

Plan du cours :

1) Niveaux de Landau

- Tasse de Landau
- densité d'états $\rightarrow$ de Haas - Van Alphen.

2) Gaz 2D - Effet Hall Quantique entier.

- Effet Hall : Conductance, résistance.
- Conductance d'un niveau de Landau rempli
- Disorder effect.

3) Niveaux de Landau - Tasse symétriques

- Fcts d'onde $e^{-|x|^2}$...

4) Effet Hall Quantique fractionnaire

- Laughlin wave - function.
- Fractionalization.

Chapitre 2: Electrons en champ magnétique

I - Niveaux de Landau

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux propriétés des électrons itinérants en présence d'un champ magnétique. C'est un très vaste domaine qu'il est impossible de couvrir en quelques heures. L'objectif de ce chapitre est de discuter 3 effets remarquables: l'effet de Haas-Van Alphen, l'effet Hall Quantique Entier, et l'effet Hall Quantique fractionnaire. Tous ces effets reposent de façon essentielle sur la quantification du mouvement d'une particule chargée en présence d'un champ magnétique uniforme

$$\vec{B} = B \hat{z}.$$

1) Problème classique:

Une particule de charge q est soumise à la force de Lorentz

$$\vec{F} = \frac{q}{c} (\vec{v} \wedge \vec{B}) = \frac{q}{c} B \begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

avec $v_x = \dot{x}$ et $v_y = \dot{y}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = \frac{qB}{c} \dot{y} \\ m \ddot{y} = -\frac{qB}{c} \dot{x} \\ m \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Dans la direction z , c'est le mouvement d'une particule libre.

Dans le plan perpendiculaire au champ, on a :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} = -\omega_c \dot{x} \end{cases}$$

avec $\omega_c = \frac{qB}{mc}$

Ces équations s'intègrent en :

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega_c (y - y_0) \\ \dot{y} = -\omega_c (x - x_0) \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_c^2 (x - x_0) \\ \ddot{y} = -\omega_c^2 (y - y_0) \end{cases}$

Posons $\eta_x = x - x_0$, $\eta_y = y - y_0$. Il vient :

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_x = -\omega_c^2 \eta_x \\ \ddot{\eta}_y = -\omega_c^2 \eta_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \eta_x = r_x \sin(\omega_c t + \varphi_x) \\ \eta_y = r_y \cos(\omega_c t + \varphi_y) \end{cases}$$

Mais $\dot{\eta}_x = r_x \omega_c \cos(\omega_c t + \varphi_x)$ doit être égal à

$$\omega_c \eta_y \Rightarrow \begin{cases} r_x = r_y = r \\ \varphi_x = \varphi_y = \varphi \end{cases}$$

(3)

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + r \sin(\omega_c t + \varphi) \\ y = y_0 + r \cos(\omega_c t + \varphi) \end{cases}$$

Le mouvement de la particule projetée dans le plan est donc un cercle de centre (x_0, y_0) , de rayon r , parcouru à la fréquence $\omega_c = \frac{qB}{mc}$.

A produire la lagrangienne:

Les équations du mouvement peuvent être retrouvées à partir du Lagrangien $\mathcal{L} = L_{xy} + \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2$, avec

$$L_{xy}(x, y; \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{q}{c} [A_x \dot{x} + A_y \dot{y}]$$

où $A_x(x, y)$ et $A_y(x, y)$ sont les composantes d'un vecteur $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, soit

$$B = \partial_x A_y - \partial_y A_x -$$

En effet, les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \right)$$

conduisent à:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(m \dot{x} + \frac{q}{c} A_x \right) - \frac{q}{c} \left[\dot{x} \partial_x A_x + \dot{y} \partial_x A_y \right] = 0 \\ \frac{d}{dt} \left[m \dot{y} + \frac{q}{c} A_y \right] - \frac{q}{c} \left[\dot{x} \partial_y A_x + \dot{y} \partial_y A_y \right] = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$\Rightarrow K B$ indépendant du temps

$$\rightarrow m \ddot{x} + \frac{q}{c} \cancel{\partial_x A_x} + \frac{q}{c} (\dot{x} \cancel{\partial_x A_x} + \dot{y} \partial_y A_x) - \frac{q}{c} \dot{x} \cancel{\partial_x A_x} - \frac{q}{c} \dot{y} \partial_x A_y$$

$$\rightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = \frac{q}{c} \dot{y} (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \\ m \ddot{y} = \frac{q}{c} \dot{x} (\partial_y A_x - \partial_x A_y) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = \frac{qB}{mc} \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{qB}{mc} \dot{x} \end{cases}$$

Formulation Hamiltonienne:

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} + \frac{q}{c} A_x \\ p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} + \frac{q}{c} A_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{m} (p_x - \frac{q}{c} A_x) \\ \dot{y} = \frac{1}{m} (p_y - \frac{q}{c} A_y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_{xy} = \dot{x} p_x + \dot{y} p_y - L_{xy}$$

$$= m \dot{x}^2 + \frac{q}{c} \dot{x} A_x + m \dot{y}^2 + \frac{q}{c} \dot{y} A_y$$

$$- \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{q}{c} [\dot{x} A_x + \dot{y} A_y]$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_{xy} = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$= \frac{1}{2m} \left[\left(p_x - \frac{q}{c} A_x \right)^2 + \left(p_y - \frac{q}{c} A_y \right)^2 \right]$$

Finalement,

$$\boxed{\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2}$$

2) Traitement quantique:

On part de la formulation Hamiltonienne, et on suppose que $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \dots, \hat{p}_x, \hat{p}_y, \dots$ sont des opérateurs satisfaisant:

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

$$\rightarrow \mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(p_x - \frac{q}{c} A_x \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(p_y - \frac{q}{c} A_y \right)^2 + \frac{1}{2m} p_z^2$$

Posons $\Pi_x = p_x - \frac{q}{c} A_x$, $\Pi_y = p_y - \frac{q}{c} A_y$.

Comme A_x et A_y ne dépendent pas de z ,

$$[p_z, \Pi_x] = [p_z, \Pi_y] = 0.$$

Calculons le commutateur $[\Pi_x, \Pi_y]$.

$$[\Pi_x, \Pi_y] = \left[p_x - \frac{q}{c} A_x, p_y - \frac{q}{c} A_y \right]$$

$$= -\frac{q}{c} [p_x, A_y] - \frac{q}{c} [A_x, p_y]$$

$$\text{or, } [p_x, f(x)] \psi(x) = -i\hbar \partial_x (f(x) \psi(x)) + f(x) i\hbar \partial_x \psi(x) \quad (6)$$

$$= -i\hbar \partial_x f(x) \psi(x)$$

$$\rightarrow [p_x, f(x)] = -i\hbar \partial_x f(x)$$

$$\text{Ainsi, } [p_x, A_y] = -i\hbar \partial_x A_y$$

$$[A_x, p_y] = i\hbar \partial_y A_x$$

$$\text{d'où } [\Pi_x, \Pi_y] = \left(-\frac{q}{c}\right)(-i\hbar)(\partial_x A_y - \partial_y A_x)$$

$$\text{soit } \boxed{[\Pi_x, \Pi_y] = i\hbar \frac{qB}{c}}$$

$$\text{Posons } \hat{P} = \hat{\Pi}_x, \quad \hat{Q} = -\frac{c}{qB} \hat{\Pi}_y$$

$$\text{on a : } [\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$$

$$\text{et } H = \frac{1}{2m} \hat{P}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{Q}^2 + \frac{1}{2m} \hat{P}_z^2$$

$$\text{avec } \frac{1}{2m} \hat{\Pi}_y^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 \frac{c^2}{q^2 B^2} \hat{\Pi}_y^2$$

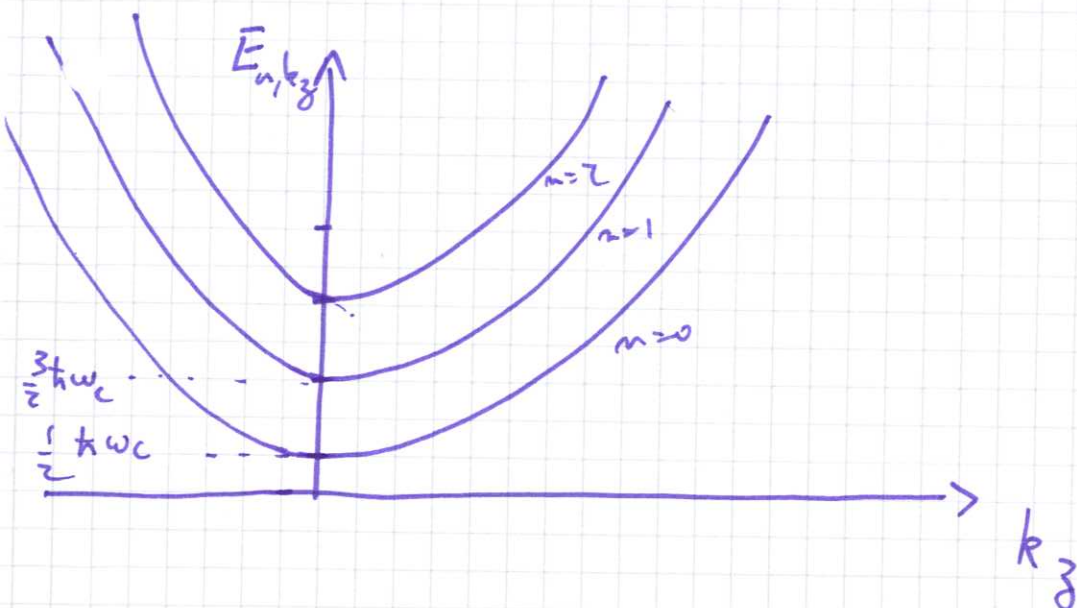
$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{q^2 B^2}{m^2 c^2} \quad \text{soit} \quad \omega = \frac{qB}{mc}$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \frac{1}{2m} \hat{P}^2 + \frac{1}{2} m \omega_c^2 \hat{Q}^2 + \frac{1}{2m} \hat{P}_z^2}$$

l'hamiltonien est donc la somme d'un

oscillateur harmonique de fréquence ω_c et d'un hamiltonien de particule libre dans la direction z - Les énergies propres sont donc de la forme:

$$E_{n,k_z} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$



Chacune de ces courbes constitue un niveau de bande.

