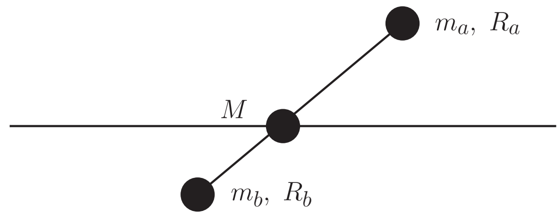
Mécanique Analytique , Partiel 1

Epreuve du 22 avril 2010 ; durée : 110 minutes ; sans document ni calculatrice

Exercice 1 : Lagrange *(6 points)*



Soit un système de trois masses m_a, m_b et M dans un plan. Elles sont situées sur une tige rigide de masse nulle avec m_a et m_b aux extrémités et M respectivement à une distance fixe R_a et R_b des deux précédentes. De plus, la masse M ne peut se déplacer que le long d'un rail rectiligne. Il n'y a pas de gravitation.

I : Configuration standard

1. Combien y a-t-il de degrés de liberté ? Trouver des coordonnées généralisées pour décrire le problème.
2. Ecrire le Lagrangien du système.
3. Quelles sont les quantités conservées ?
4. Sous quelle condition sur les paramètres $(M,\ m_a,\ m_b,\ R_a,\ R_b)$ le moment cinétique est-il conservé ?

II : On modifie le système en ajoutant un moteur qui fait tourner les masses a et b à une vitesse angulaire constante ω.

1. Combien y a-t-il de degrés de liberté ?
2. Ecrire le Lagragien pour ce nouveau système.
3. Quelles sont les quantités conservées ?
4. Trouver la trajectoire du système avec les conditions initiales suivantes : la tige forme un angle de $\pi/4$ avec le rail (comme sur le schéma) et la masse M se trouve en $x = 0$ avec une vitesse v_0.

Exercice 2 : Oscillations *(8 points)*

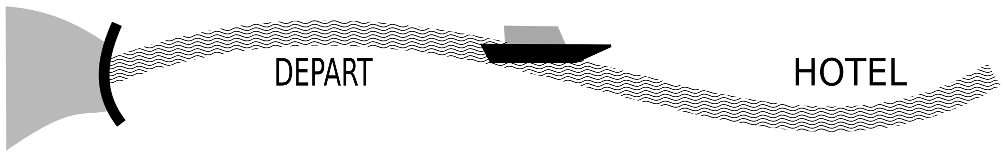
Considérer une particule de masse m se déplaçant dans le potentiel suivant en deux dimensions :

$$V(x, y) = \alpha^2 \frac{(x - y)^2 + x^2}{x^2 + d^2}$$

1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Trouver les quantités conservées.
3. Montrer qu'il n'existe qu'une position d'équilibre.
4. Par analyse dimensionnelle, donner la dépendance en m, α et d des fréquences d'oscillation.
5. Etudier les petits mouvements autour de la position d'équilibre :
   (a) Trouver les matrices M et K.
   (b) Trouver les fréquences propres.
   (c) La position d'équilibre est-elle stable ?
   (d) Donner la relation entre (x, y) et les coordonnées normales (Q_1, Q_2).

Exercice 3 : Variations *(6 points)*

Un bateau restaurant propose une croisière-souper le long d'une rivière dont le courant s'écoule à une vitesse $v(t) = \omega(t - 19\text{h}00)^2$ dû à un barrage situé en amont. Les clients montent au moment où la rivière est calme, à 19h00, pour être déposés à 23h00 dans un hôtel situé à 20 km en aval. L'énergie consommée à chaque instant par le bateau est donné par la vitesse relative au carré ($\epsilon(\dot{x} - v)^2$). Pour les évaluations, on prendra $\omega = 1.5$ km/h^3.



1. Formuler l'énergie consommée par le bateau sous la forme d'une fonctionnelle de sa trajectoire $x(t)$.
2. Quelle énergie est consommée s'il choisit d'avancer à vitesse constante ($\dot{x} = \text{const.}$) ?
3. Utiliser une quantité conservée afin de trouver la trajectoire optimale à suivre.
4. Quelle énergie est consommée dans ce cas ? La comparer au cas précédent.
5. Esquisser la trajectoire $x(t)$ optimale du bateau.

Mécanique Analytique , Corrigé Partiel 1

Assistants : christopher.andrey@epfl.ch & jan.mrazek@epfl.ch

Exercice 1 : Lagrange

I :

1. Les trois masses sont situées dans un même plan. Elles auraient donc 6 degrés de liberté s'il n'y avait pas de contraintes. La masse M est astreinte à se mouvoir sur un rail, ce qui enlève 1 degré de liberté. La masse m_a ne peut se trouver que sur le cercle de rayon R_a centré sur la masse M, ce qui enlève un autre degré de liberté. Finalement la position de la masse m_b est totalement fixée par les positions des masses M et m_a, ce qui retranche encore 2 degrés de liberté. On a donc au final $6 - 1 - 1 - 2 = 2$ degrés de liberté, que l'on identifie à la position de la masse M, notée x_M et l'angle que forme la droite définie par les masses M et m_a avec le rail (noté φ). Les coordonnées généralisées sont donc x_M et φ.
2. En coordonées cartésiennes si l'on note (x_a, y_a) la position de la masse m_a et (x_b, y_b) celle de la masse m_b, on a :

$$\begin{aligned} x_a &= x_M + R_a \cos\varphi \qquad & x_b &= x_M - R_b \cos\varphi \\ y_a &= R_a \sin\varphi & y_b &= -R_b \sin\varphi \end{aligned} \tag{1}$$

