Exercice 1 *Rotations en* $\mathbb{R}^2$

En $\mathbb{R}^2$, l'opérateur qui correspond à une rotation d'un angle θ (en sens horaire), exprimé sur la base cartesienne, est

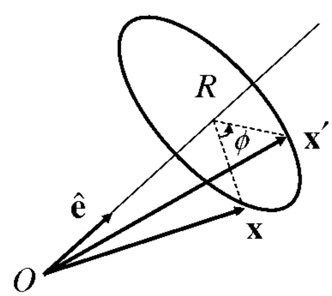
$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Montrer que deux rotations successives sont décrites par l'opérateur

$$R(\phi)R(\theta) = R(\theta + \phi)$$

***

Exercice 2 *Rotations en* $\mathbb{R}^3$



Soit $\mathbf{x}$ un vecteur en $\mathbb{R}^3$. Une rotation d'un angle ϕ autour d'un axe $\mathbf{e}$ ($\mathbf{e}$ étant un vecteur unitaire) produit un nouveau vecteur

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}\cos\phi + (\mathbf{x}\cdot\mathbf{e})\mathbf{e}(1-\cos\phi) + \mathbf{e}\times\mathbf{x}\sin\phi$$

1. Trouver la matrice $R_{ij}(\mathbf{e}, \phi)$ qui correspond à cette opération dans la base cartesienne.

2. considérer les trois matrices hermitiques

$$\begin{aligned} I_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \\ I_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ I_3 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Montrer que

$$\begin{aligned} (\mathbf{I}\cdot\mathbf{e})_{ij} &= -i\sum_k \epsilon_{ijk} e_k \\ (\mathbf{I}\cdot\mathbf{e})^2_{ij} &= \delta_{ij} - e_i e_j \\ (\mathbf{I}\cdot\mathbf{e})^3 &= \mathbf{I}\cdot\mathbf{e} \end{aligned}$$

où $\mathbf{I} = (I_1, I_2, I_3)$ et ϵ_{ijk} est le tenseur de Ritchie qui vaut 1 si i, j, k sont une permutation paire de $1, 2, 3$, -1 s'ils sont une permutation impaire, et zéro autrement.

3. Montrer que

$$R(\mathbf{e}, \phi) = e^{-i\phi\mathbf{I}\cdot\mathbf{e}} \tag{1}$$

***

Exercice 3 *Commutation d'opérateurs dans un exponentiel*

On définit le *commutateur* de deux opérateurs A et B, l'opérateur $[A, B] = AB - BA$. On dit que A et B *commutent*, si $[A, B] = 0$. On considère deux opérateurs A et B qui commutent avec $[A, B]$:

$$[[\hat{A}, \hat{B}], \hat{B}] = [[\hat{A}, \hat{B}], \hat{A}]] = 0 \tag{2}$$

On définit la fonction des opérateurs A et B suivante (x réel) : $f(x) = e^{Ax}e^{Bx}$

A l'aide de cette fonction nous allons démontrer des propriétés remarquables pour les opérateurs e^A et e^B. Montrer que :

$$\frac{df(x)}{dx} = (A + B + x[A, B])f(x) \tag{3}$$

Vérifier que $g(x) = e^{(A+B)x}e^{\frac{x^2}{2}[A,B]}$ est solution de l'equation (3). Comparer $f(0)$ et $g(0)$. En déduire la relation suivante:

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]} \tag{4}$$

En déduire finalement que :

$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]} \tag{5}$$