

1. Le champ électromagnétique peut être décrit par un vecteur complexe $\vec{\mathcal{E}}$, défini par

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_{0x} \cos(\omega t - \delta_x) = \operatorname{Re} (E_{0x} e^{i\delta_x} e^{-i\omega t}) = \operatorname{Re} (\mathcal{E}_x e^{-i\omega t}) \\ E_y(t) &= E_{0y} \cos(\omega t - \delta_y) = \operatorname{Re} (E_{0y} e^{i\delta_y} e^{-i\omega t}) = \operatorname{Re} (\mathcal{E}_y e^{-i\omega t}). \end{aligned}$$

Soient deux nombres, λ réel et μ complexe, paramétrés par

$$\lambda = \cos \theta, \quad \mu = \sin \theta e^{i\eta}.$$

Un polariseur (λ, μ) est constitué de trois éléments.

- Une première lame biréfringente qui déphase \mathcal{E}_y de $-\eta$ en laissant \mathcal{E}_x inchangé:

$$\mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{E}_x^{(1)} = \mathcal{E}_x, \quad \mathcal{E}_y \rightarrow \mathcal{E}_y^{(1)} = \mathcal{E}_y e^{-i\eta}.$$

- Un polariseur linéaire qui projette suivant $\hat{\eta} = (\cos \theta, \sin \theta)$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}^{(1)} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}^{(2)} &= (\mathcal{E}_x^{(1)} \cos \theta + \mathcal{E}_y^{(1)} \sin \theta) \hat{n}_\theta \\ &= (\mathcal{E}_x \cos \theta + \mathcal{E}_y \sin \theta e^{-i\eta}) \hat{n}_\theta \end{aligned}$$

- Une seconde lame biréfringente qui laisse $\mathcal{E}_x^{(2)}$ inchangé et déphase $\mathcal{E}_y^{(2)}$ de η :

$$\mathcal{E}_x \rightarrow \mathcal{E}_x^{(1)} = \mathcal{E}_x, \quad \mathcal{E}_y \rightarrow \mathcal{E}_y^{(1)} = \mathcal{E}_y e^{i\eta}.$$

La combinaison de ces trois opérations est représentée par $\vec{\mathcal{E}} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}'$.
 Calculer les composantes \mathcal{E}'_x et \mathcal{E}'_y en fonction de \mathcal{E}_x et \mathcal{E}_y .

2. Soient les vecteurs (non unitaires) de \mathcal{H} , $|\mathcal{E}\rangle$ et $|\mathcal{E}'\rangle$ tels que

$$|\mathcal{E}\rangle = \mathcal{E}_x|x\rangle + \mathcal{E}_y|y\rangle \quad |\mathcal{E}'\rangle = \mathcal{E}'_x|x\rangle + \mathcal{E}'_y|y\rangle$$

Montrer que le passage $|\mathcal{E}\rangle \rightarrow |\mathcal{E}'\rangle$ est une projection

$$|\mathcal{E}'\rangle = \mathcal{P}_\Phi|\mathcal{E}\rangle$$

où \mathcal{P}_Φ est le projecteur sur le vecteur

$$|\Phi\rangle = \lambda|x\rangle + \mu|y\rangle.$$

3. Montrer qu'un photon de vecteur d'état $|\Phi\rangle$ est transmis par le polariseur (λ, μ) avec une probabilité unité, et qu'un photon de vecteur d'état

$$|\Phi_\perp\rangle = -\mu^*|x\rangle + \lambda^*|y\rangle$$

est arrêté par le polariseur.