Dès lors le Lagrangien est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} M \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} m_a (\dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2) + \frac{1}{2} m_b (\dot{x}_b^2 + \dot{y}_b^2) \\ &= \frac{1}{2} \Sigma \dot{x}_M^2 + \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 + \Delta \sin\varphi \dot{x}_M \dot{\varphi} \end{aligned} \tag{2}$$

où $\Sigma = M + m_a + m_b$, $I = m_a R_a^2 + m_b R_b^2$ et $\Delta = m_b R_b - m_a R_a$.

3. Cherchons maintenant les quantités conservées. Comme le Lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, la fonction hamiltonienne est conservée. On a alors :

$$h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_M} \dot{x}_M + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \dot{\varphi} - \mathcal{L} = \mathcal{L} = \text{const} \tag{3}$$

On peut le comprendre qualitativement puisque le Lagrangien ne comprenant que des termes cinétiques, il est normal qu'il coïncide avec la fonction hamiltonienne.
D'autre part, on note que x_M est cyclique et donc que l'impulsion correspondante est conservée :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_M} = \Sigma \dot{x}_M + \Delta \sin\varphi \dot{\varphi} = \text{const} \tag{4}$$

4. Afin que le moment cinétique soit conservé, le potentiel ne doit pas dépendre de l'angle φ, ce qui revient à dire que φ doit être une variable cyclique. La condition sur les paramètres (M, m_a, m_b, R_a, R_b) permettant de réaliser cette situation est simplement $\Delta = 0$.

II :

1. Le nombre de degrés de liberté est réduit d'une unité puisque le moteur impose l'évolution temporelle de φ. On n'a donc plus qu'un seul degré de liberté.
2. Si l'on impose un mouvement de rotation uniforme, on a $\dot{\varphi} = \omega$, et donc $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Le Lagrangien est alors :

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2} \Sigma \dot{x}_M^2 + \Delta\omega \sin(\omega t + \varphi_0) \dot{x}_M \tag{5}$$

3. Dans ce cas, le Lagrangien dépend explicitement du temps, la fonction hamiltonienne n'est donc pas conservée. Par contre, x_M est cyclique, comme dans le cas précédent, et l'on a conservation de l'impulsion correspondante :

$$\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \dot{x}_M} = \Sigma \dot{x}_M + \Delta\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = \text{const} \tag{6}$$

4. On peut aisément trouver la trajectoire en résolvant l'équation précédente. On trouve alors

$$x_M(t) = \frac{1}{\Sigma}\left(A + Bt + \Delta\cos(\omega t + \varphi_0)\right) \tag{7}$$

où A, B et φ_0 sont des constantes que nous allons maintenant déterminer. On impose comme conditions initiales : $\varphi(0) = \pi/4$, $x_M(0) = 0$ et $\dot{x}_M(0) = v_0$. La première implique trivialement que $\varphi_0 = \pi/4$, la seconde condition donne $A = -\Delta/\sqrt{2}$ et la troisième détermine $B = v_0\Sigma + \Delta\omega/\sqrt{2}$.
On obtient donc finalement

$$x_M(t) = \frac{1}{\Sigma}\left(-\frac{\Delta}{\sqrt{2}} + \left(v_0\Sigma + \frac{\Delta\omega}{\sqrt{2}}\right)t + \Delta\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)\right) \tag{8}$$

On constate donc que si $\Delta = 0$, le mouvement du centre de masse se fait à vitesse constante v_0. En effet le fait que Δ soit nul traduit le fait qu'aucun moment de force ne s'applique sur la masse M et donc celle-ci continue son trajet !

Exercice 2 : Oscillations

On considère une particule de masse m se déplaçant dans le potentiel suivant en deux dimensions :