Dégénérescence :

(8)

Pour une valeur de k_z donnée, combien doit-il y avoir d'états par niveau ? Pour se faire une idée, considérons le nombre N d'états quantiques dont l'énergie est comprise entre E et $E + \hbar \omega_c$. Pour calculer ce nombre, on écrit que c'est le volume dans l'espace des $\vec{k}$ des points satisfaisant

$$E \leq \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \leq E + \hbar \omega_c \quad (1)$$

divisé par le volume élémentaire par point $\vec{k}$. A zD , dans une boîte $L_x \times L_y$, ce volume élémentaire vaut $\frac{(2\pi)^2}{L_x L_y}$.

Le volume des $\vec{k}$ satisfaisant (1) est 1 surface à zD donnée par :

$$2\pi \int_{k_1}^{k_2} k dk = 2\pi \frac{k_2^2 - k_1^2}{2}$$

avec $E = \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m}$, $E + \hbar \omega_c = \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m}$

$$\rightarrow 2\pi \times \frac{1}{2} \times \frac{2m}{\hbar^2} \hbar \omega_c = \frac{2\pi}{\hbar} \omega_c m$$

$$\Rightarrow N = \frac{2\pi}{\hbar} m \omega_c \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} = L_x L_y \frac{qB}{2\pi \hbar c}$$

Ce nombre est indépendant de E (la densité d'états est constante en dimension 2)

→ C'est 1 bon candidat pour la dégénérescence d'un niveau de Landau.

Pour confirmer ce résultat de façon précise, il faudrait pouvoir calculer le spectre exact sur 1 système avec conditions aux bords périodiques, problème qui n'a malheureusement pas de solution analytique simple.

Par contre, on peut se convaincre que ce résultat est correct en revenant à la solution du problème. Le mouvement dans le plan x, y est décrit par 4 opérateurs : $\hat{x}, \hat{p}_x, \hat{y}, \hat{p}_y$. Nous avons démontré que l'Hamiltonien ne fait intervenir que les opérateurs

$$\Pi_x = p_x - \frac{q}{c} A_x, \quad \Pi_y = p_y - \frac{q}{c} A_y.$$

Il doit donc y avoir deux degrés de liberté qui n'interviennent pas dans l'Hamiltonien. D'après la solution classique, ces degrés de liberté sont :

$$y_0 = y - \frac{1}{\omega_c} \dot{x} \quad \quad \quad x_0 = x + \frac{1}{\omega_c} \dot{y}$$

soit, en version hamiltonienne:

(10)

$$\begin{cases} Y = y - \frac{1}{m\omega_c} \pi_x \\ X = x + \frac{1}{m\omega_c} \pi_y \end{cases}$$

Comme $[x, \pi_x] = [y, \pi_y] = i\hbar$, il vient:

$$\begin{aligned} [X, Y] &= \left[x + \frac{1}{m\omega_c} \pi_y, y - \frac{1}{m\omega_c} \pi_x \right] \\ &= -\frac{1}{m\omega_c} [x, \pi_x] + \frac{1}{m\omega_c} [\pi_y, y] - \frac{1}{m^2\omega_c^2} [\pi_y, \pi_x] \\ &= -\frac{2}{m\omega_c} i\hbar + \frac{1}{m^2\omega_c^2} i\hbar \frac{qB}{c} \\ &= -i \frac{\hbar c}{qB} \end{aligned}$$

Le volume élémentaire de l'espace des phases associé à ces variables est $2\pi \frac{\hbar c}{qB}$ (pour $\vec{x}$ et $\vec{p}$, c'est $2\pi \hbar$, soit $2\pi |[\vec{x}, \vec{p}]|$) - Dans un échantillon de dimension L_x, L_y , le volume total est $L_x L_y$

$$\rightarrow \boxed{\text{deg} = \frac{L_x L_y}{2\pi \hbar c} qB}$$

Densité d'états :

Considérons la densité d'états d'une bande n . Elle est donnée par :

$$n(E) dE = 2 n(k_z) dk_z$$

$$= 2 \times \frac{L_x L_y}{2\pi} \frac{q_B}{\hbar c} \times \frac{L_z}{2\pi} dk_z$$

Mais $E = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$

$$dE = 2 \frac{\hbar^2 k_z}{2m} dk_z$$

$$\rightarrow dk_z = \frac{m}{\hbar^2} \frac{1}{k_z} dE$$

Mais $k_z^2 = \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}) \right)$

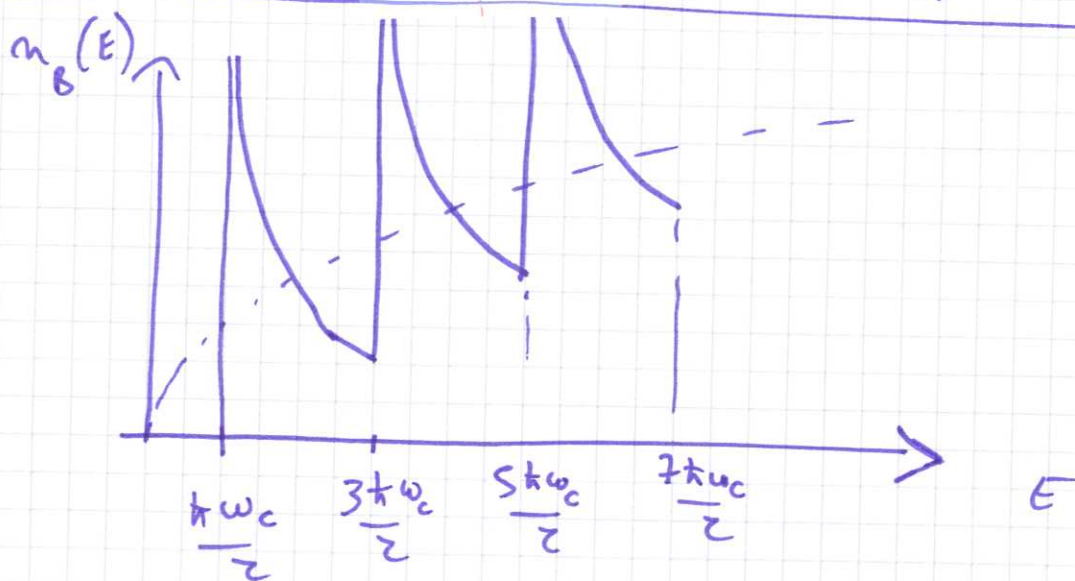
$$\rightarrow dk_z = \frac{m}{\hbar^2} \frac{dE}{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \sqrt{E - \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})}} \quad \text{si } E \gg \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})$$

$$\rightarrow n(E) = \frac{V}{4\pi^2} \frac{q_B}{\hbar c} \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \frac{\Theta(E - \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}))}{\sqrt{E - \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})}}$$

$$= \frac{V}{8\pi^2} \hbar \omega_c \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{\Theta(E - \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}))}{\sqrt{E - \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})}}$$

Finalement, la densité totale, y compris un facteur 2 pour le spin, est donnée par :

$$n_B(E) = \frac{V}{4\pi^2} \hbar \omega_c \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\theta(E - \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}))}{\sqrt{E - \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})}}$$



La courbe en pointillé représente la densité d'états pour $B=0$. Elle est donnée par

$$n(E) = 2 \frac{V}{(4\pi)^2} \left(\frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{E} dE$$

La courbe en présence d'un champ est très différente d'une simple racine carrée. Elle présente des singularités aux énergies $\hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})$.

Ce comportement de la densité d'états est responsable d'un phénomène remarquable : différentes quantités, comme l'aimantation ou la résistance, présente des oscillations en fonction de $\frac{1}{B}$.

En effet, si l'on fait varier B , on obtient 1 nouvelle singularité lorsque $E_F = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})$, soit

$$E_F = \frac{\hbar e B}{m c} (n + \frac{1}{2})$$

$$\text{soit } \frac{1}{B} = \frac{\hbar e}{m c E_F} (n + \frac{1}{2})$$

Si l'on calcule n'importe quelle quantité thermodynamique en fait de $\frac{1}{B}$, elle aura des anomalies régulièrement espacées. Pour les petites valeurs de B , ces anomalies conduisent à 1 comportement régulier qui se traduit par des oscillations en $\frac{1}{B}$. Ces oscillations s'appellent l'effet de Hoas - Van Alphen pour l'aimantation et Shubnikov-de Haas pour la résistance.

Jauge de Landau:

Pour traiter un certain nombre de problèmes, il est utile de connaître les fonctions propres du problème. Pour 1 valeur de k_z donnée, chaque niveau de Landau a 1 deg. d = $L_x L_y \frac{qB}{2\pi\hbar c}$ - Cette dégénérescence conduit à différents choix possibles de base. Une façon commode pour construire des base d'états propres de H_{xy} consiste à choisir une jauge. Deux choix sont particulièrement utiles:

- Jauge de Landau:

$$A_x = -By, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0$$

Dans cette jauge, les directions x et y sont traitées de façon différente. Elle est utile lorsqu'on s'intéresse à 1 problème en géométrie rectangulaire.

- Jauge asymétrique:

$$A_x = -\frac{By}{2}, \quad A_y = \frac{Bx}{2}, \quad A_z = 0$$

Cette jauge conduit à des fonctions d'onde qui se sont révélées capitales pour construire des fonctions d'onde variationnelles pour l'effet Hall quantique fractionnaire.

