Mécanique Analytique , Partiel 2

Epreuve du 27 mai 2010 ; durée : 110 minutes ; sans document ni calculatrice

Exercice 1 : Transformations canoniques *(6 points)*

Considérer les deux transformations de coordonnées suivantes :

$$\begin{cases} p = tP^k \\ q = \dfrac{1}{k}\dfrac{1}{t}\dfrac{Q}{P^{k-1}} \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} p = tP^k \\ q = \dfrac{1}{t}\dfrac{Q}{P^{k-1}} \end{cases}$$

1. Déterminer, en utilisant deux méthodes différentes, si les transformations ci-dessus sont canoniques ou non.
2. Si l'une des deux transformations (ou les deux) est canonique, trouver la fonction génératrice de type $F_2(q, P, t)$ associée.
3. Trouver le Hamiltonien $H(p, q, t)$ tel que $K(P, Q, t) = 0$. Quelles sont alors les équations du mouvement pour les nouvelles coordonnées ?

Exercice 2 : Hamilton *(9 points)*

Considérer un système décrit par le Hamiltonien suivant :

$$H(p, q) = \frac{1}{2m}\exp\left(-\frac{2q}{L}\right)p^2 + \lambda\exp\left(-\frac{q}{2L}\right)p + \eta\tanh\left(\frac{q}{L}\right) \qquad \text{avec} \qquad m,\ L,\ \eta > 0$$

1. Quelle est la dimension de chacune des constantes de ce Hamiltonien (m, L, λ et η) ? On suppose que p, q et H ont les dimensions habituelles [1].
2. Esquisser le "potentiel", càd : $\eta\tanh(q/L)$.
3. On désire faire un changement de variables canonique $(p, q) \to (P, Q)$ de sorte à avoir un nouvel Hamiltonien de la forme :
$$K(P, Q) = \frac{P^2}{2} + W(Q)$$
où $W(Q)$ est une fonction à définir. Pour y parvenir :
   (a) Donner la dimension de P, Q et K.
   (b) Définir $P = P(p, q)$ comme fonction affine en p (à savoir $P(p, q) = f_1(q)\ p + f_2(q)$).
   (c) Utiliser une fonction génératrice de type $F_2(P, q, t)$ pour trouver la coordonnée conjuguée Q la plus générale possible.
   (d) Fixer la liberté résiduelle dans $Q(P, q, t)$ de sorte à obtenir un Hamiltonien de la forme désirée.
   (e) Donner le nouvel Hamiltonien $K(P, Q)$.
4. Esquisser le potentiel $W(Q)$.
5. Sur le schéma précédent, indiquer les différents régimes possibles [2] , sans calculer les énergies limite, ainsi que les points d'équilibre (indiquer s'ils sont stables ou instables).
6. Dans ces nouvelles coordonnées, il existe un point d'équilibre stable en $Q = \bar{Q}$ (ne pas le calculer !). Trouver à quelle configuration cela correspond dans les coordonnées initiales (p, q).

Rappel :

$$p(P, q, t) = \frac{\partial F_2(P, q, t)}{\partial q} \qquad ; \qquad Q(P, q, t) = \frac{\partial F_2(P, q, t)}{\partial P}$$
$$K(P, Q, t) = H(p(P, Q, t), q(P, Q, t), t) + \frac{\partial F_2(P, q(P, Q, t), t)}{\partial t}$$

1. A savoir : $[p] \sim$ kg m/s, $[q] \sim$ m et $[H] \sim$ J
2. Les régimes possibles pour un système $H(p, q) = p^2/2m + V(q)$:
– **Lié** si le système reste dans une région finie durant son évolution temporelle.
– **Instable** si l'évolution temporelle va vers $q = \pm\infty$.
– **Asymptotiquement libre** si $V(\pm\infty) =$ constante, cas limite d'instable.

Mécanique Analytique , Corrigé partiel 2

Exercice 1 : Transformations canoniques *(6 points)*

1. Les deux transformations sont de la forme

$$\begin{cases} p = tP^k \\ q = \alpha Q P^{1-k} \end{cases} \qquad \text{où} \qquad \alpha = \alpha(k,t) \tag{1}$$

La matrice jacobienne de changement de base inverse est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial Q} & \frac{\partial q}{\partial P} \\ \frac{\partial p}{\partial Q} & \frac{\partial p}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha P^{1-k} & (1-k)\alpha Q P^{-k} \\ 0 & ktP^{k-1} \end{pmatrix} \tag{2}$$

On vérifie aisément que $M^T J M = \alpha kt \cdot J$. On a donc montré que seule la première transformation est canonique puisque dans ce cas $\alpha kt = 1$ et la matrice jacobienne est symplectique. Notez que l'on a démontré que la transormation inverse est canonique mais, comme démontré au cours, cela implique que la transformation elle-même l'est.