$$V(x,y) = \alpha^2\frac{(x-y)^2 + x^2}{x^2 + d^2} \tag{9}$$

1. Le Lagrangien est donné par
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x,y) \tag{10}$$
2. Le Lagrangien ne dépendant pas explicitement du temps, la fonction hamiltonienne est conservée, on a donc :
$$h = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{y}}\dot{y} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + V(x,y) = \text{const} \tag{11}$$
3. Les positions d'équilibre (x_*, y_*) doivent satisfaire
$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_*, y_*) = \frac{\partial V}{\partial y}(x_*, y_*) = 0 \tag{12}$$
Il nous suffit donc de calculer les dérivées premières du potentiel. Commençons par la condition la plus simple, celle selon y :
$$\frac{\partial V}{\partial y} = -2\alpha^2\frac{x-y}{x^2+d^2} \qquad \rightarrow \qquad x_* = y_* \tag{13}$$
La condition selon x donne :
$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2\alpha^2\frac{2x-y}{x^2+d^2} - x\frac{(x-y)^2+x^2}{(x^2+d^2)^2} \tag{14}$$
En injectant $x_* = y_*$ dans cette dernière équation, on trouve que $x_* = y_* = 0$ est la seule configuration d'équilibre. Notez que l'on aurait pu trouver dériver ce résultat de façon triviale en notant que le potentiel est positif partout et nul uniquement en $x = y = 0$!
4. Les grandeurs à disposition ont les dimensions suivantes :
$$[m] = \text{kg} \qquad [\alpha^2] = [V(x,y)] = \text{kg m}^2\ \text{s}^{-2} \qquad [d] = \text{m} \tag{15}$$
Afin d'obtenir une pulsation ω^2 en s^{-2}, on doit donc prendre la combinaison suivante :
$$\omega^2 \propto \frac{\alpha^2}{md^2} \tag{16}$$

5. (a) La matrice M est trivialement donnée par

$$M = m\mathbb{1}_2 \tag{17}$$

La matrice K quant à elle se trouve en ne gardant que les termes d'ordres quadratiques du développement du potentiel autour de la position d'équilibre :

$$V(x = x_* + \delta_x, y = y_* + \delta_y) = \alpha^2 \frac{(\delta_x - \delta_y)^2 + \delta_x^2}{d^2\,(1 + \delta_x^2/d^2)} \simeq \frac{\alpha^2}{d^2}\left((\delta_x - \delta_y)^2 + \delta_x^2\right)\left(1 - \frac{\delta_x^2}{d^2}\right) \tag{18}$$

On constate donc que le dénominateur ne contribue pas à l'ordre quadratique et que l'on obtient donc

$$K = \frac{2\alpha^2}{d^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

(b) Les fréquences propres sont les valeurs propres de la matrice $M^{-1/2}KM^{-1/2} = m^{-1}K$ et sont donc

$$\omega_\pm^2 = \frac{\alpha^2}{md^2}(3 \pm \sqrt{5}) \tag{20}$$

(c) Les deux fréquences propres du système étant positives, la position d'équilibre est stable.

(d) Afin de relier la paire (x, y) aux coordonnées normales (Q_1, Q_2) nous devons trouver la matrice de passage R qui réalise la diagonalisation de $M^{-1/2}KM^{-1/2}$. Pour ce faire, il suffit de trouver les vecteurs propres, de les normaliser et de les mettre en ligne. Nous obtiendrons finalement $\vec{x} = M^{-1/2}R^TQ$. Les vecteurs propres normalisés sont donnés par

$$\vec{A}_+ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{A}_- = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5 + \sqrt{5}}}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \tag{21}$$

et l'on trouve alors

$$R = \sqrt{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} & \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5-\sqrt{5}}} \\ \frac{1}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} & \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \tag{22}$$

Si l'on réexprime le potentiel en termes de Q_+ et Q_- on obtient comme attendu

$$V_{\text{osc}} = \frac{1}{2}\left(\omega_+^2 Q_+^2 + \omega_-^2 Q_-^2\right) \tag{23}$$

Exercice 3 : Variations

1. La fonctionnelle décrivant l'énergie consommée par le bateau lors d'un trajet $x(t)$ s'écrit

$$E[x(t)] = \int_{t_{\text{ini}}}^{t_{\text{fin}}} F(x, \dot{x}, t) = \epsilon \int_{19\text{h}00}^{23\text{h}00} (\dot{x} - \omega(t-19)^2)^2 dt \tag{24}$$

2. Si l'on choisit de naviguer à vitesse constante, alors $\dot{x} = v_0 = 5$ km/h afin de réaliser les 20 km en 4 heures. Dès lors, le trajet s'écrit $x_c(t) = v_0(t - 19)$. On trouve alors

$$E[x_c(t)] = 240.8\,\epsilon \tag{25}$$

3. Comme la variable x est cyclique, l'impulsion correspondante est conservée :

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\epsilon(\dot{x} - \omega(t-19)^2) = \text{const} \quad \to \quad \dot{x} = \bar{v} + \omega(t-19)^2 \tag{26}$$

La trajectoire est donc donnée par

$$x(t) = A + \bar{v}t + \frac{\omega}{3}(t-19)^3 \tag{27}$$

En imposant $x(19\mathrm{h}) = 0$ et $x(23\mathrm{h}) = L = 20$ km, on trouve détermine les constantes d'intégration et on trouve finalement la trajectoire optimale

$$x_{\mathrm{opt}}(t) = -3(t-19) + \frac{\omega}{3}(t-19)^3 \tag{28}$$

4. L'énergie consommée pour la trajectoire optimale est donnée par

$$E[x_{\mathrm{opt}}(t)] = 36\,\epsilon \tag{29}$$

On a donc bien $E[x_{\mathrm{opt}}(t)] < E[x_c(t)]$.

5. Le graphe de notre trajectoire est le suivant