Jauge de Landau:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(p_x - \frac{q}{c} A_x \right)^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{1}{2m} p_z^2$$

$$= \frac{1}{2m} \left(p_x + \frac{qB}{c} y \right)^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{1}{2m} p_z^2$$

p_x et p_z commutent avec $\mathcal{H}$. On peut donc chercher les fonctions propres sous la forme:

$$\Psi(x, y, z) = e^{ik_x x} e^{ik_z z} \psi(y)$$

$$\rightarrow \frac{1}{2m} \left[\left(\hbar k_x + \frac{qB}{c} y \right)^2 \right] \psi(y) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \psi(y) = E \psi(y)$$

Posons $y_{k_x} = \frac{-\hbar k_x}{qB}$ et $\omega_c = \frac{qB}{mc}$

Il vient:

$$\frac{1}{2} m \omega_c^2 (y - y_{k_x})^2 \psi(y) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \psi(y) = E \psi(y)$$

C'est un oscillateur harmonique décalé de fréquence ω_c .

$$\Rightarrow E_{n, k_x, k_z} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

d'énergie est indépendante de k_x . Cela conduit à la dégénérescence déjà calculée pour les niveaux de Landau. En effet, k_x doit être quantifié en unité de $\frac{2\pi}{L_x}$, et la coordonnée y_{k_x} doit être comprise entre 0 et L_y . (1)

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{2\pi}{L_x} p \frac{1}{qB} \leq L_y$$

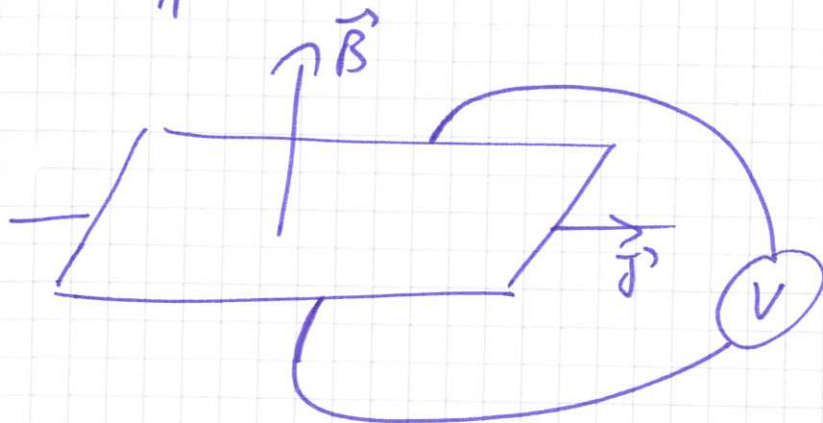
$$\Rightarrow \boxed{p \leq \frac{L_x L_y q B}{2\pi \hbar c}}$$

II - L'effet Hall Quantique entier:

(1)

1) L'effet Hall classique:

L'effet Hall, découvert par Hall en 1879, est le fait que si un échantillon est plongé dans 1 champ magnétique $\vec{B} = B \vec{z}$ et parcouru par un courant $\vec{j} = j \vec{x}$, il apparaît une tension dans la direction $\vec{y}$



Cet effet se comprend dans le cadre d'un modèle de Drude:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -e \left(\vec{E} + \frac{\vec{p}}{m} \wedge \frac{\vec{B}}{c} \right) - \frac{\vec{p}}{\tau}$$

où τ est le temps de relaxation. La solution stationnaire est donnée par $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$, d'où:

$$\begin{cases} -e \left(E_x + \frac{p_y}{mc} B \right) - \frac{p_x}{\tau} = 0 \\ -e \left(E_y - \frac{p_x}{mc} B \right) - \frac{p_y}{\tau} = 0 \end{cases}$$

Réécrivons ces équations à l'aide de la fréquence cyclotron $\omega_c = \frac{eB}{mc}$ et de la conductivité de Drude $\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m}$ - il vient:

$$\begin{cases} \sigma_0 E_x = -n e \frac{P_x}{m} - n e \frac{P_y}{m} (\omega_c \tau) \\ \sigma_0 E_y = n e \frac{P_x}{m} (\omega_c \tau) - n e \frac{P_y}{m} \end{cases}$$

La densité de courant $\vec{j}$ est définie par:

$$\vec{j} = -n e \frac{\vec{p}}{m}$$

Le système précédent s'écrit:

$$\vec{E} = \underline{\underline{g}} \vec{j}$$

$$\text{avec } \underline{\underline{g}} = \frac{1}{\sigma_0} \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \quad R_H = g_{yx} = \frac{-B}{nec}$$

↑
résistance de Hall

Le tenseur de conductivité s'en déduit par inversion: $\sigma = \underline{\underline{g}}^{-1}$.

$$\text{or } \begin{pmatrix} 1 & \omega_c \tau \\ -\omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c \tau \\ \omega_c \tau & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (1 + \omega_c^2 \tau^2)$$

$$\text{d'où } \sigma = \begin{pmatrix} \sigma_L & -\sigma_H \\ \sigma_H & \sigma_L \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \sigma_L = \frac{\sigma_0}{1 + \omega_c^2 \tau^2} \quad \text{et} \quad \sigma_H = \sigma_0 \frac{\omega_c \tau}{1 + \omega_c^2 \tau^2}$$

Si $\tau \rightarrow +\infty$ (pas de diffusion),

$$\underline{\underline{g}} = \begin{pmatrix} 0 & -R_H \\ R_H & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 0 & +1/R_H \\ -1/R_H & 0 \end{pmatrix}.$$

En 1980, Von Klitzing a mesuré l'effet Hall dans 1 gaz d' e^- bidimensionnel. Il a observé des plateaux dans la fonction $\rho_{xy}(B)$ pour des valeurs de R_H :

$$|R_H| = \left(\frac{h}{e^2} \right) \frac{1}{n} \quad , \quad n \text{ entier}$$

Dans ces plateaux, $\rho_{xx} = 0$

$$\rightarrow \boxed{\sigma_H = n \frac{e^2}{h}}$$

Effet Hall ^{Quantique} entier
(Integer Quantum Hall Effect)

En 1983, Tsui, Störmer et Gossard ont découvert des plateaux additionnels à des valeurs rationnelles:

$$\sigma_H = \nu \frac{e^2}{h} \quad , \quad \nu = \frac{p}{q} \quad -$$

C'est l'effet Hall quantique fractionnaire (Fractional Quantum Hall Effect).

L'effet Hall Quantique entier est une conséquence des niveaux de Landau et de la présence de désordre. L'effet Hall Quantique fractionnaire est une conséquence de la répulsion entre électrons.

Terminologie: $\mathcal{H}$ est commode
d'introduire la longueur l_B définie par:

(3 bis)

$$l_B^2 = \frac{\hbar c}{eB}$$

La dégénérescence d'un niveau est
donnée par :

$$\text{deg} = \frac{L_x L_y}{2\pi \hbar c} eB = \frac{L_x L_y}{2\pi l_B^2}$$

Si on définit le flux élémentaire par

$$\Phi_0 = 2\pi l_B^2 B, \text{ on a :}$$

$$\text{deg} = \frac{\Phi}{\Phi_0}.$$

Le remplissage est défini par:

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{N_{el}}{\text{deg}} = \frac{N_{el}}{L_x L_y} \times \frac{2\pi \hbar c}{eB} \\ &= \frac{N_{el}}{L_x L_y} 2\pi l_B^2 \\ &= n_{el} 2\pi l_B^2 \end{aligned}$$

ν = nb d'électrons par élément de
surface correspondant à 1 quantum
de flux.

$\nu = n$ si n niveaux de Landau sont
remplis.

2) Niveaux de Landau et effet Hall :

(4)

Pour discuter l'effet Hall quantique entier reprenons le calcul dans la jauge de Landau avec un champ électrique dans la direction y : $V(y) = -E y$

$$\rightarrow H \rightarrow H + e E y$$

$$= \frac{1}{2m} \left(p_x - \frac{eB}{c} y \right)^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 + e E y$$

On considère de nouveau $\psi(x, y) = e^{ik_x x} \phi(y)$

$$\rightarrow \left[\frac{1}{2m} \left(\hbar k_x - \frac{eB}{c} y \right)^2 + \frac{1}{2m} p_y^2 + e E y \right] \phi(y) = E \phi(y)$$

C'est de nouveau un oscillateur harmonique décalé, mais cette fois le centre de l'oscillateur harmonique dépend du champ électrique :

$$\frac{1}{2m} \left(\hbar k_x - \frac{eB}{c} y \right)^2 + e E y = \frac{1}{2} m \omega_c^2 (y - y_0)^2 + A$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} - \frac{eB}{mc} \hbar k_x y + \frac{1}{2m} \frac{e^2 B^2}{c^2} y^2 + e E y$$

$$= \frac{1}{2} m \omega_c^2 y^2 - m \omega_c^2 y y_0 + \frac{1}{2} m \omega_c^2 y_0^2 + A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{eB}{mc} \hbar k_x + eE = -m\omega_c^2 y_0 \\ \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} = \frac{1}{2} m \omega_c^2 y_0^2 + A \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{-eE}{m\omega_c^2} + \frac{c\hbar k_x}{eB}$$

$$A = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} - \frac{1}{2} m \omega_c^2 y_0^2$$

$$= \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} - \frac{1}{2} m \frac{e^2 B^2}{m^2 c^2} \left[\frac{e^2 E^2}{m^2 \omega_c^4} + \frac{c^2 \hbar^2 k_x^2}{e^2 B^2} - \frac{2eE}{m\omega_c^2} \frac{c\hbar k_x}{eB} \right]$$

$$= -\frac{1}{2} m \frac{e^2 E^2}{m^2 \omega_c^2} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 \frac{2eE}{m\omega_c^2} \frac{c\hbar k_x}{eB}$$

$$= -\frac{1}{2} m \frac{e^2 E^2}{e^2 B^2} c^2 + \frac{1}{2} m \cancel{e} E \frac{c\hbar k_x}{\cancel{e} B}$$

$$= -\frac{1}{2} m c^2 \frac{E^2}{B^2} + c\hbar k_x \frac{E}{B}$$

Mais $eE y_0 = \frac{-e^2 E^2}{m e^2 B^2} m^2 c^2 + c\hbar k_x \frac{eE}{eB}$
 $= -m c^2 \frac{E^2}{B^2} + c\hbar k_x \frac{E}{B}$

Finalement, $A = e E y_0 + \frac{1}{2} m c^2 \frac{E^2}{B^2}$

Les énergies propres sont donc données par

$$E_{n, k_x} = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2}\right) + e E y_{k_x} + \frac{1}{2} m c^2 \frac{E^2}{B^2}$$

avec $y_{k_x} = \frac{c \hbar}{e B} k_x - \frac{e E}{m \omega_c^2}$ ($y_0 \rightarrow y_{k_x}$)

Cette fois, la dégénérescence est levée : l'énergie dépend de k_x .

