1. Les quatre états possibles envoyés par Alice sont les états de la base de Bell.

$$
\begin{aligned}
|\beta_{00}\rangle &= \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \\
|\beta_{01}\rangle &= \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \\
|\beta_{10}\rangle &= \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \\
|\beta_{11}\rangle &= \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

L'opérateur E est un opérateur agissant sur l'espace de Hilbert du qu-bit de Alice. Pour calculer la valeur moyenne il faut construir l'opérateur correspondant sur l'espace total des deux qu-bits. Cet opérateur est $E \otimes I_B$ où I_B est l'identité sur l'espace du deuxième qu-bit. Pour clarté, indiquons spécifiquement quel est le qu-bit de Alice et quel celui de Bob. Pour le premier état de Bell nous avons

$$
\begin{aligned}
\langle\beta_{00}|E \otimes I_B|\beta_{00}\rangle &= \left(\frac{\langle 0_A 0_B| + \langle 1_A 1_B|}{\sqrt{2}}\right) E \otimes I_B \left(\frac{|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle}{\sqrt{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\langle 0_A 0_B|E \otimes I_B|0_A 0_B\rangle + \langle 0_A 0_B|E \otimes I_B|1_A 1_B\rangle\right. \\
&+ \left.\langle 1_A 1_B|E \otimes I_B|0_A 0_B\rangle + \langle 1_A 1_B|E \otimes I_B|1_A 1_B\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\langle 0_A|E|0_A\rangle\langle 0_B|I_B|0_B\rangle + \langle 0_A|E|1_A\rangle\langle 0_B|I_B|1_B\rangle\right. \\
&+ \left.\langle 1_A|E|0_A\rangle\langle 1_B|I_B|0_B\rangle + \langle 1_A|E|1_A\rangle\langle 1_B|I_B|1_B\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\langle 0_A|E|0_A\rangle + \langle 1_A|E|1_A\rangle\right)
\end{aligned}
$$

où nous avons utilisé l'orthogonalité des états $\{|0_B\rangle, |1_B\rangle\}$. La valeur moyenne de E est donnée par la moyenne arithmétique des espérances (valeur moyenne au sens de la physique quantique) de E sur les états

$|0_A\rangle$ et $|1_A\rangle$. Nous avons vu que ce résultat indique que le système, par rapport au premier qu-bit, se comporte comme un mélange statistique des deux états.

Si on calcule la moyenne de E sur les trois autres états de Bell, en suivant la même méthode, on obtient le même résultat que pour le premier état. Cela suggère que, indépendamment de l'état de Bell, le système se comporte toujours comme le même mélange statistique par rapport au premier qu-bit.

2. On a pour le premier état de Bell

$$\begin{aligned}
|\beta_{00}\rangle &= \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta|e_1\rangle - \sin\theta|e_2\rangle) \otimes (\cos\theta|e_1\rangle - \sin\theta|e_2\rangle) \\
&+ (\sin\theta|e_1\rangle + \cos\theta|e_2\rangle) \otimes (\sin\theta|e_1\rangle + \cos\theta|e_2\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\cos^2\theta + \sin^2\theta)(|e_1e_1\rangle + |e_2e_2\rangle)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1e_1\rangle + |e_2e_2\rangle)
\end{aligned}$$

Pour le deuxième état de Bell

$$\begin{aligned}
|\beta_{01}\rangle &= \frac{|01\rangle + |10\rangle}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta|e_1\rangle - \sin\theta|e_2\rangle) \otimes (\sin\theta|e_1\rangle + \cos\theta|e_2\rangle) \\
&+ (\sin\theta|e_1\rangle + \cos\theta|e_2\rangle) \otimes (\cos\theta|e_1\rangle - \sin\theta|e_2\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(|e_1e_2\rangle + |e_2e_1\rangle) + 2\cos\theta\sin\theta(|e_1e_1\rangle - |e_2e_2\rangle)\right]
\end{aligned}$$

Pour le troisième état de Bell

$$\begin{aligned}
|\beta_{10}\rangle &= \frac{|00\rangle - |11\rangle}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta|e_1\rangle - \sin\theta|e_2\rangle) \otimes (\cos\theta|e_1\rangle - \sin\theta|e_2\rangle) \\
&- (\sin\theta|e_1\rangle + \cos\theta|e_2\rangle) \otimes (\sin\theta|e_1\rangle + \cos\theta|e_2\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(|e_1e_1\rangle - |e_2e_2\rangle) + 2\cos\theta\sin\theta(|e_1e_2\rangle + |e_2e_1\rangle)\right]
\end{aligned}$$

Pour le quatrième état de Bell

$$
\begin{aligned}
|\beta_{11}\rangle &= \frac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\theta|e_1\rangle - \sin\theta|e_2\rangle\right) \otimes \left(\sin\theta|e_1\rangle + \cos\theta|e_2\rangle\right) \\
&- \left(\sin\theta|e_1\rangle + \cos\theta|e_2\rangle\right) \otimes \left(\cos\theta|e_1\rangle - \sin\theta|e_2\rangle\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\cos^2\theta + \sin^2\theta)(|e_1e_2\rangle - |e_2e_1\rangle)\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e_1e_2\rangle - |e_2e_1\rangle\right)
\end{aligned}
$$

La probabilité de Eve de mesurer e_1 sur le premier qu-bit se calcule comme la somme de probabilités de mesurer e_1 sur le premier qu-bit et une autre parmi les valeurs possibles e_1 et e_2 sur le deuxième qu-bit. Donc

$$p_A(e_1) = |\langle e_1e_1|\beta_{xy}\rangle|^2 + |\langle e_1e_2|\beta_{xy}\rangle|^2$$

Cette quantité se calcule facilement avec les états de Bell exprimés dans la nouvelle base. Sur le premier état de Bell nous avons

$$
\begin{aligned}
p_A(e_1) &= |\langle e_1e_1|\beta_{00}\rangle|^2 + |\langle e_1e_2|\beta_{00}\rangle|^2 \\
&= |\langle e_1e_1|\beta_{00}\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Donc il y a 50% de mesurer e_1 et évidemment 50% de mesurer e_2. En utilisant les expressions des quatre états dans la nouvelle base, nous pouvons faire le même calcul pour les autres états de Bell. Le résultat est toujours le même, c'est-à-dire 50% de probabilité de mesurer e_1 ou e_2 sur le qu-bit envoyé par Alice. Il est donc strictement impossible pour Eve de comprendre, en effectuant une mesure d'une quantité arbitraire E sur le qu-bit envoyé par Alice, leques parmi les quatre états de Bell a été envoyé. Cela, par la propriété de l'intrication qui fait que on ne peut rien dire sur un état intriqué si on ne fait des mesures que sur un sous-système. Le protocole du dense coding est donc résistant aux attaques de Eve.