{4V^2} + 1} \end{pmatrix}$$

qu'il faut encore normaliser. De même

$$\psi_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\delta}{2V} - \sqrt{\frac{\delta^2}{4V^2} + 1} \end{pmatrix}$$

On peut dessiner E_+ et E_- en fonction de δ



Exercice 2 *Opérateur de Hadamard à plusieurs qu-bits*

Pour la démonstration nous allons procéder par induction. Nous pouvons d'abord prouver que c'est vrai pour $H \otimes H$.

$$\begin{aligned}
H \otimes H &= \frac{1}{2}\left[(|0\rangle + |1\rangle)\langle 0| + (|0\rangle - |1\rangle)\langle 1|\right] \\
&\otimes \left[(|0\rangle + |1\rangle)\langle 0| + (|0\rangle - |1\rangle)\langle 1|\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle)\langle 00|\right. \\
&+ (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)\langle 01| \\
&+ (|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle)\langle 10| \\
&+ \left.(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle)\langle 11|\right]
\end{aligned}$$

C'est exactement l'expression cherchée. En effet, les termes avec signe $-$ sont $|01\rangle\langle 01|$, $|11\rangle\langle 01|$, $|10\rangle\langle 10|$, $|11\rangle\langle 10|$, $|10\rangle\langle 11|$, $|01\rangle\langle 11|$, et pour tous ces termes on a $\sum_{j=1,2} x_j y_j = 1$.

Supposons maintenant que c'est vrai pour $H^{\otimes n-1}$ et démontrons que c'est vrai pour $H^{\otimes n}$

$$\begin{aligned}
H^{\otimes n} &= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x,y=0}^{2^{n-1}-1} (-1)^{\sum_j x_j y_j} |x_1 \dots x_{n-1}\rangle\langle y_1 \dots y_{n-1}| \\
&\otimes \left[(|0\rangle + |1\rangle)\langle 0| + (|0\rangle - |1\rangle)\langle 1|\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x,y=0}^{2^{n-1}-1} (-1)^{\sum_j x_j y_j} \\
&\times \left[|x_1 \dots x_{n-1}0\rangle\langle y_1 \dots y_{n-1}0|\right. \\
&+ |x_1 \dots x_{n-1}1\rangle\langle y_1 \dots y_{n-1}0| \\
&+ |x_1 \dots x_{n-1}0\rangle\langle y_1 \dots y_{n-1}1| \\
&- \left.|x_1 \dots x_{n-1}1\rangle\langle y_1 \dots y_{n-1}1|\right]
\end{aligned}$$

Ce qui correspond à une somme sur $x, y = 0, \dots, 2^n - 1$, et le seul terme avec un signe $-$ est celui où $\sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \sum_{j=1}^{n-1} x_j y_j + 1 \times 1$, pour lequel donc la somme induit le changement de signe. Les autres trois termes sont caractérisés par $\sum_{j=1}^{n} x_j y_j = \sum_{j=1}^{n-1} x_j y_j$. La solution est donc

$$H^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x,y} (-1)^{\sum_j x_j y_j} |x_1 \dots x_n\rangle\langle y_1 \dots y_n|$$