Mécanique Analytique , Partiel 1

Epreuve du 6 novembre 2008 ; durée : 110 minutes ; sans document ni calculatrice

Exercice 1 : Symétries et quantités conservées *(8 points)*

1. Considérer une particule dans le plan (x, y). Définir pour chacun des cas suivants un potentiel $V(x, y, t)$ tel que :
   (a) L'impulsion selon $\hat{e}_x$ est conservée, mais pas l'impulsion selon $\hat{e}_y$.
   (b) Le moment cinétique est conservé, mais pas la fonction hamiltonienne.
   (c) L'impulsion selon $\hat{e}_x + \hat{e}_y$ est conservée, mais pas le moment cinétique.
2. Considérer le Lagrangien suivant :
$$L = \frac{1}{4}\kappa\left[\dot{x}^2 - \dot{y}^2\right]^2$$
   (a) Montrer que la transformation suivante est une symétrie du système :
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(s) & \sinh(s) \\ \sinh(s) & \cosh(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
   (b) Trouver la quantité conservée correspondante en utilisant le théorème de Noether.
   NB : Ne pas se préoccuper de l'interprétation physique de ce système.

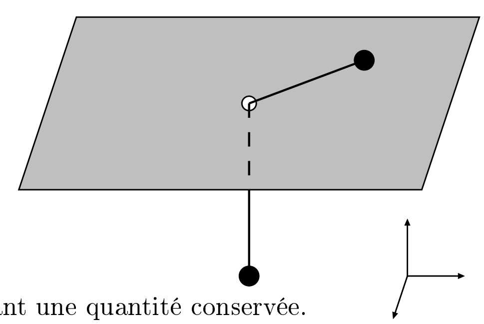
Exercice 2 : Trajet sur un cône *(11 points)*

Trouver le trajet le plus court reliant les points $(z = z_0, \phi = 0)$ et $(z = z_0, \phi = \pi/2)$ sur un cône d'équation $r = b - az$.

Quel est le chemin à suivre pour $a = 0$?

Indications :
- Décrire le système avec une fonctionnelle $D[z(\phi)]$ et utiliser les quantités conservées.
- $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right)$

Exercice 3 : Fils, table, gravitation et petites oscillations *(11 points)*



Une particule de masse m est posée sur une table (horizontale), sur laquelle elle glisse sans frottement. Elle est reliée par un fil de longeur L et de masse nulle, passant par un trou dans la table, à une deuxième particule de masse M. Le système est soumis à la gravitation.

On considère uniquement le cas où la deuxième particule ne se déplace que verticalement.
- Définir des coordonnées généralisées et écrire le Lagrangien.
- Trouver les quantités conservées.
- Ecrire les équations du mouvement ; les réduire à une variable en utilisant une quantité conservée.
- Trouver quelle valeur imposer à cette quantité pour que la deuxième particule soit au repos à une distance h de la table.
- Etudier les petites oscillations autour de cette configuration.

Mécanique Analytique , Corrigé partiel 1

Exercice 1 : Symétries et quantités conservées *(8 points)*

1. (a) Si x est cyclique, alors p_x est conservé. De même, si y n'est pas cyclique, alors p_y n'est pas conservé. N'importe quelle fonction de y et t fait donc l'affaire, par exemple :

$$V_a(x,y,t) = \alpha y \tag{1}$$

(b) Pour que le moment cinétique soit conservé, il faut avoir une symétrie de rotation, et donc avoir un potentiel qui ne dépend que du rayon, x^2+y^2. Si le temps est homogène, alors la fonction hamiltonienne est conservée ; il faut donc une dépendance explicite au temps. On a donc par exemple :

