

Chapitre 1

Compléments sur la seconde quantification

1.1 Introduction

Nous observons des processus de transformations de particules dans la nature, par exemple $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. Le problème est : comment peut-on décrire un système qui admet des réactions avec non conservation du nombre de particules dans la mécanique quantique ? D'habitude, si nous avons un système avec N particules, nous avons N impulsions \vec{p}_i et N coordonnées \vec{x}_i pour décrire la dynamique et ce nombre N est fixé. Comment représenter les fonctions d'onde de système où le nombre de particules peut changer ? Comment et dans quel espace représenter un opérateur capable de changer le nombre de particule d'un état ? C'est là que la seconde quantification rentre en jeu. Elle consiste à promouvoir une fonction d'onde $\psi(x)$ en un opérateur $\hat{\psi}$, dépendant des opérateurs de création et d'annihilation.

1.2 Bosons

1.2.1 Seconde quantification et systèmes de particules indiscernables.

Pour un système de N particules dans un potentiel externe $U(x)$ et sans interaction entre elles, nous avons l'hamiltonien suivant :

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N H_i = \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + U(x_i) \right) \quad (1.1)$$

où $H_i \equiv H(p_i, x_i)$ est l'hamiltonien d'une particule seule quelconque. Par exemple, pour une particule libre : $U(x_i) = 0$, un oscillateur harmonique : $U(x_i) = \frac{m^2\omega^2}{2}x_i^2$, et un potentiel central $U(x_i) = \frac{\alpha}{|x_i|}$.

Le nombre de coordonnées dans cet hamiltonien est toujours N , il n'y a pas de changement au cours du temps. Nous disons que le nombre de particules est strictement conservé. Par

conséquent, pour avoir une description d'un système avec un nombre de particules variable nous devons passer de la représentation des (x_i, p_i) à un nouveau type de représentation. Cette représentation s'appelle "la représentation de nombre d'occupation" et est associée à la procédure de "deuxième quantification". Ce nom n'est pas vraiment adéquat, parce qu'il n'y a aucune quantification supplémentaire, mais il nous faut vivre avec car il a une origine historique.

On suppose connu le spectre et les fonctions propres de H :

$$H\psi_n(x) = E_n\psi_n(x) \quad (1.2)$$

Alors les solutions du problème à N corps peuvent s'écrire sous la forme

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \sum_Q \psi_{n_1}(x_1) \dots \psi_{n_N}(x_N) \quad (1.3)$$

où Q représente toutes les permutations possibles des indices qui numérotent les particules. Par exemple, pour 2 particules, un état propre peut être obtenu en mettant une particule dans l'état 0, et une dans l'état 1. Cette somme sur les permutations comportera donc deux termes, une fois la particule 1 sera dans l'état 0, une fois ce sera la particule 2.

Les énergies propres associées à ces fonctions d'ondes sont simplement :

$$E = E_{n_1} + \dots + E_{n_N} \quad (1.4)$$

Cette façon de raisonner ne fait appel qu'à nos connaissances précédentes. On va introduire maintenant le formalisme de la seconde quantification pour reformuler le problème et obtenir une expression plus compacte des fonctions d'onde. On ne justifiera cette approche qu'en prenant des exemples pour se convaincre de son bien-fondé.

- On associe à chaque fonction propre $\psi_n(x)$ des opérateurs de création et annihilation bosoniques a_n^\dagger et a_n , qui obéissent aux relations suivantes :

$$[a_n, a_m] = 0, \quad [a_n^\dagger, a_m^\dagger] = 0, \quad [a_n, a_m^\dagger] = \delta_{mn} \quad (1.5)$$

- On introduit le vecteur de vide $|0\rangle$ qui satisfait la propriété $a_n|0\rangle = 0, \forall a_n$. (Cette propriété est démontrée dans l'App. (1.4).

Alors, la fonction $\Psi(x_1, \dots, x_N)$ peut être associée à $a_{n_1}^\dagger \dots a_{n_N}^\dagger |0\rangle$, où $a_{n_1}^\dagger$ crée une particule de fonction d'onde $\psi_{n_1}(x)$ et d'énergie E_{n_1} .

