Traitement quantique de l'information I (automne 2009)
Série 5: Le polariseur (λ, μ)

1. Le champ électromagnétique peut être décrit par un vecteur complexe $\vec{\mathcal{E}}$, défini par

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_{0x} cos(\omega t - \delta_x) = \mathrm{Re}\left(E_{0x} e^{i\delta_x} e^{-i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathcal{E}_x e^{-i\omega t}\right) \\ E_y(t) &= E_{0y} cos(\omega t - \delta_y) = \mathrm{Re}\left(E_{0y} e^{i\delta_y} e^{-i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathcal{E}_y e^{-i\omega t}\right). \end{aligned}$$

Soient deux nombres, λ réel et μ complexe, paramétrés par

$$\lambda = \cos\theta, \qquad \mu = \sin\theta e^{i\eta}.$$

Un polariseur (λ, μ) est constritué de trois éléments.

- Une première lame biréfringente qui déphase $\mathcal{E}_y$ de $-\eta$ en laissant $\mathcal{E}_x$ inchangé:

$$\mathcal{E}_x \to \mathcal{E}_x^{(1)} = \mathcal{E}_x, \qquad \mathcal{E}_y \to \mathcal{E}_y^{(1)} = \mathcal{E}_y e^{-i\eta}.$$

- Un polariseur linéaire qui projette suivant $\hat{\eta} = (cos\theta, \sin\theta)$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}^{(1)} \to \vec{\mathcal{E}}^{(2)} &= \left(\mathcal{E}_x^{(1)} \cos\theta + \mathcal{E}_y^{(1)} \sin\theta\right) \hat{n}_\theta \\ &= \left(\mathcal{E}_x \cos\theta + \mathcal{E}_y \sin\theta e^{-i\eta}\right) \hat{n}_\theta \end{aligned}$$

- Une seconde lame biréfringente qui laisse $\mathcal{E}_x^{(2)}$ inchangé et déphase $\mathcal{E}_y^{(2)}$ de η:

$$\mathcal{E}_x^{(2)} \to \mathcal{E}_x'^{\cancel{(3)}} = \mathcal{E}_x^{(2)}, \qquad \mathcal{E}_y^{(2)} \to \mathcal{E}_y'^{\cancel{(3)}} = \mathcal{E}_y^{(2)} e^{i\eta}.$$

La combinaison de ces trois opérations est représentée par $\vec{\mathcal{E}} \to \vec{\mathcal{E}}'$. Calculer les composantes $\mathcal{E}_x'$ et $\mathcal{E}_y'$ en fonction de $\mathcal{E}_x$ et $\mathcal{E}_y$.

2. Soient les vecteurs (non unitaires) de $\mathcal{H}$, $|\mathcal{E}\rangle$ et $|\mathcal{E}'\rangle$ tels que

$$|\mathcal{E}\rangle = \mathcal{E}_x|x\rangle + \mathcal{E}_y|y\rangle \qquad |\mathcal{E}'\rangle = \mathcal{E}'_x|x\rangle + \mathcal{E}'_y|y\rangle$$

Montrer que le passage $|\mathcal{E}\rangle \to |\mathcal{E}'\rangle$ est une projection

$$|\mathcal{E}'\rangle = \mathcal{P}_\Phi|\mathcal{E}\rangle$$

où $\mathcal{P}_\Phi$ est le projecteur sur le vecteur

$$|\Phi\rangle = \lambda|x\rangle + \mu|y\rangle.$$

3. Montrer qu'un photon de vecteur d'état $|\Phi\rangle$ est transmis par le polariseur (λ, μ) avec une probabilité unité, et qu'un photon de vecteur d'état

$$|\Phi_\perp\rangle = -\mu^*|x\rangle + \lambda^*|y\rangle$$

est arrêté par le polariseur.

$\mathcal{E}_x$

Serie 5

$$\mathcal{E}_x^{(1)} = \mathcal{E}_x \qquad \mathcal{E}_y^{(1)} = \mathcal{E}_y \, e^{-i\eta}$$

$$\vec{\mathcal{E}}^{\,(1)} = (\mathcal{E}_x \cos\theta + \mathcal{E}_y \sin\theta \, e^{-i\eta})\hat{n}_\theta$$

$$\mathcal{E}_x^{(2)} = \mathcal{E}_x \cos^2\theta + \mathcal{E}_y \sin\theta\cos\theta \, e^{-i\eta}$$

$$\mathcal{E}_y^{(2)} = \mathcal{E}_x \cos\theta \sin\theta + \mathcal{E}_y \sin^2\theta \, e^{-i\eta}$$

$$\mathcal{E}_x' = \mathcal{E}_x \cos^2\theta + \mathcal{E}_y \sin\theta\cos\theta \, e^{-i\eta}$$

$$\mathcal{E}_y' = \mathcal{E}_x \cos\theta \sin\theta \, e^{i\eta} + \mathcal{E}_y \sin^2\theta$$

$$P_\phi = (\lambda|x\rangle + \mu|y\rangle)(\lambda^*\langle x| + \mu^*\langle y|)$$

$$P_\phi|\mathcal{E}\rangle = (\lambda|x\rangle + \mu|y\rangle)(\lambda^*\mathcal{E}_x + \mu^*\mathcal{E}_y)$$

$$= (|\lambda|^2 \mathcal{E}_x + \lambda\mu^*\mathcal{E}_y)|x\rangle + (\mathcal{E}_x\mu\lambda^* + |\mu|^2\mathcal{E}_y)|y\rangle$$

$$\begin{cases} \lambda = \cos\theta \\ \mu = \sin\theta \, e^{i\eta} \end{cases}$$

$$P_\phi|\mathcal{E}\rangle = (\cos^2\theta \, \mathcal{E}_x + \cos\theta\sin\theta e^{-i\eta}\mathcal{E}_y)|x\rangle$$

$$(\cos\theta\sin\theta \, e^{i\eta}\mathcal{E}_x + \sin^2\theta \, \mathcal{E}_y)|y\rangle$$

probability of transmission = norm of

$P_\phi | \psi \rangle$

$P_\phi | \Phi \rangle = | \phi \rangle \Rightarrow$ probability one

$P_\Phi | \Phi_\perp \rangle = 0 \Rightarrow$ probability zero.