Exercice 1 Rotations en $\mathbb{R}^2$

Il suffit de calculer le produit entre les deux matrices

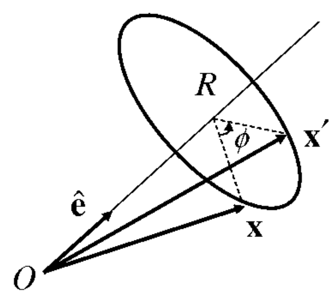
$$\begin{aligned} R(\phi)R(\theta) &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta & \cos\phi\sin\theta + \sin\phi\cos\theta \\ -\cos\phi\sin\theta - \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et, par le biais des formules de somme de sinus et cosinus, on obtient.

$$R(\phi)R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\phi+\theta) & \sin(\phi+\theta) \\ -\sin(\phi+\theta) & \cos(\phi+\theta) \end{pmatrix}$$

qui est le résultat cherché.

Exercice 2 *Rotations en* $\mathbb{R}^3$



1. Nous avons la somme de trois matrices

$$R_{ij}(\mathbf{e},\phi) = R^{(1)}_{ij}(\mathbf{e},\phi) + R^{(2)}_{ij}(\mathbf{e},\phi) + R^{(3)}_{ij}(\mathbf{e},\phi)$$

où le premìer terme est donné simplement par

$$R_{ij}^{(1)}(\mathbf{e},\phi) \quad = \quad \cos\phi \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour le deuxième terme les composants de $\mathbf{x}'$ sont donnés par

$$\begin{aligned} x_1' &= (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)e_1(1-\cos\phi) \\ x_2' &= (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)e_2(1-\cos\phi) \\ x_3' &= (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)e_3(1-\cos\phi) \end{aligned}$$

d'où

$$R_{ij}^{(2)}(\mathbf{e},\phi) \quad = \quad (1-\cos\phi) \begin{pmatrix} e_1e_1 & e_1e_2 & e_1e_3 \\ e_2e_1 & e_2e_2 & e_2e_3 \\ e_3e_1 & e_3e_2 & e_3e_3 \end{pmatrix}$$

Pour le troisième terme nous avons

$$\begin{aligned} x_1' &= \sin\phi(e_2x_3 - e_3x_2) \\ x_2' &= \sin\phi(e_3x_1 - e_1x_3) \\ x_3' &= \sin\phi(e_1x_2 - e_2x_1) \end{aligned}$$

d'où

$$R_{ij}^{(3)}(\mathbf{e},\phi) \quad = \quad \sin\phi \begin{pmatrix} 0 & -e_3 & e_2 \\ e_3 & 0 & -e_1 \\ -e_2 & e_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le résultat est donc

$$R_{ij}(\mathbf{e},\phi) = \cos\phi\delta_{ij} + (1-\cos\phi)e_ie_j - \sin\phi\sum_k \epsilon_{ijk}e_k$$

où ϵ_{ijk} est le tenseur de Ritchie qui vaut +1 si i,j,k sont une permutation paire de $1,2,3$, -1 si i,j,k sont une permutation impaire de $1,2,3$, et zéro autrement.

2.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{I}\cdot\mathbf{e} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -ie_1 \\ 0 & ie_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & ie_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -ie_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ie_3 & 0 \\ ie_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -ie_3 & ie_2 \\ ie_3 & 0 & -ie_1 \\ -ie_2 & ie_1 & 0 \end{pmatrix} = -i\sum_k \epsilon_{ijk} e_k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{I}\cdot\mathbf{e})^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -ie_3 & ie_2 \\ ie_3 & 0 & -ie_1 \\ -ie_2 & ie_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -ie_3 & ie_2 \\ ie_3 & 0 & -ie_1 \\ -ie_2 & ie_1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e_2^2+e_3^2 & -e_1e_2 & -e_1e_3 \\ -e_1e_2 & e_1^2+e_3^2 & -e_3e_2 \\ -e_1e_3 & -e_3e_2 & e_1^2+e_2^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

et puisque $1 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2$, nous avons

$$((\mathbf{I}\cdot\mathbf{e})^2)_{ij} = \mathbb{I} - e_i e_j$$

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{I}\cdot\mathbf{e})^3 &= (\mathbf{I}\cdot\mathbf{e})^2(\mathbf{I}\cdot\mathbf{e}) \\
&= \mathbf{I}\cdot\mathbf{e} + i\sum_l e_i e_l \sum_k \epsilon_{ljk} e_k \\
&= \mathbf{I}\cdot\mathbf{e} + i\sum_{kl} e_i \epsilon_{ljk} e_l e_k
\end{aligned}
$$

Nous pouvons effectuer une permutation paire des indices de ϵ_{ijk} sans perte de généralité, grâce à la définition du tenseur de Ritchie. Donc

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{I}\cdot\mathbf{e})^3 &= \mathbf{I}\cdot\mathbf{e} + i\sum_{kl} e_i \epsilon_{jkl} e_k e_l \\
&= \mathbf{I}\cdot\mathbf{e} + i e_i \mathbf{e}\times\mathbf{e} \\
&= \mathbf{I}\cdot\mathbf{e}
\end{aligned}
$$

puisque le produit vectoriel d'un vecteur avec lui même est zéro.