Si l'on réécrit l'hamiltonien initial comme étant désormais

$$\mathcal{H} = \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^\dagger a_n \quad (1.6)$$

on se rendra compte par la suite à travers des exemples que cet hamiltonien décrit bien le même problème mais ne contient plus d'information sur le nombre de particules du système.

Ceci est la forme de l'hamiltonien après la seconde quantification. On voit bien qu'il n'y a pas grand chose à voir avec une véritable quantification !

– Exemple $n = 0$: pas de particule,

$$\mathcal{H}|0\rangle = 0. \quad (1.7)$$

– Exemple $n = 1$: un système avec une seule particule. Les états du système sont les fonctions d'onde $a_i^\dagger|0\rangle \leftrightarrow \varphi_i(x)$. On applique \mathcal{H}

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(a_i^\dagger|0\rangle) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^\dagger a_n (a_i^\dagger|0\rangle) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^\dagger (a_i^\dagger a_n + \delta_{in})|0\rangle = \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^\dagger a_i^\dagger a_n |0\rangle + \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^\dagger \delta_{in} |0\rangle = 0 + E_i a_i^\dagger |0\rangle \end{aligned} \quad (1.8)$$

et on trouve que $a_i^\dagger|0\rangle$ est un vecteur propre de \mathcal{H} avec valeur propre E_i

$$\mathcal{H}(a_i^\dagger|0\rangle) = E_i a_i^\dagger|0\rangle. \quad (1.9)$$

– Exemple $n = 2$: un système de deux particules, par exemple deux bosons sur deux niveaux d'énergie différents. Les états du système s'obtiennent en appliquant sur le vide un opérateur a_i^\dagger pour créer une particule sur le niveau E_i et a_j^\dagger pour en créer une autre avec énergie E_j . Donc

$$a_i^\dagger a_j^\dagger|0\rangle \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_i(x_1)\varphi_j(x_2) + \varphi_i(x_2)\varphi_j(x_1)]$$

On applique \mathcal{H} à cet état.

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(a_i^\dagger a_j^\dagger|0\rangle) &= \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^\dagger a_n (a_i^\dagger a_j^\dagger|0\rangle) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^\dagger (\delta_{ni} + a_i^\dagger a_n) a_j^\dagger|0\rangle \\ &= E_i a_i^\dagger a_j^\dagger|0\rangle + \sum_{n \in \mathbb{N}} E_n a_n^\dagger a_i^\dagger (\delta_{nj} + a_j^\dagger a_n)|0\rangle = \\ &= (E_i + E_j) a_i^\dagger a_j^\dagger|0\rangle \end{aligned}$$

En effet, a_i^\dagger et a_j^\dagger commutent entre eux.

Generalisation

On peut généraliser cette procédure avec une base de fonctions à une particule qui ne sont pas fonctions propres de l'hamiltonien. Si on appelle $\{\psi_n(x)\}$ cette base complète, et on associe à chaque membre de cette base des opérateurs a_n et a_n^\dagger , on a alors que l'hamiltonien $\mathcal{H} = \sum H_i$ est équivalent à

$$\mathcal{H} = \sum_{n,m} H_{mn} a_m^\dagger a_n, \quad (1.10)$$

où

$$H_{mn} = \langle \psi_m | H | \psi_n \rangle = \int d^3x \psi_m^*(x) H \psi_n(x) \quad (1.11)$$

Note

On remarquera le lien entre le système de l'oscillateur harmonique et le formalisme de la seconde quantification pour un ensemble d'oscillateurs harmoniques.

Pour un seul oscillateur, la fonction propre de l'état fondamental est

$$\psi_0 \sim |0\rangle$$

On obtient les états excités en appliquant successivement l'opérateur de création a^\dagger sur l'état fondamental,

$$\begin{aligned}\psi_1 &\sim |1\rangle \sim a^\dagger|0\rangle \\ \psi_2 &\sim |2\rangle \sim \frac{a^{\dagger 2}}{\sqrt{2!}}|0\rangle \\ \psi_n &\sim |n\rangle \sim \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle\end{aligned}$$