$$V_b(x,y,t) = \beta t(x^2+y^2) \tag{2}$$

(c) On aimerait un potentiel qui soit invariant sous translation selon $\hat{e}_x + \hat{e}_y$, ce qui est le cas pour toute fonction de $x-y$.
On peut le voir de deux façons. Soit on veut imposer la symétrie de translation $x \to x+s$ & $y \to y+s$, ce qui est le cas pour $x-y$. Soit on tourne le système d'axes et on a $\tilde{x} = (x+y)/\sqrt{2}$, $\tilde{y} = (y-x)/\sqrt{2}$. A ce moment on veut que $\tilde{x}$ soit cyclique et donc que le potentiel de dépende que de $\tilde{y}$.
La seule fonction de $x-y$ qui soit invariante sous rotation c'est la fonction triviale qui est une constante, c'est donc la seule à éviter. Ce qui conduit par exemple à :

$$V_c(x,y,t) = \gamma(x-y) \tag{3}$$

2. (a) Il faut vérifier que :

$$L(\dot{x}(s), \dot{y}(s)) = L(\dot{x}, \dot{y}) \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}^2(s) &= \cosh^2(s)\dot{x}^2 + 2\sinh(s)\cosh(s)\dot{x}\dot{y} + \sinh^2(s)\dot{y}^2 \\
\dot{y}^2(s) &= \cosh^2(s)\dot{y}^2 + 2\sinh(s)\cosh(s)\dot{x}\dot{y} + \sinh^2(s)\dot{x}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}^2(s) - \dot{y}^2(s) &= [\cosh^2(s) - \sinh^2(s)]\dot{x}^2 - [\cosh^2(s) - \sinh^2(s)]\dot{y}^2 \\
&= \dot{x}^2 - \dot{y}^2
\end{aligned}$$

Ce qui est donc bien le cas.

(b) La quantité conservée est trouvée grâce au théorème de Noether :

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial x(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \frac{\partial y(s)}{\partial s}\bigg|_{s=0} \\
&= \kappa[\dot{x}^2 - \dot{y}^2]\dot{x}y - \kappa[\dot{x}^2 - \dot{y}^2]\dot{y}x \\
&= \boxed{\kappa(\dot{x}^2 - \dot{y}^2)(\dot{x}y - \dot{y}x)}
\end{aligned} \tag{5}$$

Remarque : le groupe de symétrie sous lequel ce Lagrangien est invariant est $SO(1,1)$.

Exercice 2 : Trajet sur un cône *(11 points)*

Essayons de construire la fonctionnelle pas à pas. On cherche la distance D entre deux points A et B, elle est donnée par :

$$D = \int_A^B ds \tag{6}$$

Il semble judicieux de travailler avec des coordonnées cylindriques. L'élément de ligne est alors donné par :

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2} \tag{7}$$

Ces trois coordonnées sont reliées par la contrainte d'être sur le cône :

$$r = b - az \quad \Rightarrow \quad dr = -a\ dz \tag{8}$$

On obtient alors :

$$ds = \sqrt{(b-az)^2 d\varphi^2 + (1+a^2)dz^2} \tag{9}$$

Ensuite il faut faire le choix de la paramétrisation de la trajectoire : une courbe paramétrique $(\varphi(\xi), z(\xi))$, $\varphi(z)$ ou $z(\varphi)$. On opte pour la dernière solution. En utilisant que $dz/d\varphi = z'$ on obtient :

$$\boxed{D[z(\varphi)] = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(1+a^2)z'^2 + (b-az)^2} d\varphi = \int_0^{\pi/2} F(z, z', \varphi) d\varphi} \tag{10}$$

Comme la fonction F ne dépend pas explicitement de φ, l'équivalent de la fonction hamiltonienne est conservé :

$$C = \frac{\partial F}{\partial z'} z' - F = -\frac{(b-az)^2}{\sqrt{(1+a^2)z'^2 + (b-az)^2}} \tag{11}$$

En mettant la dernière équation au carré, on obtient :

$$\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 = \frac{(b-az)^2}{C^2(1+a^2)} \left[(b-az)^2 - C^2\right] \tag{12}$$

