Traitement quantique de l'information I (automne 2009)

Série 14: Réalisation d'une porte logique C-NOT

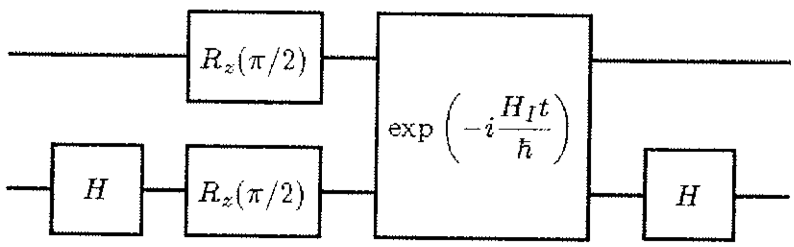
Un système de deux qu-bits est réalisé avec le spin de deux particules. Les deux spins sont soumis à une interaction réciproque (interaction dipole-dipole) dont l'Hamiltonien corresondant est

$$H_I = \hbar J \sigma_{z1} \otimes \sigma_{z2}$$

Nous savons déjà comment réaliser une manipulation arbitraire d'un spin, à l'aide des oscillations de Rabi. Supposons d'avoir un controle sur l'Hamiltonien H_I. En particulier, l'évolution temporelle induite par H_I est donnée par

$$U_I(0,t) = \exp\left(-i\frac{H_I t}{\hbar}\right)$$

Montrer que une porte logique C-NOT correspond au circuit représenté dans la figure, si on suppose d'appliquer l'évolution temporelle correspondant à l'Hamiltonien H_I pendant un temps $t = \pi/4J$. Ici H est une porte de Hadamard et $R_z(\theta) = \exp(-i\theta\sigma_z/2)$ est l'opérateur qui effectue une rotation d'un angle θ autour de l'axe **z**.



Cet exercice nous montre comment une porte logique C-NOT nécessite d'un processus physique d'interaction controlée entre deux qu-bits. La réalisation d'un tel processus constitue aujourd'hui un des plus grands défis technologiques pour l'information quantique.

<u>Evolution from Spin-Spin</u>

<u>Série 14</u>

$$H = J\, Z_1 \otimes Z_2 \qquad Z = \sigma_z$$

$$= J \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= J \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U(t,0) = \exp(-i\, J t\, Z_1 \otimes Z_2)$$

$$U\left(\frac{\pi}{4J}\right) = \exp\left(-i \frac{\pi}{4} Z_1 \otimes Z_2\right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{2}} & & & \\ & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & & \\ & & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & \\ & & & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{diag}$$

<u>Rotation</u>

$$R_z(\theta) = \exp\left(-\frac{i}{2}\theta Z\right)$$

$$R_z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \exp\left(-i\frac{\pi}{4} Z\right) = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$R_z^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = R_{z,1}\left(\frac{\pi}{2}\right) \otimes \mathbb{1}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$R_Z^{(1)} \otimes R_Z^{(2)} = \begin{pmatrix} \cancel{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}\, e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & \cancel{\frac{1-i}{\sqrt{2}}}\, e^{-i\pi/4} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cancel{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}\, e^{i\pi/4} & 0 \\ 0 & \cancel{\frac{1-i}{\sqrt{2}}}\, e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{i\pi/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\pi/2} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{diag}(i, 1, 1, -i)$$

$$X_{12} = U\left(\frac{\pi}{4}\right) R_Z^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_Z^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \mathrm{diag}\left(\frac{i+1}{\sqrt{2}}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \frac{-i-1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{i+1}{\sqrt{2}} \mathrm{diag}(1, 1, 1, -1)$$

$$\equiv \frac{i+1}{\sqrt{2}} \, CZ$$

$$(I_1 \otimes H_2)\, CZ\, (I_1 \otimes H_2) = ?$$

$$I_1 \otimes H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$CNOT \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H & 0 \\ 0 & ZH \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} H^2 & 0 \\ 0 & HZH \end{pmatrix}$$

$$H^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = I$$

$$HZH = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$CNOT \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

CNOT

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow |00\rangle$$

$$|01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow |01\rangle$$

$$|10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$