Traitement quantique de l'information I (automne 2009)
Corrigé 8

1. Pour les états à un photon, nous avons

$$\begin{aligned} |x\rangle &= \cos\theta|\theta\rangle - \sin\theta|\theta_\perp\rangle \\ |y\rangle &= \sin\theta|\theta\rangle + \cos\theta|\theta_\perp\rangle \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\cos\theta|\theta\rangle - \sin\theta|\theta_\perp\rangle) \otimes (\sin\theta|\theta\rangle + \cos\theta|\theta_\perp\rangle)\right. \\ &- \left.(\sin\theta|\theta\rangle + \cos\theta|\theta_\perp\rangle) \otimes (\cos\theta|\theta\rangle - \sin\theta|\theta_\perp\rangle)\right] \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{|\theta\theta_\perp\rangle - |\theta_\perp\theta\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|\theta\theta_\perp\rangle - |\theta_\perp\theta\rangle}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

2. La probabilité que Alice mesure θ est la somme des probabilités qu'elle mesure θ et en même temps Bob mesure chacune des deux valeurs possibles θ et $\theta_\perp$.

$$p_A(\theta) = p(\theta,\theta) + p(\theta,\theta_\perp)$$

Les deux probabilités sont données respectivement par

$$p(\theta,\theta) = |\langle\theta\theta|\psi\rangle|^2$$

$$p(\theta,\theta_\perp) = |\langle\theta\theta_\perp|\psi\rangle|^2$$

D'après l'expression pour $|\psi\rangle$ on voit que le premier terme est nul et que le deuxième vaut 1/2. Le même procédé peut être appliqué au calcul de $p_A(\theta_\perp)$ et des quantités correspondantes pour Bob

$$p_A(\theta_\perp) = 1/2$$

$$p_B(\theta) = 1/2$$

$$p_B(\theta_\perp) = 1/2$$

Donc à la fois pour Alice et pour Bob le résultat de la mesure est totalement indéterminé.

3. Supposons que le résultat de la mesure de Alice est θ. Par le deuxième postulat, le système sera projeté sur le nouvel état $|\psi'\rangle = |\theta\theta_\perp\rangle$. Donc Alice est certaine que Bob obtiendra $\theta_\perp$ comme résultat de la mesure. De même, si Alice mesure $\theta_\perp$, l'état après mesure sera $|\psi'\rangle = |\theta_\perp\theta\rangle$ et elle aura la certitude que Bob mesurera θ. La même analyse s'applique à Bob.

   Même si Alice et Bob se trouvent à des milliers de Km de distance et effectuent la mesure en même temps, chacun peut prévoir avec certitude, d'après le résultat de sa mesure, la résultat de la mesure de l'autre. Et cela se produit même si le résultat de leur propre mesure est caractérisé par l'incertitude maximale.

   C'est un exemple du paradoxe de Einstein-Podolski Rosen (dit paradoxe EPR). En réalité il n'y a aucun paradoxe: c'est le résultat prévu par la mécanique quantique et il a été vérifié des centaines de fois. Il a toutefois mené à reexprimer le principe de relativité de la manière suivante: *rien qui peut transmettre de l'information ne peut voyager plus vite que la lumière dans le vide.* En effet on peut montrer que la capacité instantanée de Alice de prévoir le résultat de la mesure de Bob, ne lui permet pas de transmettre de l'information.