Considérons maintenant le problème d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques. On se restreint au sous-espace \mathcal{H}_1 à une particule de l'espace de Fock (voir partie 1.2.4). Dans ce cas, un état quelconque à une particule est donné par :

$$\psi_i \sim a_i^\dagger|\tilde{0}\rangle,$$

où $|\tilde{0}\rangle$ est l'état du vide (**sans particule !**), et l'opérateur a_i^\dagger crée une particule directement dans l'état d'énergie E_i . Il y a donc une équivalence entre cet état et l'état construit comme précédemment, c'est-à-dire :

$$a_i^\dagger|\tilde{0}\rangle = \frac{a_i^{\dagger i}}{\sqrt{i!}}|0\rangle.$$

Donc, entre autres, $a_0^\dagger|\tilde{0}\rangle$ est le même état que $|0\rangle$, soit encore l'état fondamental d'énergie E_0 .

Interactions

Pour une théorie avec interaction entre paires, comme par exemple :

$$\mathcal{H} = \sum H(x_i, p_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(|x_i - x_j|) \quad (1.12)$$

L'hamiltonien d'interaction en seconde quantification est construit de la façon suivante :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}} \quad (1.13)$$

$$= \sum_{m,n} H_{mn} a_m^\dagger a_n + \frac{1}{2} \sum_{m,n,k,l} V_{mnkl} a_m^\dagger a_n^\dagger a_k a_l, \quad (1.14)$$

où

$$V_{mnkl} = \int d^3x d^3y \psi_m^*(x) \psi_n^*(y) V(|x-y|) \psi_k(x) \psi_l(y). \quad (1.15)$$

On va encore une fois se convaincre de la justesse de cette formule en regardant les exemples avec un petit nombre de particules.

- Pas de particule : $\mathcal{H}|0\rangle = 0$.
- Une particule, puisque l'interaction est à deux corps, le terme \mathcal{H}_{int} appliqué à un état à une particule sera toujours nul. On se retrouve donc dans le cas sans interaction.
- Premier cas intéressant. Calculons $\mathcal{H}_{\text{int}} a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle$ et montrons que c'est équivalent à $V(|x_1 - x_2|) \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_i(x_1) \psi_j(x_2) + \psi_i(x_2) \psi_j(x_1)]$

$$\mathcal{H}_{\text{int}} a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{m,n,k,l} V_{mnkl} a_m^\dagger a_n^\dagger a_k a_l a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle \quad (1.16)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m,n,k,l} V_{mnkl} a_m^\dagger a_n^\dagger a_k (\delta_{li} + a_i^\dagger a_l) a_j^\dagger |0\rangle \quad (1.17)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m,n,k,l} V_{mnkl} a_m^\dagger a_n^\dagger (\delta_{li} \delta_{kj} + a_k a_i^\dagger \delta_{lj}) |0\rangle \quad (1.18)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m,n,k,l} V_{mnkl} a_m^\dagger a_n^\dagger (\delta_{li} \delta_{kj} + \delta_{ki} \delta_{lj}) |0\rangle \quad (1.19)$$

$$= \sum_{m,n} V_{mni} a_m^\dagger a_n^\dagger |0\rangle. \quad (1.20)$$

On remplace maintenant l'élément de matrice de la perturbation par son expression explicite donnée par l'éq. (1.15).

$$\mathcal{H}_{\text{int}} a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle = \sum_{m,n} \int d^3x d^3y \psi_m^*(x) \psi_n^*(y) V(|x-y|) \psi_i(x) \psi_j(y) a_m^\dagger a_n^\dagger |0\rangle \quad (1.21)$$

On a également que $a_m^\dagger a_n^\dagger |0\rangle$ correspond à $\frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_m(x_1) \psi_n(x_2) + \psi_m(x_2) \psi_n(x_1)]$. On rappelle que, puisque la base est orthonormée, on a la relation suivante :

$$\sum_n \psi_n^*(x) \psi_n(x') = \delta(x - x'). \quad (1.22)$$

Si on met maintenant tout ensemble, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\text{int}} a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle &= \int d^3x d^3y V(|x-y|) \psi_i(x) \psi_j(y) \frac{\delta(x-x_1)\delta(y-x_2) + \delta(x-x_2)\delta(y-x_1)}{\sqrt{2}} \\ &= V(|x_1-x_2|) \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_i(x_1)\psi_j(x_2) + \psi_i(x_2)\psi_j(x_1)],\end{aligned}\quad (1.23)$$

qui vérifie l'éq. (1.12) $\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V(|x_i-x_j|)$ pour le cas de deux particules $i, j = 1, 2$ avec

