Traitement quantique de l'information I (automne 2009)
Série 9: Oscillations de Rabi

L'énergie d'un spin soumis à un champ magnétique **B** est donnée par

$$E = -\mu \cdot \mathbf{B}$$

où $\mu = (1/2)\gamma\mathbf{S}$ est le moment magnétique exprimé en fonction du spin **S**.

1. Ecrire l'opérateur Hamiltonien en présence d'un champ magnétique de la forme

$$\mathbf{B} = B_0\mathbf{z} + B_1(\mathbf{x}\cos\omega t - \mathbf{y}\sin\omega t)$$

   On définit les fréquences de Larmor $\hbar\omega_0 = \gamma B_0$ et de Rabi $\hbar\omega_1 = \gamma B_1$

2. Considérer l'état arbitraire dépendant du temps

$$|\psi(t)\rangle = \lambda(t)|0\rangle + \mu(t)|1\rangle$$

   où les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ sont les états propres de la composante S_z du spin. Ecrire les équations différentielles qui regissent la dépendance du temps de $\lambda(t)$ et $\mu(t)$. Effectuer après les changements de variables $\lambda(t) = \tilde{\lambda}(t)e^{i\omega_0 t/2}$ et $\mu(t) = \tilde{\mu}(t)e^{-i\omega_0 t/2}$.

3. Montrer qu'on peut réduire le problème à la solution d'une équation différentielle de deuxième ordre pour $\tilde{\lambda}(t)$. Ecrire la solution générale de cette équation.

4. Calculer l'évolution de l'état dans le cas avec conditions initiales $\tilde{\lambda}(0) = 1$ et $\tilde{\mu}(0) = 0$. Etudier la probabilité de trouver le spin dans l'état $|1\rangle$ àl'instant t. Comment varie cette probabilité en fonction de ω?

Corrigé 9 : Oscillations de Rabi

1. Hamiltonien :

$$H = -\frac{\gamma}{2}\cdot\left(B_x S_x + B_y S_y + B_z S_z\right)$$

$$= -\frac{\gamma}{2}\left[B_x\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + B_y\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + B_z\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right]$$

$$H = -\frac{\gamma}{2}\begin{pmatrix}B_z & B_x - iB_y\\ B_x + iB_y & -B_z\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\gamma}{2}\begin{pmatrix}B_0 & B_1(\cos\omega t + i\sin\omega t)\\ B_1(\cos\omega t - i\sin\omega t) & -B_0\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\gamma}{2}\begin{pmatrix}B_0 & B_1 e^{i\omega t}\\ B_1 e^{-i\omega t} & -B_0\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\hbar\omega_0 & \hbar\omega_1 e^{i\omega t}\\ \hbar\omega_1 e^{-i\omega t} & -\hbar\omega_0\end{pmatrix}$$

2. $$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\lambda(t)|0\rangle + i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\mu(t)\,|1\rangle$$

$$= H\,|\psi(t)\rangle$$

$$i\cancel{\hbar}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\lambda(t)\\[2ex] \frac{\partial}{\partial t}\mu(t)\end{pmatrix} = -\frac{\cancel{\hbar}}{2}\begin{pmatrix}\omega_0 & \omega_1 e^{+i\omega t}\\[2ex] \omega_1 e^{-i\omega t} & -\omega_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda(t)\\[2ex] \mu(t)\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} i\frac{\partial}{\partial t}\lambda(t) = -\frac{\omega_0}{2}\lambda(t) - \frac{\omega_1}{2} e^{i\omega t}\mu(t) \\[1ex] i\frac{\partial}{\partial t}\mu(t) = -\frac{\omega_1}{2} e^{-i\omega t}\lambda(t) + \frac{\omega_0}{2}\mu(t) \end{cases}$$

$$\tilde{\lambda}(t) = \lambda(t)\,e^{i\omega_0 t/2} \qquad \tilde{\mu}(t) = \mu(t)\,e^{-i\omega_0 t/2}$$

$$\to\ i\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\lambda}(t)\right)e^{i\omega_0 t/2} - \tilde{\lambda}(t)\frac{\omega_0}{2}e^{i\omega_0 t/2} = -\frac{\omega_0}{2}\tilde{\lambda}(t)e^{i\omega_0 t/2} - \frac{\omega_1}{2}e^{i\omega t}e^{-i\omega_0 t/2}\tilde{\mu}(t)$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\lambda}(t) = -\frac{\omega_1}{2}e^{i\omega t}e^{-i\omega_0 t}\tilde{\mu}(t)$$

et

$$i\left(\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mu}(t)\right)e^{-i\omega_0 t/2} + \tilde{\mu}(t)\frac{\omega_0}{2}e^{-i\omega_0 t/2} = \frac{\omega_0}{2}\tilde{\mu}(t)e^{-i\omega_0 t/2} - \frac{\omega_1}{2}e^{-i\omega t}\tilde{\lambda}(t)e^{i\frac{\omega_0 t}{2}}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\mu}(t) = -\frac{\omega_1}{2}e^{-i\omega t}e^{i\omega_0 t}$$

3.

