

Considérons le circuit quantique décrit dans la Figure 1. Ici, la porte quantique "oracle" nous dit si la valeur d'un registre à 2 qu-bits x est égale ou non à une valeur donnée x_0 . Plus précisément elle prend en entrée le registre $|x_1x_2\rangle$, avec $x = x_1 + 2x_2$ et donne à la sortie $|x_1x_2y\rangle$, où $y = 1$ si $x = x_0$ et $y = 0$ autrement. Pour $x_0 = 0, 1, 2, 3$ les circuits correspondant à l'oracle sont indiqués en Figure 2.

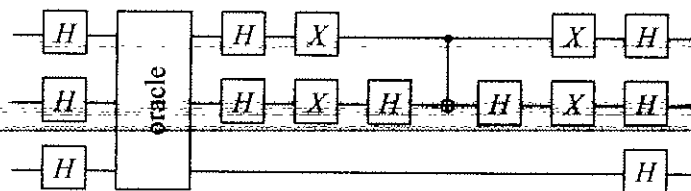


Figure 1: Circuit quantique de Grover à 2 qu-bits

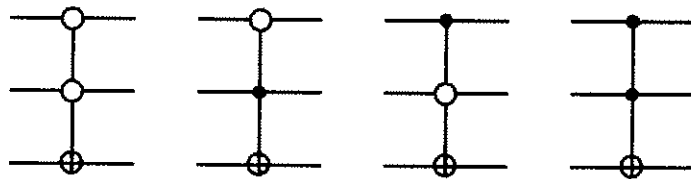


Figure 2: Possibles circuits oracle

Supposons de ne pas savoir lequel parmi les quatre valeurs de x_0 on a choisi pour l'oracle. Appliquons en entrée du circuit $|001\rangle$ (premiers deux qu-bits en haut à zéro, qu-bit en bas à 1). Quel est l'état à la sortie? En combien d'applications de l'oracle on arrive à établir la valeur de x_0 ? Combien il en faudrait (en moyenne) si l'oracle était un circuit classique?

Ceci est un exemple élémentaire d'algorithme de recherche de Grover. Cette classe d'algorithmes est très importante puisque – en plus de permettre une recherche dans une base de données non structurée avec complexité \sqrt{N} – elle permet en général d'accélérer la solution de tous les problèmes NP-complets (avec une complexité qui est la racine carrée de la complexité classique correspondant).

100 Oracle

$$\psi_1 = \left(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\rightarrow -|00\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) + \left(|01\rangle + |10\rangle + |11\rangle \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\psi_2 = \left(\frac{|00\rangle}{2} + \frac{|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle}{2} \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\psi_3 = \left(\frac{-|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle}{2} \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\psi_3 = \frac{1}{2} \left(|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{2} \left(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle \right) \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\psi_1 = |00\rangle |1\rangle$$

$$\begin{aligned}
 00 & - [(00) + 101 + 110 + 111] \\
 & + [100 - 101 + 110 - 111] \\
 & + [100 + 101 - 110 - 111] \\
 & + [100 - 101 - 110 + 111]
 \end{aligned}$$

$$[-2101 - 2110]$$

$$+2100 - 2111$$

$$2 [100 - 101 - 110 - 111]$$

~~Q1~~ 01 orack

$$|\psi_2\rangle = \left(\frac{-2|01\rangle}{2} + \frac{|00\rangle + |11\rangle}{2} \right) ()$$

$$|\psi_3\rangle = \left(-\frac{(|0\rangle+|1\rangle)(|0\rangle-|1\rangle)}{2} + |00\rangle \right)$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2} \left(|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle \right) ()$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{2} \left(-|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle \right) ()$$

$$= \frac{1}{2} \left(-(|0\rangle+|1\rangle) |0\rangle + (|0\rangle+|1\rangle) |1\rangle \right)$$

$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-|0\rangle|0\rangle + |0\rangle|1\rangle \right)$$

$$|\psi_6\rangle = - |011\rangle$$

10 Oracle

$$|\psi_2\rangle = \left(-\frac{2|10\rangle}{2} + \frac{100\rangle}{2} \right)$$

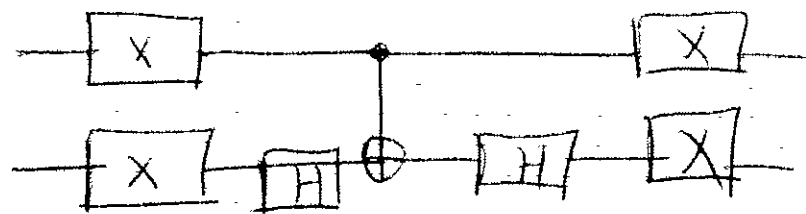
$$|\psi_3\rangle = \left(-\frac{(|0\rangle|1\rangle)(|0\rangle|1\rangle)}{2} + 100\rangle \right)$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2} \left(100\rangle + |10\rangle - |01\rangle + |11\rangle \right) \left(- \right)$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{2} \left(-100\rangle + |10\rangle - |01\rangle + |11\rangle \right)$$
$$= \frac{1}{2} \left((|0\rangle + |1\rangle)|0\rangle - (|0\rangle - |1\rangle)|1\rangle \right) \left(- \right)$$

$$\psi_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-|0\rangle - |1\rangle|1\rangle \right) \left(- \right)$$

$$\psi_5 = -1 \left(|1\rangle|0\rangle|1\rangle \right)$$



Conditional
phase shift

$$|00\rangle \rightarrow |11\rangle \rightarrow |1\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \rightarrow -|1\rangle \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\rightarrow -|1\rangle|1\rangle \rightarrow -|00\rangle$$

$$|01\rangle \rightarrow |10\rangle \rightarrow |1\rangle \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \rightarrow |1\rangle \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

$$\rightarrow |10\rangle \rightarrow |01\rangle$$

$$|10\rangle \rightarrow |10\rangle$$

$$|11\rangle \rightarrow |11\rangle$$