Voyons maintenant comment retrouver ce résultat en utilisant les crochets de Poisson. Le seul élément non-trivial est le suivant :

$$\begin{aligned} \{q,p\}_{Q,P} &= \frac{\partial q}{\partial Q}\frac{\partial p}{\partial P} - \frac{\partial q}{\partial P}\frac{\partial p}{\partial Q} \\ &= \alpha kt \end{aligned} \tag{3}$$

On retrouve donc bien le même résultat !

2. Essayons maintenant de trouver une fonction génératrice de type $F_2(q,P,t)$ associée à la première transformation. Comme $p = tP^k$ et que q, P et t sont les variables de la fonction F_2, on a immédiatement :

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} \quad \to \quad F_2(q,P,t) = qtP^k + f(P,t) \tag{4}$$

Voyons quelle est la contrainte sur f imposée par le fait que $Q = ktqP^{k-1}$:

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} \quad \to \quad F_2(q,P,t) = qtP^k + g(t) \tag{5}$$

Quelle que soit la fonction $g(t)$, la fonction F_2 que nous venons de trouver génère la transformation. Posons donc simplement $g(t) = 0$.

3. Afin que le nouvel Hamiltonien $K(P,Q)$ soit nul, il suffit d'observer que :

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \stackrel{!}{=} 0 \quad \to \quad H = -\frac{\partial F_2}{\partial t} = -qP^k = -\frac{1}{t}pq \tag{6}$$

Le Hamiltonien pour les variables P et Q étant nul, nous avons :

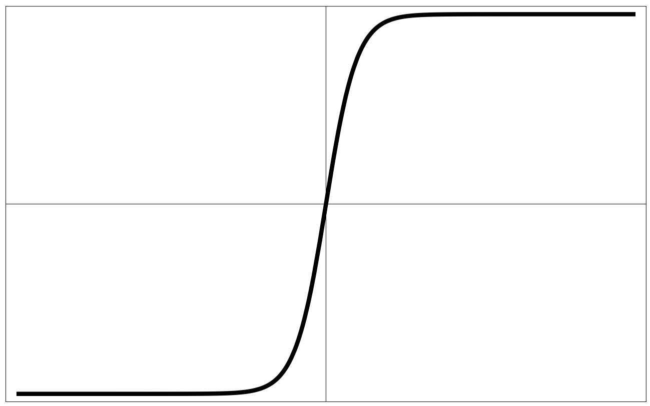
$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0 \quad \to \quad P = P_0 = \text{const} \qquad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 0 \quad \to \quad Q = Q_0 = \text{const} \tag{7}$$

Exercice 2 : Hamilton *(9 points)*

1. On trouve les dimensions suivantes pour les constantes :

$$\begin{array}{rcl} m & \sim & \text{kg} \\ L & \sim & \text{m} \\ \lambda & \sim & \text{m s}^{-1} \\ \eta & \sim & \text{kg m}^2\text{s}^{-2} \end{array} \tag{8}$$

2. Il faut esquisser la fonction $\tanh(x)$. Pour y parvenir, on note que $\tanh(0) = 0$ et $\tanh(\pm\infty) = \pm 1$, et on obtient :