Calculons le courant porté par chaque état propre.

$$\vec{j} = -e \vec{v} = -e \frac{\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A}}{m}$$

$$\hat{j}_x = -\frac{e}{m} \left(p_x + \frac{e}{c} A_x\right) = -\frac{e}{m} \left(p_x - \frac{e B y}{c}\right)$$

$$\langle n, k_x | \hat{j}_x | n, k_x \rangle = -\frac{e}{m} \hbar k_x + \frac{e^2}{m c} B y_{k_x}$$

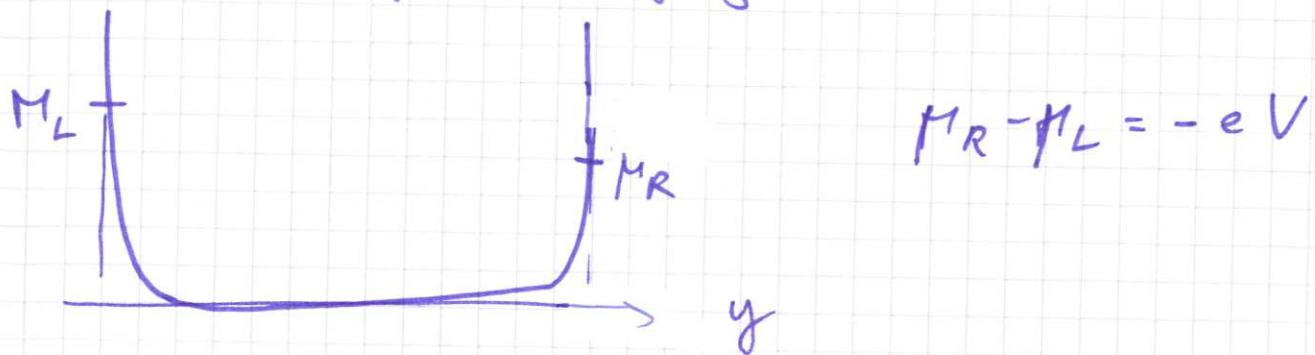
$$= -\frac{e}{m} \hbar k_x + \frac{e^2}{m c} B \frac{c \hbar}{e B} k_x - \frac{e^2}{m c} B \frac{e E}{m \omega_c^2}$$

$$= -\frac{e^2}{m c} B \frac{e E}{m \omega_c^2} = -e c \frac{E}{B}$$

Cette valeur moyenne peut aussi s'obtenir comme

$$\langle \hat{j}_x \rangle = -e \frac{\partial E_{n, k_x}}{\hbar \partial k_x} = -e E \frac{c \hbar}{e B} \frac{1}{\hbar} = -e c \frac{E}{B}$$

Supposons désormais que le potentiel ne soit pas simplement linéaire, mais qu'il confine le gaz d'électrons:



On ne peut plus utiliser le résultat précédent pour j_x , mais on peut écrire:

$$\langle j_x \rangle = -e \frac{\partial \varepsilon_{n,k_x}}{\hbar \partial k_x} \approx -e \frac{\Delta \varepsilon_{n,k_x}}{\hbar \Delta k_x}$$

$$\Delta k_x = \frac{2\pi}{L_x} \rightarrow k_x = \frac{2\pi}{L_x}$$

$$\Rightarrow \langle j_x \rangle \approx -e \frac{L_x}{2\pi\hbar} (\varepsilon_{n,k+1} - \varepsilon_{n,k})$$

$$\Rightarrow \bar{I}_n = \frac{1}{L_x} \sum_{k_x} \langle n, k_x | \underset{j_x?}{v_x} | n, k_x \rangle$$

$$\approx \frac{-e}{2\pi\hbar} \sum_k (\varepsilon_{n,k+1} - \varepsilon_{n,k})$$

$$= \frac{-e}{2\pi\hbar} (\varepsilon_{n,k_{\max}} - \varepsilon_{n,k_{\min}})$$

$$= \mu_R - \mu_L = -eV$$

$$\bar{I}_n = \frac{e^2}{h} V$$

Si n niveaux de Landau sont pleins, la conductance de Hall est donc

$$G_{xy} = n \frac{e^2}{h}$$

Par ailleurs, il n'y a pas de courant dans la direction y : $G_{yy} \rightarrow 0$

On en déduit que

$$G = \begin{pmatrix} 0 & ne^2/h \\ -ne^2/h & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{or } R = \begin{pmatrix} 0 & -h/e^2 n \\ h/e^2 n & 0 \end{pmatrix}$$

Il est instructif de comparer ce résultat au cas classique:

$$R_H = \frac{-B}{n_{el} e c}$$

où n_{el} désigne le nombre d'électrons.

Comme il y a $\frac{L_x L_y e B}{2\pi \hbar c}$ états par niveau de Landau, la densité électronique si n niveaux sont remplis vaut:

$$n_{el} = n \frac{e B}{2\pi \hbar c} = \frac{n e B}{h c}$$

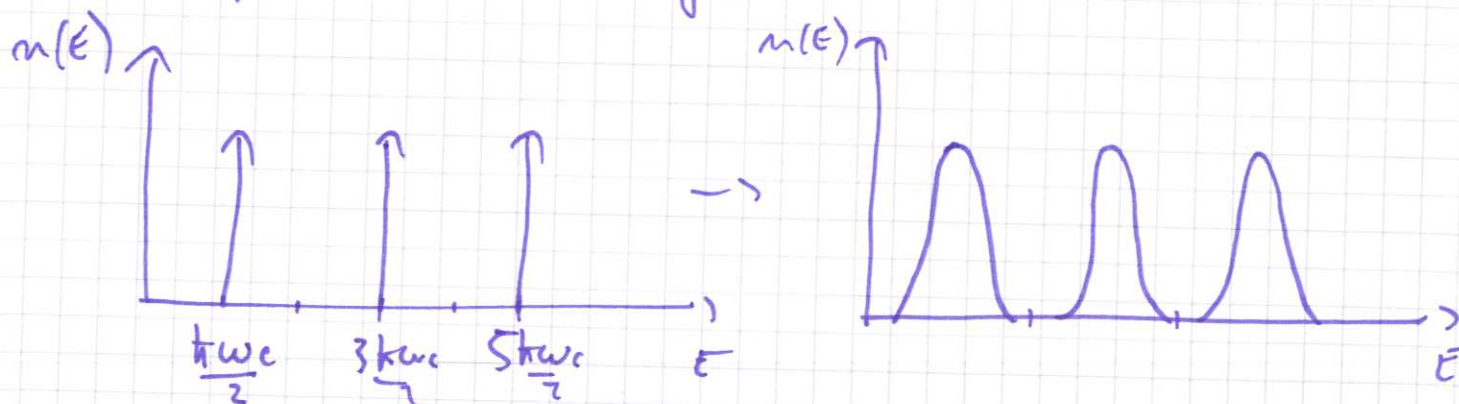
$$\Rightarrow R_H = \frac{-B \hbar c}{n e B e c} = -\frac{\hbar}{n e^2}$$

La résistance de Hall a donc, pour le remplissage correspondant à des niveaux de Landau pleins, la valeur classique - $\frac{e}{h}$ qui est remarquable, c'est que cette valeur est stabilisée sur une gamme de champs. Cela ne peut se comprendre qu'en introduisant le désordre.

3) Effet du désordre :

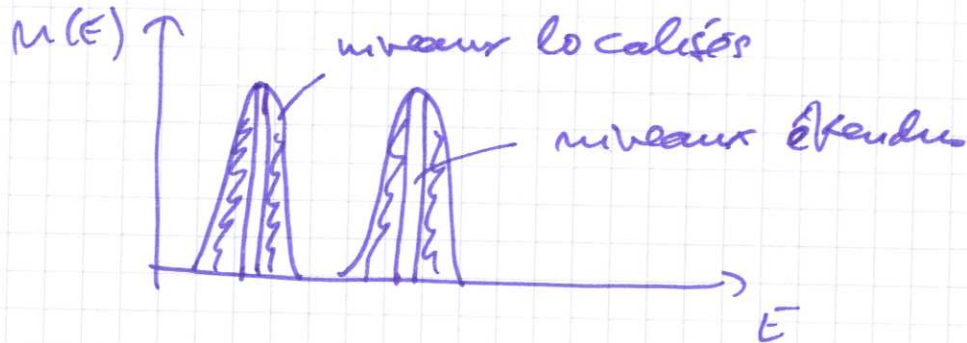
Jusqu'à présent, nous avons considéré que le potentiel était périodique dans la direction x . Dans un échantillon réel, le potentiel n'est bien sûr périodique dans aucune direction. Quel est l'effet du désordre sur la densité d'états ?

Sans désordre, la densité d'états consiste en 1 série de pics δ , de poids $\frac{L_x L_y}{2\pi h c} q B$. En présence de désordre, les pics sont élargis :



La présence de plateaux de R_H ne peut s'expliquer que si la densité d'état d'un niveau de Landau consiste en

des niveaux "localisés" de part et d'autre
de niveaux étendus: (K)



Dans ces conditions, lorsqu'on augmente le champ magnétique peut-être d'une situation où n niveaux de Landau sont remplis, modifier le champ magnétique dans un sens ou dans l'autre modifie la structure des niveaux de Landau de sorte que des états localisés se vident ou se remplissent. Mais ces états localisés ne portent pas de courant. La résistance de Hall ne change donc pas tant que les niveaux étendus ne sont pas atteints.

Pourquoi la densité d'états a-t-elle cette structure? L'image la plus simple consiste à remarquer qu'en présence d'un potentiel, et dans le cas classique, les particules suivent les lignes équipotentielle: comme la force est perpendiculaire à la vitesse, elle ne travaille pas.

Pour un niveau de Landau, qui correspond ⁽¹⁾ à 1 vitesse donnée, les trajectoires d'énergie les plus basses suivent de petites équipotentielles au fond des vallées, celles d'énergies les plus hautes tournent autour des crêtes. Elles sont localisées et donnent naissance à des états quantiques qui ne portent pas de courant.

Entre ces extrêmes, il doit exister des trajectoires qui parcourent tout l'échantillon. Ce sont ces trajectoires qui contribuent à la résistance de Hall.

III - Effet Hall quantique fractionnaire.

1) Introduction:

Considérons de nouveau le cas d'un système sans désordre et sans champ électrique. Si un niveau de Landau est partiellement rempli, le fondamental est dégénéré $\frac{L_x L_y}{2\pi\hbar c} eB$ fois. Mais

les électrons interagissent via la répulsion coulombienne. Cette perturbation doit a priori lever la dégénérescence. Il s'agit d'un problème extrêmement compliqué, qui ne possède pas de solution simple, même approchée.

d'un ans qui s'est imposée est basée sur des fonctions d'onde variationnelles proposées par Laughlin en 1983. Ces fonctions d'onde variationnelles reposent de façon cruciale sur la solution du problème des niveaux de Landau dans la jauge symétrique. Commençons donc par revoir la solution de ce problème, en le formulant dans un langage où la position des particules est représentée par une variable complexe dans le plan, ce qui permettra la généralisation au cas à N particules due à Laughlin.