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{1}{2} [V(|x_1-x_2|) + V(|x_2-x_1|)] = V(|x_1-x_2|).\quad (1.24)$$

1.2.2 Seconde quantification en représentation position

Définissons l'opérateur qui est une fonction de x (champ quantique)

$$\psi(x) = \sum_n a_n \varphi_n(x),\quad (1.25)$$

où les fonctions $\varphi_n(x)$ forment une base complète et c_n des coefficients. Avec les relations de commutation suivantes

$$[\psi(x), \psi(x')] = 0, \quad [\psi(x), \psi^\dagger(x')] = \delta(x-x')\quad (1.26)$$

on a que l'Hamiltonien s'écrit comme

$$H = \int d^3x \psi^\dagger(x) H(x) \psi(x) + \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(y) V(|x-y|) \psi(x) \psi(y).\quad (1.27)$$

C'est l'hamiltonien dans la représentation de deuxième quantification. L'origine du mot "deuxième" est la suivante : la "première" quantification fait passer la coordonnée x à l'opérateur x , la "deuxième" quantification est la transition des fonction d'onde $\phi(x)$ aux opérateurs $\Psi(x)$. Ce formalisme est très utilisé et important en physique du solide et des particules élémentaires.

1.2.3 Seconde quantification en représentation impulsion

La représentation impulsion est une autre représentation très utile. Soit les $\psi_{\vec{p}}(\vec{x})$ des fonctions propres de l'opérateur impulsion

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}) = \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^{3/2} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}},\quad (1.28)$$

normalisées selon

$$\langle \psi_{\vec{p}} | \psi_{\vec{p}'} \rangle = \int d^3x e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}' \cdot \vec{x}} = \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (1.29)$$

L'opérateur correspondant à la création d'une particule avec impulsion \vec{p} décrite par un état $\psi_{\vec{p}}(x)$ est $a_{\vec{p}}^\dagger$, celui de destruction $a_{\vec{p}}$ et ils satisfont

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{p}'}^\dagger] = 0, \quad [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^\dagger] = \delta^3(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (1.30)$$

On peut vérifier la consistance des éqs. (1.26) et (1.30)

$$\begin{aligned} [\psi(x), \psi^\dagger(x')] &= \int d^3p d^3p' [\psi_{\vec{p}}(x) a_{\vec{p}}, \psi_{\vec{p}'}^*(x') a_{\vec{p}'}^\dagger] = \int d^3p d^3p' \psi_{\vec{p}}(x) \psi_{\vec{p}'}^*(x') \delta^3(\vec{p} - \vec{p}') \\ &= \int d^3p \psi_{\vec{p}}(x) \psi_{\vec{p}}^*(x') = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}'} = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}'). \end{aligned} \quad (1.31)$$

De l'Hamiltonien pour une seule particule

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (1.32)$$

on passe à celle en deuxième quantification

$$\mathcal{H} = \int d^3p \frac{p^2}{2m} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}}. \quad (1.33)$$

L'opérateur d'impulsion totale est

$$\vec{P} = \int d^3p a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \vec{p}. \quad (1.34)$$

1.2.4 Espace de Fock

Comme il a déjà été fait mention précédemment, l'hamiltonien écrit en seconde quantification ne dépend pas du nombre de particules contenues dans le système. Il ne dépend donc pas non plus des coordonnées individuelles des particules.

On peut ainsi construire l'espace de Hilbert dans lequel vit cet hamiltonien comme étant la somme directe des espaces de Hilbert avec un nombre fixé de particules. Ce nouvel espace, plus grand, est appelé espace de Fock \mathcal{F} .

$$\mathcal{F} = 0 \oplus 1 \oplus 2 \oplus 3 \oplus \dots \quad (1.35)$$

Un vecteur arbitraire vivant dans cet espace peut être écrit comme :

$$\psi = c^{(0)}|0\rangle + \sum_i c_i^{(1)} a_i^\dagger |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2!}} \sum_{ij} c_{ij}^{(2)} a_i^\dagger a_j^\dagger |0\rangle + \dots \quad (1.36)$$

La normalisation de ce vecteur implique :

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \implies |c^{(0)}|^2 + \sum_i |c_i^{(1)}|^2 + \frac{1}{2!} \sum_{ij} |c_{ij}^{(2)}|^2 + \dots = 1 \quad (1.37)$$

On interprète les termes de l'égalité de droite comme étant les probabilités d'avoir un nombre spécifique de particules, donné par l'exposant entre parenthèse. Il est alors assez clair que cette somme doit être égale à 1.