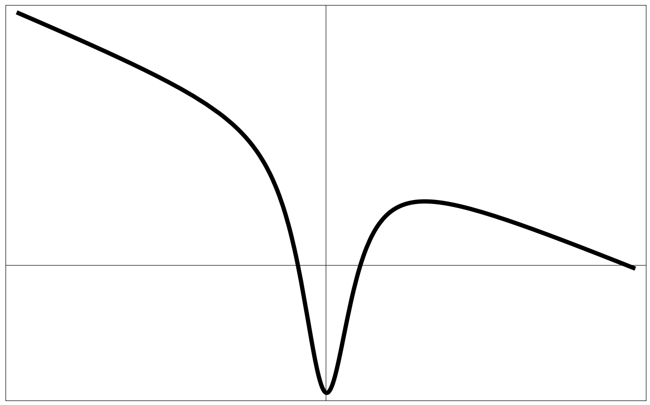


3. A présent on veut changer de coordonnées.
   (a) La dimension du Hamiltonien est toujours la même. On en déduit aisément P, puis Q sachant que $[P][Q] \sim [p][q]$:
$$\begin{array}{rcl} K & \sim & \text{kg m}^2\text{ s}^{-2} \\ P & \sim & \text{kg}^{1/2}\text{ m s}^{-1} \\ Q & \sim & \text{kg}^{1/2}\text{ m} \end{array} \tag{9}$$
   (b) Commençons par définir P. La fonction la plus générale affine en p est $P(p,q) = f(q)p + h(q)$. On identifie alors :
$$f(q) = \frac{1}{\sqrt{m}} \exp\left(-\frac{q}{L}\right) \quad \& \quad h(q) = \lambda\sqrt{m}\exp\left(\frac{q}{2L}\right) \tag{10}$$
   (c) Afin de trouver le Q le plus général, il faut commencer par trouver $p(P,q)$:
$$p(P,q) = \sqrt{m}\exp\left(\frac{q}{L}\right)P - \lambda m \exp\left(\frac{3q}{2L}\right) \tag{11}$$
   On intègre par rapport à q pour trouver F_2 :
$$F_2(P,q,t) = \sqrt{m}L\exp\left(\frac{q}{L}\right)P - \frac{2\lambda m L}{3}\exp\left(\frac{3q}{2L}\right) + G(P,t) \tag{12}$$
   où $G(P,t)$ est la “constante” d’intégration. Pour trouver $Q(P,q)$ on dérive par rapport à P :
$$Q(P,q) = \frac{\partial F_2(P,q.t)}{\partial P} = \sqrt{m}L\exp\left(\frac{q}{L}\right) + \frac{\partial}{\partial P}G(P,t) \tag{13}$$
   (d) On ne veut pas générer de termes de couplage de type PQ, on aimerait donc que Q ne dépende que de q. On pose alors $G(P,t) = 0$. On obtient :
$$Q(P,q) = \sqrt{m}L\exp\left(\frac{q}{L}\right) \tag{14}$$

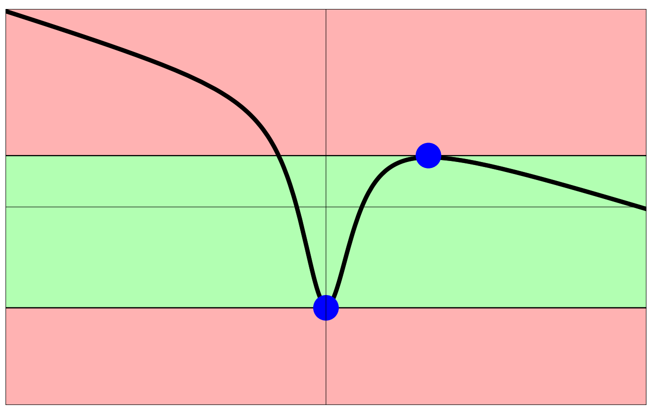
(e) Le nouvel Hamiltonien est donné par :

$$K(P,Q) = H(p(P,Q), q(Q)) = \frac{P^2}{2} - \frac{\lambda^2\sqrt{m}}{2L}Q + \eta\frac{Q^2 - mL^2}{Q^2 + mL^2} \tag{15}$$

4. $W(Q)$ est la somme d'une fonction linéaire et de $f(x) = (x^2-1)/(x^2+1)$. On sait que $f(x) = f(-x)$, $f(0) = -1$ et $f(\pm\infty) = +1$:



5. En vert, entre E_1 et E_2, il y a un état lié et un état instable ; pour $E < E_1$ et $E > E_2$ il n'y a que des états instables. En bleu les deux points d'équilibre, un stable et un instable.



6. Pour trouver à quelle configuration $(p,\, q)$ correspond la configuration d'équilibre $P = 0$ et $Q = \bar{Q}$, on inverse aisément les équations (10) et (14) pour trouver :

$$q = L\log\left(\frac{\bar{Q}}{\sqrt{m}L}\right) \qquad \& \qquad p = -\frac{\lambda m^{1/4}}{L^{3/2}}\bar{Q}^{3/2} \tag{16}$$