3. D'après les résultats 1. et 2.

$$\begin{aligned}
R(\mathbf{e},\phi)) &= e^{-i\phi\mathbf{I}\cdot\mathbf{e}} \\
&= \mathbb{I} - i\phi\mathbf{I}\cdot\mathbf{e} - \frac{\phi^2}{2}(\mathbf{I}\cdot\mathbf{e})^2 \\
&+ i\frac{\phi^3}{3!}\mathbf{I}\cdot\mathbf{e} + \frac{\phi^4}{4!}(\mathbf{I}\cdot\mathbf{e})^2 + \ldots \\
&= (\mathbf{I}\cdot\mathbf{e})^2\left(1 - \frac{\phi^2}{2} + \frac{\phi^4}{4!} + \ldots\right) \\
&+ (\mathbf{I}\cdot\mathbf{e})\left(\phi - \frac{\phi^3}{3!} + \ldots\right) \\
&+ \mathbb{I} - (\mathbf{I}\cdot\mathbf{e})^2 \\
&= \cos\phi(\delta_{ij} - e_ie_j) - \sin\phi\sum_k \epsilon_{ijk}e_k + e_ie_j
\end{aligned}$$

qui est le résultat obtenu en 1.

Exercice 3 *Commutation d'opérateurs dans un exponentiel*

(a) Les fonctions dérivées ont les mêmes propriétés de base que si elles étaient à valeur dans $\mathbb{R}$, mais il faut faire attention à la commutation des opérateurs :

$$\begin{aligned}
(\hat{U}(x)\hat{V}(x))' &= \hat{U}'(x)\hat{V}(x) + \hat{U}(x)\hat{V}'(x) \\
(\hat{U}(x) + \hat{V}(x))' &= \hat{U}'(x) + \hat{V}'(x) \\
(\hat{U}.x)' &= \hat{U} \qquad \text{(si } U \text{ est indépendant de } x\text{)}
\end{aligned}$$

Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
\left(e^{\hat{V}x}\right)' &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\hat{A}^n x^n}{n!}\right)' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\hat{V}^n n x^{n-1}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\hat{V}^n x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \hat{V}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\hat{V}^l x^l}{l!} \\
&= \hat{V}e^{\hat{V}x}
\end{aligned}$$

Remarque : Cette relation n'est valable que parce que V ne dépend pas de x. Dans le cas général : $(\exp(\hat{A}(x)))' \neq \hat{A}'(x)exp(\hat{A}(x))$ si $[\hat{A}(x), \hat{A}'(x)] \neq 0$.

Nous avons pour $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= Ae^{Ax}e^{Bx} + e^{Ax}Be^{Bx} \\
&= Ae^{Ax}e^{Bx} + (Be^{Ax} + [e^{Ax}, B])e^{Bx} \\
&= (A + B + x[A, B])e^{Ax}e^{Bx}
\end{aligned}$$

Où nous avons utilisé $[e^{Ax}, B] = [Ax, B]e^{Ax} = e^{Ax}[Ax, B]$, vrai si $[[A, B], A] = 0$ et $[[A, B], B] = 0$. De plus, comme x est une variable réelle on peut la sortir du commutateur librement.

(b) On calcule la dérivée de $g(x)$:

$$g'(x) = (A + B)e^{(A+B)x}e^{\frac{1}{2}x^2[A,B]} + xe^{(A+B)x}[A, B]e^{\frac{1}{2}x^2[A,B]}$$

Comme on a supposé $[A, [A, B]] = 0 = [B, [A, B]]$, on a de même que $e^{(A+B)}x$ et $[A, B]$ commutent, et donc on obtient :

$$\begin{aligned}
g'(x) &= (A + B)g(x) + x[A, B]e^{(A+B)x}e^{\frac{1}{2}x^2[A,B]} \\
&= (A + B)g(x) + x[A, B]g(x)
\end{aligned}$$

(c) Nous avons $f(0) = g(0) = Id$. Comme une équation différentielle du premier ordre a au plus une solution (à une constante multiplicative près), alors $f(x) = g(x) \forall x$. En particulier pour $x = 1$:

$$f(1) = e^A e^B = g(1) = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} \tag{1}$$

Ou encore (en multipliant par $e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$) :

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \tag{2}$$

(d) Il suffit d'écrire la formule précédente en effectuant la substitution $A \to B$ et $B \to A$:

$$\begin{aligned} e^A e^B &= e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} \\ e^B e^A &= e^{B+A} e^{\frac{1}{2}[B,A]} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$e^A e^B = e^B e^A e^{-\frac{1}{2}[B,A]} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$$

En utilisant la relation que l'on a démontrée (équation (10)) :

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]} \tag{3}$$