Cet espace de Fock nous permet de décrire des processus où le nombre de particules n'est pas conservé. Ce type de réaction est très fréquent en physique des particules, par exemple :

– Désintégration β : $n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$. L'hamiltonien d'interaction s'écrit ici

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = a_p^\dagger a_e^\dagger a_{\bar{\nu}}^\dagger a_n + h.c.$$

$h.c.$ signifie hermitien conjugué, et représente la réaction dans l'autre sens, *i.e.* la création d'un neutron.

– Désintégration du Higgs : $H \leftrightarrow e^+ e^-$. $\mathcal{H}_{\text{int}} = a_{e^-}^\dagger a_{e^+}^\dagger a_H + h.c.$

1.3 Fermions

On définit les opérateurs de création et destruction a^\dagger et a pour les particules fermioniques. Ils vérifient

$$\{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0, \quad \text{et} \quad \{a, a^\dagger\} = 1 \quad (1.38)$$

où l'anticommutateur $\{a, b\} \equiv ab + ba$. On considère l'opérateur $N_f = a^\dagger a$, qui est l'opérateur de nombre pour les fermions. Il vérifie les théorèmes suivants

Théorème 1.3.1 *Toutes les valeurs propres de l'opérateur N_f sont réelles et positives.*

$$N_f |\alpha\rangle = a^\dagger a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle.$$

Démonstration :

$$\alpha = \langle \alpha | a^\dagger a |\alpha\rangle = (a |\alpha\rangle, a |\alpha\rangle) \geq 0.$$

Théorème 1.3.2 *Les valeurs propres de N_f sont soit 0 soit 1.*

Démonstration : pour un ket $|\alpha\rangle$ quelconque, avec $N_f |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle$, on a les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} N_f a |\alpha\rangle &= a^\dagger a a |\alpha\rangle \\ &= (1 - a a^\dagger) a |\alpha\rangle = a |\alpha\rangle - a a^\dagger a |\alpha\rangle \\ &= a |\alpha\rangle - a \alpha |\alpha\rangle = (1 - \alpha) a |\alpha\rangle \end{aligned} \quad (1.39)$$

et

$$\begin{aligned} N_F a^\dagger |\alpha\rangle &= a^\dagger a a^\dagger |\alpha\rangle = a^\dagger (1 - a^\dagger a) |\alpha\rangle \\ &= (1 - \alpha) a^\dagger |\alpha\rangle \end{aligned} \quad (1.40)$$

Par ailleurs, on sait également, par les propriétés de l'action des opérateurs création et annihilation sur des états quelconque que :

$$\begin{aligned} N_f a |\alpha\rangle &= N_f \sqrt{\alpha} |\alpha - 1\rangle \\ &= \sqrt{\alpha} (\alpha - 1) |\alpha - 1\rangle \\ &= (\alpha - 1) a |\alpha\rangle \end{aligned} \quad (1.41)$$

et

$$\begin{aligned} N_f a^\dagger |\alpha\rangle &= N_f \sqrt{\alpha + 1} |\alpha + 1\rangle \\ &= (\alpha + 1) a^\dagger |\alpha\rangle. \end{aligned} \quad (1.42)$$

En combinant (1.39) avec (1.41) et (1.40) avec (1.42), on obtient

$$\begin{cases} (1 - \alpha) a |\alpha\rangle = (\alpha - 1) a |\alpha\rangle \\ (1 - \alpha) a^\dagger |\alpha\rangle = (1 + \alpha) a^\dagger |\alpha\rangle \end{cases} \implies \begin{cases} (1 - \alpha) a |\alpha\rangle = 0 \\ \alpha a^\dagger |\alpha\rangle = 0 \end{cases} \quad (1.43)$$

donc

$$\begin{cases} (1 - \alpha) = 0 & \text{ou} & a |\alpha\rangle = 0 \\ \alpha = 0 & & \text{ou} & a^\dagger |\alpha\rangle = 0. \end{cases} \quad (1.44)$$

Notre système est alors bi-dimensionnel : on a deux valeurs propres et deux vecteurs propres.

