La transformée de Fourier quantique est l'opération au coeur de l'algorithme de Schor. Ici, nous allons construire le circuit quantique qui réalise cette opération, pour un système de 3 qu-bits.

En général, pour un système à n qu-bits, la transformée de Fourier quantique d'un état $|j\rangle = |j_n \dots j_1\rangle$ est définie comme suit

$$|j\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{k=0}^{2^n-1} e^{2\pi i \frac{jk}{2^n}} |k\rangle$$

Ici nous indiquons $j = j_1 + 2j_2 + 4j_3 + \dots + 2^{n-1} j_n$.

Considérons le cas $n = 3$.

- Ecrire la matrice correspondant à l'opérateur U_{FT} de la transformée de Fourier quantique. Poser $\omega = e^{2\pi i/8}$.

- Montrer qu'on peut écrire l'opération U_{FT} de la manière suivante

$$|j_3 j_2 j_1\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{8}} (|0\rangle + \alpha_3(j)|1\rangle) \otimes (|0\rangle + \alpha_2(j)|1\rangle) \otimes (|0\rangle + \alpha_1(j)|1\rangle)$$

  Trouver les expressions pour les $\alpha_m(j)$.

- Utiliser le résultat précedant pour construir le circuit quantique. Utiliser seulement des opérations H ainsi que des S et T controlées.

  Suggestion: Dans l'expression $e^{2\pi i j/2}$ on peut exprimer $j = 4j_3 + 2j_2 + j_1$. on remarque alors que les termes en j_3 et j_2 donnent des multiples de 2π dans l'exposant et on peut le négliger. Par conséquent $e^{2\pi i j/2} = e^{2\pi i j_1/2}$. De même, $e^{2\pi i j/4} = e^{2\pi i (j_2/2 + j_1/4)}$.