La transformée de Fourier quantique est l'opération au coeur de l'algorithme de Schor. Ici, nous allons construire le circuit quantique qui réalise cette opération, pour un système de 3 qu-bits.

En général, pour un système à n qu-bits, la transformée de Fourier quantique d'un état $|j\rangle = |j_n \dots j_1\rangle$ est définie comme suit

$$|j\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i \frac{jk}{2^n}} |k\rangle$$

Ici nous indiquons $j = j_1 + 2j_2 + 4j_3 + \dots + 2^{n-1} j_n$.

Considérons le cas $n = 3$.

- Ecrire la matrice correspondant à l'opérateur U_{FT} de la transformée de Fourier quantique. Poser $\omega = e^{2\pi i/8}$.

- Montrer qu'on peut écrire l'opération U_{FT} de la manière suivante

$$|j_3 j_2 j_1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}}(|0\rangle + \alpha_3(j)|1\rangle) \otimes (|0\rangle + \alpha_2(j)|1\rangle) \otimes (|0\rangle + \alpha_1(j)|1\rangle)$$

  Trouver les expressions pour les $\alpha_m(j)$.

- Utiliser le résultat précedant pour construir le circuit quantique. Utiliser seulement des opérations H ainsi que des S et T controlées.

Suggestion: Dans l'expression $e^{2\pi i j/2}$ on peut exprimer $j = 4j_3 + 2j_2 + j_1$. on remarque alors que les termes en j_3 et j_2 donnent des multiples de 2π dans l'exposant et on peut le négliger. Par conséquent $e^{2\pi i j/2} = e^{2\pi i j_1/2}$. De même. $e^{2\pi i j/4} = e^{2\pi i (j_2/2 + j_1/4)}$.

Série 11 Transformée de Fourier quantique

$$|j\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i \frac{jk}{2^n}} |k\rangle$$

$$|j\rangle = |j_1 \, j_2 \, j_3 \cdots j_n\rangle$$

$$j = j_1 2^{n-1} + j_2 2^{n-2} + \cdots + j_n$$

$n = 3$

$$\langle k | U_{FT} | j \rangle = \frac{1}{\sqrt{8}} e^{2\pi i \frac{jk}{8}} \qquad \omega = e^{2\pi i/8}$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4 & \omega^5 & \omega^6 & \omega^7 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 \\ 1 & \omega^3 & \omega^6 & \omega & \omega^4 & \omega^7 & \omega^2 & \omega^5 \\ 1 & \omega^4 & 1 & \omega^4 & 1 & \omega^4 & 1 & \omega^4 \\ 1 & \omega^5 & \omega^2 & \omega^7 & \omega^4 & \omega & \omega^6 & \omega^3 \\ 1 & \omega^6 & \omega^4 & \omega^2 & 1 & \omega^6 & \omega^4 & \omega^2 \\ 1 & \omega^7 & \omega^6 & \omega^5 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 & \omega^1 \end{pmatrix}$$

$$|j_1 j_2 j_3\rangle \to \frac{1}{\sqrt{8}}\left(|0\rangle + \alpha_1(j)|1\rangle\right)\left(|0\rangle + \alpha_2(j)|1\rangle\right)\left(|0\rangle + \alpha_3(j)|1\rangle\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}}\ \underset{e^{2\pi i j 4/8}}{\alpha_1(j)}\ \underbrace{|1\rangle|0\rangle|0\rangle}_{|4\rangle}$$

$$\boxed{\alpha_1(j) = e^{i\pi j}} = e^{i\pi(j_1\cdot 4 + j_2\cdot 2 + j_3)} = e^{i\pi j_3}$$

$$+ \frac{1}{8}\ \underset{e^{2\pi i j 2/8}}{\alpha_2(j)}\ \underset{|2\rangle}{|0\,1\,0\rangle}$$

$$\boxed{\alpha_2(j) = e^{i\pi j/2}} = e^{i\pi(j_2 + j_3/2)}$$

$$+ \frac{1}{8}\ \underset{e^{2\pi i j/8}}{\alpha_3(j)}\ \underset{|1\rangle}{|0\,0\,1\rangle}$$

$$\boxed{\alpha_3(j) = e^{i\pi j/4}} = e^{i\pi\left(j_1 + \frac{j_2}{2} + \frac{j_3}{4}\right)}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$$