(1) $$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\lambda}(t) = -\frac{\omega_1}{2} e^{i(\omega-\omega_0)t} \tilde{\mu}(t)$$

(2) $$i \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mu}(t) = -\frac{\omega_1}{2} e^{-i(\omega-\omega_0)t} \tilde{\lambda}(t)$$

$$(1) \Rightarrow \tilde{\mu}(t) = -\frac{2i}{\omega_1} e^{-i(\omega-\omega_0)t} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\lambda}(t)$$

$$(2) \Rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{2i}{\omega_1} e^{-i(\omega-\omega_0)t} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\lambda}(t) \right) = -\frac{\omega_1}{2} e^{-i(\omega-\omega_0)t} \tilde{\lambda}(t)$$

$$\frac{2}{\omega_1}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\lambda}(t)\right) e^{-i(\omega-\omega_0)t} - i(\omega-\omega_0) e^{-i(\omega-\omega_0)t} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\lambda}(t) \right]$$

$$= -\frac{\omega_1}{2} e^{-i(\omega-\omega_0)t} \tilde{\lambda}(t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{\lambda}(t) - i(\omega-\omega_0) \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\lambda}(t) + \frac{\omega_1^2}{4} \tilde{\lambda}(t) = 0.$$

Introduire $\delta = \omega - \omega_0$

équation charactéristique.

$$\Omega_\pm^2 - i\delta \Omega_\pm + \frac{\omega_1^2}{4} = 0$$

$$\Omega_\pm = \frac{1}{2}\left(i\delta \pm \sqrt{-\delta^2 - \omega_1^2} \right)$$

avec $\Omega = \sqrt{\delta^2 + \omega_1^2}$

$$\Omega_\pm = \frac{i}{2}(\delta \pm \Omega)$$

• Solution générale.

$$\tilde{\lambda}(t) = A\, e^{\frac{i}{2}(\delta+\Omega)t} + B\, e^{\frac{i}{2}(\delta-\Omega)t}$$

4.

* $\tilde{\lambda}(0) = 1 \Rightarrow A + B = 1.$ (1)

* $\tilde{\mu}(0) = 0$

$$\tilde{\mu}(t) = -\frac{2i}{\omega_1} e^{-i\delta t} \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\lambda}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\tilde{\lambda}(t) = 0$$

$$\Rightarrow A\,\frac{i}{2}(\delta+\Omega) + B\,\frac{i}{2}(\delta-\Omega) = 0 \qquad (2)$$

$(1) \Rightarrow A = 1 - B$

$(2) \Rightarrow (1-B)(\delta+\Omega) + B(\delta-\Omega) = 0$

$$(\delta+\Omega) - \cancel{B\delta} - B\Omega + \cancel{B\delta} - B\Omega = 0$$

$$B = \frac{\delta+\Omega}{2\Omega}$$

$$A = 1 - \frac{\delta+\Omega}{2\Omega} = \frac{\Omega-\delta}{2\Omega}$$

$$\tilde{\lambda}(t) = \frac{\Omega - \delta}{2\Omega} e^{\frac{i}{2}(\delta + \Omega)t} + \frac{\Omega + \delta}{2\Omega} e^{\frac{i}{2}(\delta - \Omega)t}$$

$$\tilde{\lambda}(t) = \frac{e^{i\frac{\delta}{2}t}}{\Omega} \left[\Omega \cos\left(\frac{\Omega}{2}t\right) - i\delta \sin\left(\frac{\Omega}{2}t\right) \right]$$

$$\tilde{\mu}(t) = \frac{-2i}{\omega_1} e^{-i\delta t} \cdot \left[\frac{\Omega - \delta}{2\Omega} \frac{i}{2}(\delta + \Omega) e^{\frac{i}{2}(\delta + \Omega)t} + \frac{\Omega + \delta}{2\Omega} \cdot \frac{i}{2}(\delta - \Omega) e^{\frac{i}{2}(\delta - \Omega)t} \right]$$

$$= \frac{-2i}{\omega_1} e^{-i\delta t} \left[\frac{i}{2} \frac{\Omega^2 - \delta^2}{2\Omega} e^{\frac{i}{2}(\delta + \Omega)t} + \frac{i}{2} \frac{\delta^2 - \Omega^2}{2\Omega} e^{\frac{i}{2}(\delta - \Omega)t} \right]$$

$$= \frac{-2i}{\omega_1} \frac{i}{2} \frac{\omega_1^2}{2\Omega} \left[e^{\frac{i}{2}(-\delta + \Omega)t} + e^{\frac{i}{2}(-\delta - \Omega)t} \right]$$

$$= \frac{\omega_1}{2\Omega} e^{-\frac{i\delta t}{2}} \, 2i \sin(\Omega t)$$

$$= \frac{i\omega_1}{\Omega} e^{-\frac{i\delta t}{2}} \sin(\Omega t)$$

$$* \quad P(1) = |\mu(t)|^2 = |\tilde{\mu}(t)|^2$$

$$= \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \sin^2 \Omega t$$

$$= \frac{\omega_1^2}{(\omega-\omega_0)^2+\omega_1^2} \sin^2 \Omega t$$