2) Niveaux de Landau et jauge symétrique:

(2)

On considère donc le cas :

$$A_x = -\frac{By}{z}, \quad A_y = \frac{Bx}{z}, \quad A_z = 0.$$

Nous avons montré de manière générale que l'hamiltonien se met sous la forme :

$$H = \frac{1}{2m} \hat{P}^2 + \frac{1}{2} m \omega_c^2 \hat{Q}^2$$

avec $\hat{P} = \hat{\Pi}_x$, $\hat{Q} = \frac{c}{eB} \hat{\Pi}_y$ ($e = -q$),

et
$$\begin{cases} \hat{\Pi}_x = \hat{p}_x + \frac{e}{c} A_x \\ \hat{\Pi}_y = \hat{p}_y + \frac{e}{c} A_y \end{cases} \quad [\Pi_x, \Pi_y] = -i\hbar \frac{e}{c}$$

Par ailleurs, il y a une dégénérescence supplémentaire liée au fait que les opérateurs

$$\begin{cases} \hat{X} = \hat{x} - \frac{1}{m\omega_c} \Pi_y \\ \hat{Y} = \hat{y} + \frac{1}{m\omega_c} \Pi_x \end{cases}$$

NB : le signe a changé parce que $\omega_c = \frac{eB}{mc} = -\frac{qB}{mc}$

commutent avec l'hamiltonien. En effet,

$$[\hat{X}, \hat{\Pi}_x] = \left[\hat{x} - \frac{1}{m\omega_c} \Pi_y, \Pi_x \right] = i\hbar + \frac{1}{m\omega_c} [\Pi_y, \Pi_x]$$

$$= i\hbar - i\hbar \frac{eB}{c} \frac{1}{m\omega_c} = 0.$$

De même, $[\hat{X}, \Pi_y] = [\hat{Y}, \Pi_x] = [\hat{Y}, \hat{\Pi}_y] = 0.$

De plus,

$$\begin{aligned}
 [\hat{X}, \hat{Y}] &= \left[\hat{x} - \frac{1}{m\omega_c} \Pi_y, \hat{y} + \frac{1}{m\omega_c} \Pi_x \right] \\
 &= \frac{1}{m\omega_c} [\hat{x}, \Pi_x] + \frac{1}{m\omega_c} [\hat{y}, \Pi_y] + \frac{1}{m^2\omega_c^2} [\Pi_x, \Pi_y] \\
 &= \frac{1}{m\omega_c} (i\hbar + i\hbar - i\hbar) = \frac{i\hbar}{m\omega_c} = \frac{i\hbar c}{eB}
 \end{aligned}$$

Il est commode d'introduire la longueur magnétique l_B définie par

$$l_B^2 = \frac{\hbar c}{eB} \Rightarrow l_B = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}$$

et les opérateurs η_x, η_y définis par

$$\begin{cases} m\omega_c \hat{\eta}_x = \Pi_y \\ -m\omega_c \hat{\eta}_y = \Pi_x \end{cases}$$

(ces définitions découlent du traitement classique : $\eta_x = x - x_0$, $\eta_y = y - y_0$, et

$$\dot{x} = -\omega_c (y - y_0), \quad \dot{y} = \omega_c (x - x_0).$$

Le problème peut se réécrire sous la forme:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} m \omega_c^2 (\eta_x^2 + \eta_y^2)$$

$$\text{avec } [\eta_x, \eta_y] = -i l_B^2 \quad [X, Y] = i l_B^2$$

(4)

Introduisons les opérateurs

$$\begin{cases} a = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{l_B} (\eta_x - i \eta_y) & a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{l_B} (\eta_x + i \eta_y) \\ \Rightarrow \eta_x = \frac{l_B}{\sqrt{2}} (a^\dagger + a) & \eta_y = \frac{-i l_B}{\sqrt{2}} (a^\dagger - a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{l_B} (X + i Y) & b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{l_B} (X - i Y) \\ \Rightarrow X = \frac{l_B}{\sqrt{2}} (b^\dagger + b) & Y = \frac{i l_B}{\sqrt{2}} (b^\dagger - b) \end{cases}$$

On vérifie aisément que $[a, a^\dagger] = [b, b^\dagger] = 1$,
et $[a, b] = [a, b^\dagger] = 0$.

L'hamiltonien peut être réécrit sous la forme:

$$H = \hbar \omega_c (a^\dagger a + \frac{1}{2}) + \hbar \omega' (b^\dagger b + \frac{1}{2})$$

avec $\omega' = 0$.

Cela permet de définir la base $|n, m\rangle$ par:

$$|n, m\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} \frac{(b^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} |0, 0\rangle$$

On a bien sûr:

$$\begin{aligned} a^\dagger |n, m\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1, m\rangle, & a |n, m\rangle &= \sqrt{n} |n-1, m\rangle, \\ b^\dagger |n, m\rangle &= \sqrt{m+1} |n, m+1\rangle, & b |n, m\rangle &= \sqrt{m} |n, m-1\rangle. \end{aligned}$$

NB: les opérateurs a^+ et b^+ sont égaux aux opérateurs a_d^+ et a_g^+ vus en exercice si l'on se place dans la jauge symétrique.

Pour trouver les fonctions propres dans une jauge donnée, il suffit d'exprimer les opérateurs a^+, a, b^+, b à l'aide de x, p_x, y, p_y dans cette jauge, et de déterminer la fonction d'onde du fondamental avec $a|0,0\rangle = b|0,0\rangle = 0$.

Avec la notation conventionnelle (pour des particules chargées négativement)

$z = x - i y$, $\bar{\partial} = (\partial_x - i \partial_y)/2$, $z^* = x + i y$, $\partial = (\partial_x + i \partial_y)/2$
il vient:

$$\begin{cases} a = \sqrt{2} \left(\frac{z}{4l_B} + l_B \bar{\partial} \right), & a^+ = \sqrt{2} \left(\frac{z^*}{4l_B} - l_B \partial \right) \\ b = \sqrt{2} \left(\frac{z^*}{4l_B} + l_B \partial \right), & b^+ = \sqrt{2} \left(\frac{z}{4l_B} - l_B \bar{\partial} \right) \end{cases}$$

Etapes de calcul: dans la jauge symétrique,

$$\eta_x = \frac{1}{2} x + \frac{l_B^2}{\hbar} p_y, \quad \eta_y = \frac{1}{2} y - \frac{l_B^2}{\hbar} p_x$$

$$X = x - \eta_x = \frac{1}{2} x - \frac{l_B^2}{\hbar} p_y, \quad Y = y - \eta_y = \frac{1}{2} y + \frac{l_B^2}{\hbar} p_x$$

$$\text{De plus, } m \omega_c = \frac{\hbar}{l_B^2} = \frac{e B}{c}.$$

Un état du premier niveau de Landau satisfait :

$$a |n=0, m\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \left(z + 4\ell_B^2 \bar{\partial} \right) \Phi_{n=0}(z, z^*) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Mais } \bar{\partial} f(z, z^*) &= \frac{1}{2} \left[\partial_x f(z, z^*) - i \partial_y f(z, z^*) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z^*} - i \frac{\partial f}{\partial z} (-i) - i \frac{\partial f}{\partial z^*} (i) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\partial} f(z, z^*) = \frac{\partial f}{\partial z^*}}$$

$$\begin{aligned} \text{De même, } \partial f(z, z^*) &= \frac{1}{2} \left[\partial_x f(z, z^*) + i \partial_y f(z, z^*) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial z^*} + i \frac{\partial f}{\partial z} (-i) + i \frac{\partial f}{\partial z^*} (i) \right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\partial f(z, z^*) = \frac{\partial f}{\partial z}}$$

Considérons la gaussienne $\Psi(z, z^*) = e^{-|z|^2/4\ell_B^2}$

$$\bar{\partial} \Psi(z, z^*) = \frac{\partial}{\partial z^*} (e^{-z z^*/4\ell_B^2}) = -\frac{z}{4\ell_B^2} \Psi(z, z^*)$$

$\Rightarrow \Psi(z, z^*)$ est solution.

Mais pour toute fonction ne dépendant que de z , $\bar{\partial} f(z) = 0$

$\Rightarrow$ la solution générale est $f(z) e^{-|z|^2/4\ell_B^2}$

De même, les états $m=0$ satisfont (7)

$$(z^+ + 4l_B^2 \partial) \phi_{m=0}(z, z^+) = 0$$

dont la solution générale est de la forme

$$g(z^+) e^{-|z|^2/4l_B^2}$$

La fonction d'onde $\phi_{n=0, m=0}$ est donc une gaussienne. Après normalisation, elle s'écrit:

$$\phi_{n=0, m=0}(z, z^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_B} e^{-|z|^2/4l_B^2}$$

On en déduit les autres états par applications successives de a^+ , b^+ . En particulier,

$$\phi_{n=0, m}(z, z^+) = \frac{(\sqrt{2})^m}{\sqrt{2\pi}l_B^2 m!} \left(\frac{z}{4l_B} - l_B \bar{\partial}\right)^m e^{-|z|^2/4l_B^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_B^2 m!} \left(\frac{z}{\sqrt{2}l_B}\right)^m e^{-|z|^2/4l_B^2}$$

$$\text{car } \left(\frac{z}{4l_B} - l_B \bar{\partial}\right) e^{-|z|^2/4l_B^2} = \frac{z}{2l_B} e^{-|z|^2/4l_B^2}$$

De même,

$$\phi_{n, m=0}(z, z^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l_B^2 n!} \left(\frac{z^*}{\sqrt{2}l_B}\right)^n e^{-|z|^2/4l_B^2}$$

Les états correspondant à des $m \neq 0$ pour $n=0$ satisfont

$$\langle \vec{R} \rangle \equiv \langle n=0, m | \vec{R} | n=0, m \rangle = 0$$

$$\begin{aligned} \text{et } \langle |\vec{R}| \rangle &= \langle \sqrt{x^2 + y^2} \rangle = l_B \langle \sqrt{2b^\dagger b + 1} \rangle \\ &= l_B \sqrt{2m+1} \end{aligned}$$

Lorsque m augmente, la particule s'éloigne de l'origine de façon asymétrique.

3) La fonction d'onde de l'état $\nu=1$:

Considérons tout d'abord le cas sans interaction. Un niveau de Landau complètement rempli correspond à 1 fonction d'onde totalement polarisée de spin. Le couplage de Zeeman lève en effet la dégénérescence, et chaque niveau de Landau correspond à 2 niveaux de Landau séparés par $g\mu_B H$.

Comme la partie spin est totalement symétrique, la partie orbitale doit être totalement antisymétrique. Par ailleurs, pour être une solution du problème à 1 variable, les fonctions doivent être de la forme

$$f(z) e^{-|z|^2/4l_B^2}$$

Autrement dit, on cherche une fonction de la forme

$$\Psi_{\nu=1}(\{z_i\}) = f_N(\{z_i\}) e^{\sum_i -|z_i|^2/4l_B^2}$$

où $f_N(\{z_i\})$ est totalement antisymétrique dans l'échange des variables z_i .

Par ailleurs, une base commode des états à 1 particule est donnée par

$$\phi_{n=0,m}(z, z^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} l_B^2 m!} \left(\frac{z}{\sqrt{2} l_B} \right)^m e^{-|z|^2/4l_B^2}$$

où on peut prendre toutes les valeurs de 0 à $N-1$ ($N = \text{deg} = \text{nb d'e}^- \text{ à } \nu=1$).