En séparant les variables on obtient

$$\frac{dz}{(b-az)\sqrt{\frac{(b-az)^2}{C^2} - 1}} = \frac{d\varphi}{\sqrt{1+a^2}} \tag{13}$$

En faisant le changement de variables $x = (b-az)/C$ on obtient

$$\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} d\varphi \qquad \rightarrow \qquad \arctan\sqrt{x^2-1} = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}(\varphi - \varphi_0) \tag{14}$$

où l'on a réabsorbé le $\pi/2$ dans la constante d'intégration. On obtient donc finalement

$$z(\varphi) = \frac{1}{a}\left(b - \frac{C}{\cos\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}(\varphi - \varphi_0)\right)}\right) \tag{15}$$

En utilisant que $z(0) = z_0$ on peut réécrire

$$z(\varphi) = \frac{1}{a}\left(b - \frac{(b-az_0)\cos\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\varphi_0\right)}{\cos\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}(\varphi - \varphi_0)\right)}\right) \tag{16}$$

En utilisant la seconde condition $z(\pi/2) = z_0$, on obtient

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4} + n\pi\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \tag{17}$$

Finalement

$$\boxed{z(\varphi) = \frac{1}{a}\left(b - \frac{(b - az_0)\cos\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}(\varphi - \frac{\pi}{4})\right)}\right)} \tag{18}$$

Si $a = 0$, on obtient $z = z_0$. En effet, la condition $a = 0$ ne décrit rien d'autre qu'un cylindre !

Exercice 3 : Fils, table, gravitation et petites oscillations *(11 points)*

- Les coordonnées généralisées sont r et θ qui repèrent la position de la masse m sur la table. Le fil étant de longueur L nous avons la contrainte $r - z = L$ (l'axe z étant défini comme sur la figure). Le Lagrangien s'écrit alors

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2}M\dot{r}^2 - Mg(r - L) \tag{19}$$

- Il y a deux quantités conservées : le Lagrangien ne dépendant pas explicitement du temps la fonction hamiltonienne $h = T + V$ est conservée, la variable θ étant cyclique, le moment cinétique $L_z = mr^2\dot{\theta}$ est lui aussi conservé.
- Les équations d'Euler-Lagrange donnent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \qquad &\rightarrow \qquad (m+M)\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - Mg \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} \qquad &\rightarrow \qquad L_z = mr^2\dot{\theta} = \text{const} \end{aligned} \tag{20}$$

En utilisant le fait que L_z est conservé, on peut réécrire l'équation pour r comme

$$(m+M)\ddot{r} = \frac{L_z^2}{mr^3} - Mg \tag{21}$$

- Etant donné que $r = L - h$, la condition pour que la particule de masse M soit au repos à une distance h de la table se traduit par

$$\frac{L_z^2}{m(L-h)^3} - Mg = 0 \tag{22}$$

Cette dernière équation implique que L_z doit prendre la valeur suivante :

$$L_z^2 = mMg(L-h)^3 \qquad \rightarrow \qquad \dot{\theta}_h = \sqrt{\frac{Mg}{m(L-h)}} \tag{23}$$

- Afin d'étudier les petites oscillations autour de cette configuration, introduisons $-z = h + \delta$. L'équation du mouvement donne alors

$$\begin{aligned} (m+M)\ddot{\delta} &= -\frac{L_z^2}{m(L-h-\delta)^3} + Mg \\ &\simeq -\frac{L_z^2}{m(L-h)^3\left[1 - \frac{3\delta}{L-h}\right]} + Mg \\ &\simeq -\frac{L_z^2}{m(L-h)^3}\left(1 + \frac{3\delta}{L-h}\right) + Mg \\ &\simeq -\frac{3L_z^2}{m(L-h)^4}\delta \end{aligned} \tag{24}$$

La fréquence des petites oscillations est donc caractérisée par une pulsation

$$\omega^2 = \frac{3L_z^2}{m(m+M)(L-h)^4} \tag{25}$$