Exercice 1

Trouver les valeurs et les vecteurs propres de la matrice hermitique

$$H = \begin{pmatrix} E_1 & V \\ V^* & E_2 \end{pmatrix}$$

avec $E_1, E_2 \in \mathbb{R}$ et $|V| > 0$. Esquisser le comportement des valeurs propres en fonction de $\delta = E_1 - E_2$. Est-il possible que les deux valeurs propres λ_1, λ_2 soient dégénérés? (c'.-à-d. $\lambda_1 = \lambda_2$).

***

Exercice 2

L' opérateur de Hadamard est un élément fondamental dans plusieurs algorithmes de calcul quantique, où il entre dans la réalisation de parallelisme quantique. L'opérateur de Hadamard sur un qu-bit est un opérateur agissant sur un espace V de dim 2 avec base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Son expression explicite est

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\ (|0\rangle + |1\rangle)\langle 0| + (|0\rangle - |1\rangle)\langle 1|\ \right]$$

Nous souhaitons calculer

$$H^{\otimes n} = H \otimes H \otimes \cdots \otimes H \qquad (n \text{ fois})$$

qui agit sur l'espace $V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$.

Montrer que

$$H^{\otimes n} = \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{x,y} (-1)^{\sum_j x_j y_j} |x_1, x_2, \ldots x_n\rangle\langle y_1, y_2, \ldots y_n|$$

et $y_j, x_j = 0, 1;\ \ j = 1, \ldots, n$.