La fonction $f_N(\{z_i\})$ qui s'écrit simplement dans cette base et qui satisfait ces conditions d'antisymétrie est 1 déterminant de Slater construit à partir des polynômes $z_i^0, z_i^1, \dots, z_i^N$

$$f_N(\{z_i\}) = \begin{vmatrix} z_1^0 & z_1^1 & \dots & z_1^{N-1} \\ z_2^0 & z_2^1 & \dots & z_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_N^0 & z_N^1 & \dots & z_N^{N-1} \end{vmatrix}$$

C'est un déterminant de Vandermonde, qui s'exprime aussi comme :

$$f_N(\{z_i\}) = \prod_{i < j} (z_i - z_j).$$

Cette fonction d'onde est unique. Elle est donc fonction propre de tout hamiltonien d'interaction qui ne mélange pas les niveaux de Landau.

Il est intéressant de calculer la densité.
Comme il s'agit d'un déterminant de Slater, c'est la somme des densités de chaque fonction.
En effet,

$$\hat{\rho}(\mathbf{z}) = \sum_i \delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}_i) \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \rho(\mathbf{z}) = \frac{1}{N!} \sum_P (\text{sgn } P)^2 \sum_i \int d\mathbf{z}_1 \dots d\mathbf{z}_n \delta(\mathbf{z} - \mathbf{z}_i) |\psi_{P(1)}(\mathbf{z}_1)|^2 \dots |\psi_{P(n)}(\mathbf{z}_n)|^2$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_P \sum_i |\psi_{P(i)}(\mathbf{z})|^2$$

$$= \frac{1}{N!} \sum_i \sum_P |\psi_{P(i)}(\mathbf{z})|^2$$

$$= \sum_i |\psi_i(\mathbf{z})|^2$$

Mais $\psi_m(\mathbf{z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi l_B^2}} \frac{1}{\sqrt{m!}} \left(\frac{\mathbf{z}}{\sqrt{2} l_B} \right)^m e^{-|\mathbf{z}|^2/4l_B^2}$

$$\rightarrow \rho(\mathbf{z}) = \left(\sum_m \frac{1}{2\pi l_B^2} \frac{|\mathbf{z}|^{2m}}{m! (2 l_B^2)^m} \right) e^{-|\mathbf{z}|^2/2l_B^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi l_B^2} e^{|\mathbf{z}|^2/2l_B^2} e^{-|\mathbf{z}|^2/2l_B^2}$$

$$\rightarrow \rho(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi l_B^2}$$

La densité est uniforme (et correspond bien sûr à 1 e^- / surface élémentaire).

4) $v < 1$: les fonctions de Laughlin.

(12)

Lorsque le remplissage est inférieur à 1, Laughlin a proposé de généraliser la fonction du cas $v = 1$ de la façon suivante:

$$\Psi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} f(z_i - z_j) e^{-\sum_i |z_i|^2 / 4\ell_B^2}$$

Le préfacteur s'appelle un facteur de Jastrow.

La fonction est contrainte par les conditions suivantes:

- Elle ne fait intervenir que des états du premier niveau de Landau
 $\rightarrow f$ ne dépend pas des z_i^* .

- Ψ est totalement antisymétrique
 $\rightarrow f$ est impair.

- Ψ est un état propre du moment cinétique total puisque, dans la jauge symétrique, le moment cinétique commute avec l'hamiltonien. Mais pour une fonction propre du 1^{er} niveau de Landau, le moment cinétique est proportionnel à m ($L_z = \hbar a^2 b - b^\dagger b$)

$\prod_{i < j} f(z_i - z_j)$ doit donc être un polynôme de degré fixé $\Rightarrow f(z_i - z_j) = (z_i - z_j)^m$.

Finallement, $f(z_i - z_0)$ doit être de la forme $(z_i - z_0)^m$, m impair

$$\Rightarrow \boxed{\Psi_m(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\sum_i |z_i|^2 / 4l_B^2}}$$

Explorons la physique de cette fonction d'onde.

Densité: Comme ce n'est pas un déterminant de Slater, on ne peut pas calculer simplement la densité. Mais un argument simple permet de la déterminer. Pour 1 particule donnée, la puissance la plus élevée est $m(N-1)$. Pour construire cette fonction, on doit donc faire intervenir des états dont le rayon est d'ordre $l_B \sqrt{2m(N-1)+1}$.

Il faut donc considérer un échantillon de taille $\pi l_B^2 (2m(N-1)+1)$

$$= \pi l_B^2 2mN + O(1)$$

La densité est donnée par $\frac{N}{2\pi l_B^2 mN} = \frac{1}{m 2\pi l_B^2}$

$$\Rightarrow \boxed{\nu = \frac{1}{m}}$$

Les fonctions d'onde de Laughlin permettent donc de décrire les densités $\nu = \frac{1}{m}$, m impair.

Energie: Ces fonctions d'onde sont remarquablement bonnes. Pour le comprendre, considérons les autres états de densité $\frac{1}{m}$:

$$\psi(z_1, \dots, z_N) = \prod_{i < j} (z_i + z_j)^{m-p} (z_i - z_j)^p e^{-\frac{1}{2} \sum |z_i|^2}$$

avec p impair. Ces états sont nettement moins bons énergétiquement dès que $p < m$ parce que la probabilité que 2 particules soient proches est plus grande. Or, l'interaction coulombienne est répulsive $\rightarrow$ elle est favorisée pour les grandes valeurs de p .

En fait, le seul concurrent sérieux est le cristal de Wigner, une fonction qui brise la symétrie de translation et localise les électrons pour former un réseau triangulaire. En comparant l'énergie coulombienne calculée dans ces deux types d'état, on peut démontrer que le cristal de Wigner est stable pour $r \leq \frac{1}{2}$, alors que les états de Laughlin sont stables pour $\frac{1}{7} \leq r \leq 1$.

Excitations : Si l'on rajoute un électron au système, cela coûte une énergie finie.

Pour s'en convaincre, on remarque que, dans la fonction de Houghlin, le moment cinétique relatif de deux particules est égal à m . Envisageons l'énergie potentielle entre deux particules sous la forme

$$V(i,j) = \sum_{m'=0}^{+\infty} \sum_{i < j} N_{m'} P_{m'}(i,j)$$

où $P_{m'}(i,j)$ est le projecteur sur l'espace de moment cinétique m' . Si on suppose que $N_{m'} \rightarrow 0$ si $m' > m$, alors la fonction $\psi_{1/m}$ est état propre de $V = \sum_{i < j} V(i,j)$

$$\hat{V} \psi_{1/m} = 0$$

Si l'on essaie de rajouter une particule, on ne peut pas rester dans un état où toutes les paires ont un moment cinétique relatif m (cela supposerait qu'on soit de l'ordre d'attribution). On peut se convaincre qu'il faut nécessairement créer des paires de moment cinétique $< m$. Cela coûte une énergie finie. Il y a donc un gap de charge. Cette propriété reste vraie si l'on incorpore les termes de $V(i,j)$ avec $m' > m$, termes que l'on peut traiter en perturbation.

La présence d'un gap est indispensable pour comprendre la présence d'un plateau : c'est parce qu'il est impossible de rajouter une particule pour un coût énergétique infinitésimal que $\sigma_{xx} = \rho_{xx} = 0$, une condition nécessaire pour l'apparition d'un plateau (comme dans le cas d'un niveau de Landau complètement rempli). Cette condition n'est néanmoins pas suffisante, et il faut à nouveau évoquer le désordre pour expliquer la valeur constante de R_H autour de $r = \frac{1}{m}$.

Charge fractionnaire :

Réfléchissons maintenant aux excitations que l'on peut faire sans changer le nombre de particules. Les simples excitations électron-trou sont des modifications très profondes de la fonction d'onde. On peut faire des modifications plus simples de la façon suivante :

$$\psi_{1/m}^{(1)} = \prod_j \delta \psi_{1/m}$$

Dans cette fonction, le polynôme est de degré $\gg 1$ dans chaque variable $\rightarrow$ le niveau $m=0$ n'est pas utilisé.

On peut de même créer $\psi_{1/m}^{(j)}$ pour $j \leq m$, en créant m excitations du même type. (17)

Pour $j = m$, la fonction d'onde s'écrit

$$\psi_{1/m}^{(m)} = \prod_j z_j^m \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m e^{-\frac{\Gamma}{4} \sum_j |z_j|^2 / 4 l_B^2}$$

$$= \psi_{1/m} (z_0 = 0, z_1, \dots, z_m)$$

C'est la fonction de Laughlin à $\nu = 1/m$ avec une particule en $z_0 = 0$. La fonction d'onde $\psi_{1/m}^{(m)}(z_1, \dots, z_m)$ correspond donc

à 1 état où il y a un trou de charge e . Mais cette excitation est en fait composée de m excitations élémentaires, qui consistent à multiplier la fonction d'onde par $\prod_j z_j$. Chacune de ces excitations

porte une charge $\frac{e}{m}$. C'est l'une des prédictions les plus remarquables de Laughlin, qui a été vérifiée dans des mesures de bruit.

Généralisations :

Les fonctions d'onde de Laughlin permettent d'expliquer les plateaux $\nu = \frac{1}{m}$, m impair. Or, d'autres plateaux ont été observés, notamment à $\frac{2}{5}$. Différentes approches ont été suggérées pour généraliser la théorie de Laughlin. La plus prometteuse est celle due à Jain, qui consiste à construire des états de Laughlin en utilisant les niveaux de bandes supérieures, et à ne projeter dans le 1^{er} niveau de bande. Une discussion détaillée de cette construction nous amènerait trop loin. On retiendra simplement que cette approche rend plausible l'existence de plateaux à

$$\nu = \frac{m}{2np \pm 1}$$

(n, p entiers)!