- $\alpha = 1 \implies a^\dagger |\alpha\rangle = 0$. Si l'état est déjà occupé par un fermion, l'opérateur de création ne peut pas en mettre un de plus, c'est-à-dire $(a^\dagger)^2 = 0$.

- $\alpha = 0 \implies a |\alpha\rangle = 0$. C'est l'état du vide.

Nous allons construire explicitement un exemple de tels opérateurs, en choisissant pour a et a^\dagger des matrices 2×2

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

Si on prend un vecteur colonne pour l'état du vide

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

on peut vérifier qu'il s'agit d'un système de fermions parce que

$$a|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.47)$$

$$a^\dagger|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv |1\rangle \quad (1.48)$$

$$a^\dagger|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (1.49)$$

et l'opérateur N_f

$$N_f \equiv a^\dagger a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

donne correctement le nombre de particule

$$N_f \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.51)$$

$$N_f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.52)$$

Generalisation

On peut généraliser cette description pour un grand nombre de fermions si on introduit pour chaque $\psi_n(x)$, où $\psi_n(x)$ indique une base complète de fonctions d'onde pour une particule) des opérateurs de création et destruction fermioniques tels que

$$\{a_i, a_j\} = \{a_i^\dagger, a_j^\dagger\} = 0 \quad \text{et} \quad \{a_i, a_j^\dagger\} = \delta_{ij}. \quad (1.53)$$

L'opérateur fermionique

$$\psi(x) = \sum_n \psi_n(x) a_n \quad (1.54)$$

et son hermitien conjugué

$$\psi^\dagger(x) = \sum_n \psi_n^*(x) a_n^\dagger \quad (1.55)$$

satisfont les relations

$$\{\psi(x), \psi(x')\} = \{\psi^\dagger(x), \psi^\dagger(x')\} = 0 \quad \text{et} \quad \{\psi(x), \psi^\dagger(x')\} = \delta(x - x'). \quad (1.56)$$

L'hamiltonien a la même forme que dans le cas scalaire

$$\mathcal{H} = \int d^3x \psi^\dagger(x) H \psi(x) + \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(y) V(|x - y|) \psi(x) \psi(y). \quad (1.57)$$

Les états fermioniques se trouvent en appliquant a_i^\dagger sur le vide $a_i^\dagger a_j^\dagger \dots |0\rangle$ et en tenant compte du principe de Pauli pour lequel si $i = j$ on a $a_i^\dagger a_i^\dagger \dots |0\rangle = 0$.

1.4 Appendix

Introduisons les opérateurs de création et d'annihilation avec les propriétés suivantes :

$$[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0, [a, a^\dagger] = 1. \quad (1.58)$$

Théorème 1.4.1 *Toutes les valeurs propres de $N_b \equiv a^\dagger a$ sont entières et il y a un vecteur qui s'appelle le vecteur du vide avec la propriété :*

$$a|0\rangle = 0. \quad (1.59)$$

Démonstration :

Comme $[a^\dagger a, a] = -a$ et $[a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger$ nous trouvons que $a^\dagger a a|\alpha\rangle = (\alpha - 1)a|\alpha\rangle$ et que $(a^\dagger a)a^\dagger|\alpha\rangle = (\alpha + 1)a^\dagger|\alpha\rangle$. Si α était non entier nous pourrions donc en appliquant a un nombre de fois assez grand à un état $|\alpha\rangle$ trouver un vecteur propre de $a^\dagger a$ avec une valeur propre négative contredisant le théorème précédant. Toutes les valeurs propres de $a^\dagger a$ sont donc entières et il y a un vecteur propre $|0\rangle$ avec sa valeur propre nulle et on a $a|0\rangle = 0$.

Bibliographie

1. *F. Schwabl, Advanced quantum mechanics (QM II) 1997 - 416 pages*