Appendice :

Moment cinétique:

$$\hat{L}_z = \hat{x} \hat{p}_y - \hat{y} \hat{p}_x$$

$$l_B^2 = \frac{\hbar c}{eB} = \frac{mc}{eB} \frac{\hbar}{m}$$
$$\omega_c = \frac{eB}{mc} = \frac{\hbar}{m\omega_c}$$

$$\begin{cases} \Pi_x = p_x - \frac{e}{2c} B y \\ \Pi_y = p_y + \frac{e}{2c} B x \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{X} = \hat{x} - \frac{1}{m\omega_c} \Pi_y \\ \hat{Y} = \hat{y} + \frac{1}{m\omega_c} \Pi_x \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\omega_c \hat{X} = m\omega_c \hat{x} - \Pi_y \\ m\omega_c \hat{Y} = m\omega_c \hat{y} + \Pi_x \end{cases}$$

$$m\omega_c \hat{x}$$

$$\frac{eB}{2c} = \frac{1}{2} m\omega_c$$

$$\hat{x} = X + \frac{1}{m\omega_c} \Pi_y$$

$$\hat{y} = Y - \frac{1}{m\omega_c} \Pi_x$$

$$p_x = \Pi_x + \frac{eB}{2c} y = \Pi_x + \frac{1}{2} m\omega_c y$$

$$= \Pi_x + \frac{1}{2} m\omega_c Y - \frac{1}{2} \Pi_x$$

$$= \frac{1}{2} m\omega_c Y + \frac{1}{2} \Pi_x$$

$$p_y = \Pi_y - \frac{eB}{2c} x = \Pi_y - \frac{1}{2} m\omega_c X - \frac{1}{2} \Pi_y$$

$$= -\frac{1}{2} m\omega_c X + \frac{1}{2} \Pi_y$$

(2)

$$\begin{aligned}
 x p_y - y p_x &= \left(X + \frac{1}{m\omega_c} p_y \right) \left(-\frac{1}{2} m\omega_c X + \frac{1}{2} p_y \right) \\
 &\quad - \left(Y - \frac{1}{m\omega_c} p_x \right) \left(\frac{1}{2} m\omega_c Y + \frac{1}{2} p_x \right) \\
 &= -\frac{1}{2} m\omega_c X^2 + \frac{1}{2 m\omega_c} p_y^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} m\omega_c Y^2 + \frac{1}{2 m\omega_c} p_x^2
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} m\omega_c \left[-(X^2 + Y^2) + (\hat{y}_x^2 + \hat{y}_y^2) \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \frac{\hbar}{l_B^2} \left[-\frac{l_B^2}{2} (b^\dagger + b)^2 + \frac{l_B^2}{2} (b^\dagger - b)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{l_B^2}{2} (a^\dagger + a)^2 - \frac{l_B^2}{2} (a^\dagger - a)^2 \right]
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left[-b^\dagger b - b b^\dagger + a^\dagger a + a a^\dagger \right]$$

$$= \hbar \left[a^\dagger a + \frac{1}{2} - b^\dagger b - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \hbar [a^\dagger a - b^\dagger b]$$

(3)

$$\begin{cases} \vec{R}_{CM} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2} \\ \vec{P}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \end{cases}$$

$$\vec{R}_{rel} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

$$\vec{P}_{rel} = \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}_2}{2}$$

$$\rightarrow \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_{CM} + \vec{L}_{rel}$$

$$\vec{L}_{CM} = \vec{R}_{CM} \wedge \vec{P}_{CM},$$

$$\vec{L}_{rel} = \vec{R}_{rel} \wedge \vec{P}_{rel}$$

$$L_{rel}^z = -\frac{m\omega_0}{4} \left\{ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (y_1^x - y_2^x)^2 - (y_1^y - y_2^y)^2 \right\}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left\{ a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 - a_1^\dagger a_2 - a_1 a_2^\dagger - b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2 + b_1^\dagger b_2 + b_1 b_2^\dagger \right\}$$

$$L_{CM}^z = -\frac{m\omega_0}{4} \left\{ (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 - (y_1^x + y_2^x)^2 - (y_1^y + y_2^y)^2 \right\}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left\{ a_1^\dagger a_1 + a_2^\dagger a_2 + a_1^\dagger a_2 + a_1 a_2^\dagger - b_1^\dagger b_1 - b_2^\dagger b_2 - b_1^\dagger b_2 - b_1 b_2^\dagger \right\}$$

$$L_{rel}^z + L_{CM}^z = L_1^z + L_2^z$$

$$L_1^z = \hbar (a_1^\dagger a_1 - b_1^\dagger b_1) \quad L_2^z = \hbar (a_2^\dagger a_2 - b_2^\dagger b_2)$$

$$L_{rel}^z = \frac{\hbar}{2} \left[(a_1^\dagger - a_2^\dagger)(a_1 - a_2) - (b_1^\dagger - b_2^\dagger)(b_1 - b_2) \right]$$

$$L_{cm}^z = \frac{\hbar}{2} \left[(a_1^\dagger + a_2^\dagger)(a_1 + a_2) - (b_1^\dagger + b_2^\dagger)(b_1 + b_2) \right]$$

$$\rightarrow L_{rel}^z = \hbar \left[\alpha_-^\dagger \alpha_- - \beta_-^\dagger \beta_- \right]$$

$$L_{cm}^z = \hbar \left[\alpha_+^\dagger \alpha_+ - \beta_+^\dagger \beta_+ \right]$$

$$\alpha_-^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^\dagger - a_2^\dagger)$$

$$\beta_-^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_1^\dagger - b_2^\dagger)$$

$$\alpha_+^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1^\dagger + a_2^\dagger)$$

$$\beta_+^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (b_1^\dagger + b_2^\dagger)$$

$$\psi = (z_1 + z_2)^M (z_1 - z_2)^m e^{-\sum_i |z_i|^2 / 4l_B^2}$$

$$\propto (\beta_+^\dagger)^M (\beta_-^\dagger)^m |0\rangle$$

Si on considère le moment cinétique dans la direction $-z$,

$$\tilde{L}_{rel}^z |\gamma\rangle = m \quad (h=1)$$

$$\tilde{L}_{cm}^z |\gamma\rangle = M \quad (h=1)$$

$$\tilde{L}_{tot}^z |\gamma\rangle = M + m \quad (h=1)$$

Suprafluidité de l'hélium 4

I - Introduction:

A suffisamment basse température, tous les liquides deviennent solides sauf deux: les deux isotopes de l'hélium: l'hélium 4 (${}^4\text{He}$) et l'hélium 3 (${}^3\text{He}$). Ils deviennent liquides à 4.2 K (${}^4\text{He}$) et 3.2 K (${}^3\text{He}$). La raison de ce comportement vient des fluctuations de point zéro. Si l'on forme un solide à partir d'hélium en mettant les atomes à la distance qui minimise l'énergie à 2 corps, les fluctuations de point zéro sont telles que le solide n'est pas stable.

Si l'on baisse la température dans la phase liquide, l'hélium 4 subit une transition de phase à 2.17 K, avec une très forte anomalie de chaleur spécifique (1927). Il a été démontré par Kapitza (1938) que la phase basse température n'a rigoureusement aucune viscosité: c'est une phase "suprafluide".

On a cru longtemps que l'hélium 3 restait un simple liquide jusqu'à $T=0$ jusqu'en 1971, année où la suprafluidité de l'hélium 3 a été découverte à 2 mK (1000 fois plus bas que pour l'hélium 4).

La différence fondamentale entre les deux isotopes, c'est que ^4He est un boson (2 neutrons + 2 protons $\rightarrow$ spin 0) alors que ^3He est 1 fermion (2 protons + 1 neutron $\rightarrow$ spin $1/2$). En effet, l'hélium 4 peut subir une condensation de Bose-Einstein (1925), alors que l'hélium 3 se comporte comme des fermions. Cela n'empêche pas une transition vers un état suprafluide, mais à condition que les atomes d'hélium 3 forment des "paires" et se transforment en bosons. Le mécanisme de la suprafluidité de l'hélium 3 est apparenté à la supraconductivité, qui sera discutée dans le chapitre suivant. Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur les propriétés de l'hélium 4.

II - Condensation de Bose-Einstein:

(3)

Considérons un gaz de bosons sans interactions. Les fonctions propres à une particule sont des ondes planes $\psi_{\vec{k}}$ d'énergie $E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, et le fondamental correspond à $\vec{k} = \vec{0}$. Si le système comprend N particules, le fondamental est:

$$\psi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \psi_{\vec{k}=\vec{0}}(\vec{r}_1) \dots \psi_{\vec{k}=\vec{0}}(\vec{r}_N).$$

A haute température, les bosons se répartissent suivant la statistique de Bose-Einstein:

$$n_{\vec{k}} = \frac{1}{e^{\beta(E_{\vec{k}} - \mu)} - 1}, \quad \beta = k_B T$$

$$\text{et } N = \sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{e^{\beta(E_{\vec{k}} - \mu)} - 1}$$

Dans cette équation, le potentiel chimique doit rester < 0 pour que $n_{\vec{k}}$ soit positif.

Considérons un système de densité fixée $n = \frac{N}{V}$. On a donc:

$$n = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{k}}{e^{\beta(E_{\vec{k}} - \mu)} - 1}$$

Cette équation définit une relation implicite entre μ et $\beta = \frac{1}{k_B T}$. Lorsque la température baisse, β augmente. Pour que la densité reste constante, il faut que μ augmente. Mais μ est au plus $= 0$. Cette valeur est atteinte s'il existe une température T_c telle que

$$n = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{e^{\epsilon_k/k_B T_c} - 1}$$

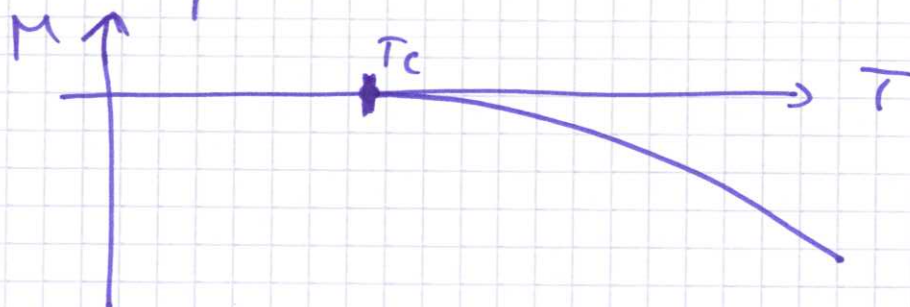
Or, il doit nécessairement exister une telle température puisque cette intégrale part de 0 quand $T \rightarrow 0$ et $\rightarrow +\infty$ quand $T \rightarrow +\infty$. En effet,

$$n = \frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{+\infty} \frac{k^2 dk}{e^{\frac{\hbar^2 k^2}{2mk_B T}} - 1}$$

$$u = \frac{k}{\sqrt{T}}$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} (\sqrt{T})^3 \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{u^2 du}{e^{\frac{\hbar^2 u^2}{2mk_B}} - 1}}_{= C}$$

Finalement, le potentiel chimique a le comportement suivant:



En dessous de T_c , l'équation

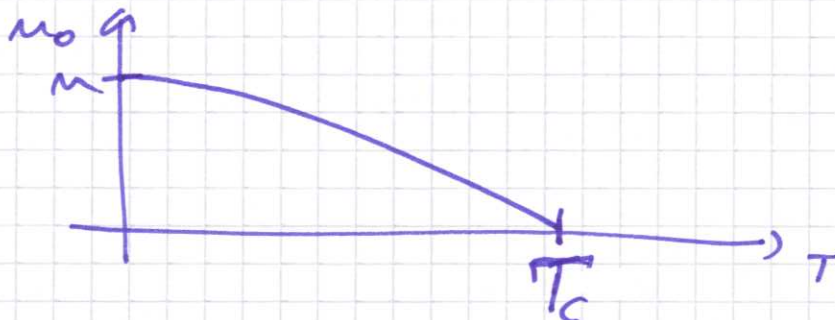
$$n = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{e^{\epsilon_{\vec{k}}/k_B T} - 1}$$

ne peut plus être satisfaite. Il faut supposer que le mode $\vec{k}=\vec{0}$ contient un nombre d'électrons macroscopique :

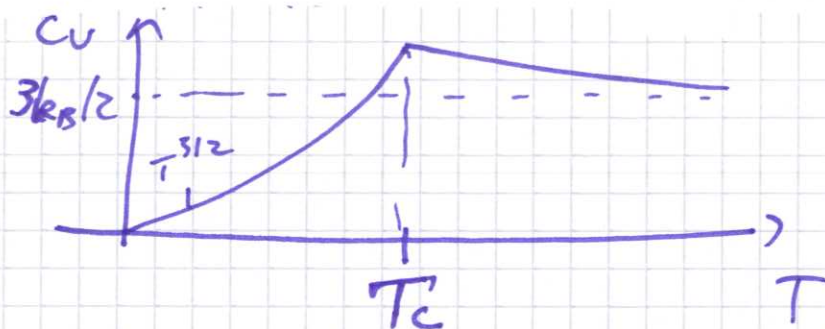
$$N = N_{\vec{k}=\vec{0}} + \frac{V}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{e^{\epsilon_{\vec{k}}/k_B T} - 1}$$

ou encore
$$n = n_0 + \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{e^{\epsilon_{\vec{k}}/k_B T} - 1}$$

La densité de ce condensat part de 0 à T_c et tend vers n à $T=0$.



A la température critique, la chaleur spécifique ne diverge pas, mais présente une rupture de pente :

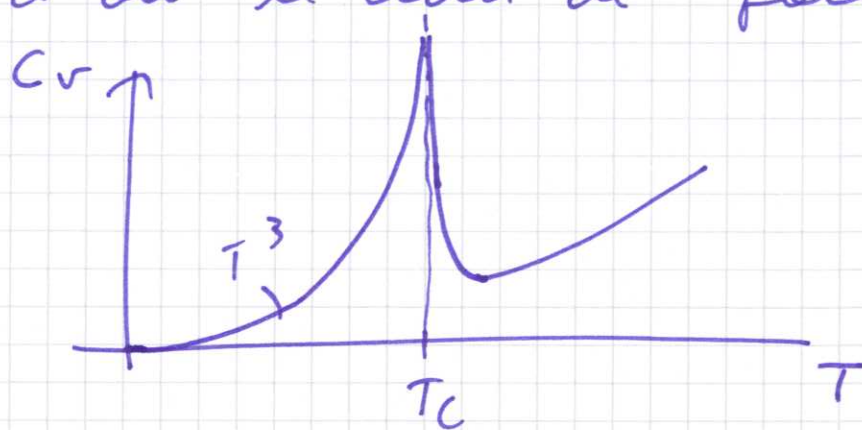


La transition à 2.17K de l'hélium 4 est-elle une simple condensation de Bose?

III - La phase superfluide de l'hélium 4

6

La transition de phase à 2.17 K n'est pas en accord avec la chaleur spécifique pour une transition de type BEC - En effet, la chaleur spécifique diverge à T_c , avec une forme particulière qui ressemble à un λ , d'où le nom de "point λ ".



De part et d'autre de la transition, C_v diverge avec un exposant $- \alpha$:

$$C_v \propto |T - T_c|^{-\alpha}$$

avec $\alpha \approx 0.01$, en accord avec la classe d'universalité du modèle XY en 3D.

Par ailleurs, l'existence d'un condensat ne permet pas d'expliquer à elle seule la superfluidité de l'hélium 4.

1) Condensation de Bose et suprafluidité:

⑦

Considérons un gaz de bosons sans interactions. Il est décrit par le hamiltonien :

$$\mathcal{H} = \sum_k \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a_k^\dagger a_k = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k$$

où les opérateurs $a_k^\dagger, a_k$ sont des opérateurs de bosons.

Démontrons par l'absurde que ce gaz n'est pas suprafluide. S'il était suprafluide, il pourrait se déplacer à vitesse constante dans un tube sans aucune viscosité, c'est-à-dire sans que les particules ne soient affectées par les parois. Dans le référentiel lié au fluide, les parois du tube apparaissent comme une perturbation dépendant du temps. Une particule ne pourra subir de choc élastique que si

$$\tilde{E}_f = \tilde{E}_i$$

où $\tilde{E}$ est l'énergie dans le référentiel lié au suprafluide. S'il se déplace à la vitesse $\vec{v}$, on a :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_k &= \frac{1}{2m} (\hbar \vec{k} - m \vec{v})^2 \\ &= \frac{1}{2m} \hbar^2 k^2 - \hbar \vec{k} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} m v^2 \end{aligned}$$

ou encore

$$\tilde{\epsilon}_{\vec{k}} = \epsilon_{\vec{k}} - \hbar \vec{k} \cdot \vec{v} + \frac{1}{2} m v^2$$

Si une particule subit une collision élastique de $\vec{k}_i$ vers $\vec{k}_f$, on a donc:

$$\epsilon_{\vec{k}_f} - \epsilon_{\vec{k}_i} = (\hbar \vec{k}_f - \hbar \vec{k}_i) \cdot \vec{v}$$

Si la particule est dans le condensat, $\vec{k}_i \rightarrow 0$, et on pourra créer une excitation d'impulsion $\vec{p}$ si

$$\epsilon_{\vec{p}} = \vec{p} \cdot \vec{v}$$

Pour un gaz de bosons sans interaction, $\epsilon_{\vec{p}} = \frac{p^2}{2m}$, et l'équation s'écrit:

$$\frac{p^2}{2m} = \vec{p} \cdot \vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{p} \cdot (\vec{p} - 2m\vec{v}) = 0$$

$$\text{Posons } \vec{p} = m\vec{v} + \vec{q}$$

$$\Rightarrow (\vec{q} + m\vec{v}) \cdot (\vec{q} - m\vec{v}) = 0$$

$$\Rightarrow q^2 - m^2 v^2 = 0$$

$$\Rightarrow q = m v$$



$\Rightarrow \vec{p} = m\vec{v} + \vec{q}$ avec $\|\vec{q}\| = m\|\vec{v}\|$
 d'extrémité de $\vec{p}$ est sur la sphère passant

par l'origine : il y a des solutions même⁹ si $\vec{p}$ est très petit. Un condensat de Bose de particules sans interaction peut donc subir des collisions élastiques pour une vitesse $\vec{v}$ arbitrairement petite. Il n'est donc pas superfluide.

Une condition suffisante serait que l'équation

$$\epsilon_{\vec{p}} = \vec{p} \cdot \vec{v}$$

n'ait pas de solution pour $\vec{v}$ suffisamment petit. En particulier, ce serait le cas si, au lieu de $\epsilon_{\vec{p}} = \frac{p^2}{2m}$, les excitations avaient une dispersion du type :

$$\epsilon_{\vec{p}} = c |\vec{p}|$$

Dans ce cas, il n'y aurait aucune collision élastique possible depuis le condensat tant que $\|\vec{v}\| < c$. Nous allons démontrer que c'est effectivement le cas pour des bosons en interactions faibles.

2) Le modèle de Bogolioubov :

(10)

Bogolioubov a proposé de décrire l'interaction par un potentiel à 2 corps $V(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$, et de le traiter comme une petite perturbation. En seconde quantification l'hamiltonien s'écrit :

$$\mathcal{H} = \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2} \sum_{k, k', q} V_q a_{k+q}^\dagger a_{k-q}^\dagger a_{k'} a_{k'}$$

avec $\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ et $V_q = \int e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} V(\vec{r}) d\vec{r}$

Le fondamental non perturbé est donné par $|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N!}} (a_0^\dagger)^N |0\rangle = |N\rangle$

Par ailleurs, $a_0^\dagger |N\rangle = \sqrt{N+1} |N+1\rangle$
 et $a_0 |N\rangle = \sqrt{N} |N-1\rangle$

Si l'on se contente d'une théorie de perturbation au 1^{er} ordre, on a un problème. En effet,

$$|\Psi_0\rangle \rightarrow |\Psi_0\rangle + \sum_n \langle n | \hat{V} | \Psi_0 \rangle |n\rangle$$

et lorsqu'on applique $\hat{V}$ sur $|\Psi_0\rangle$, on trouve 0 sauf si $k = k' = 0$

$$\rightarrow |\Psi_0\rangle \rightarrow |\Psi_0\rangle + \frac{1}{2} \sum_q V_q a_q^\dagger a_{-q}^\dagger \underbrace{\sqrt{N} \sqrt{N-1}}_{\text{}} |N-2\rangle$$

Les éléments de matrices sont d'ordre N

→ on ne peut pas s'arrêter au 1^{er} ordre.

L'idée de Bogolioubov est de remplacer cette approche par une approche variationnelle où la fonction d'onde est le produit d'un condensat et d'une fonction d'onde décrivant le gaz d'excitations:

$$|\Psi_{\{n_k\}}\rangle = \prod_k (a_k^\dagger)^{n_k} |\text{cond}\rangle$$

où $|\text{cond}\rangle$ a un nombre de particules

N_0 macroscopique mais plus petit que

N . Si l'on choisit pour $|\text{cond}\rangle$ un

état à nombre de particules fixé, cette

base est catastrophique : les éléments

de matrice de $a_q^\dagger a_{-q}^\dagger a_0 a_0$, qui

correspondent aux processus dominants,

seraient nuls. Pour que cette base

variationnelle soit un bon point de

départ, il faut que $|\text{cond}\rangle$ mélange

des états à nombre de particules différents.

Le seul choix qui conduit à des calculs simples est de prendre pour (cond) un état cohérent: (12)

$$|z\rangle = e^{-|z|^2/2} e^{za_0^\dagger} |0\rangle \quad z \in \mathbb{C}.$$

En effet, $a_0 |z\rangle = z |z\rangle$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} a_0 e^{za_0^\dagger} |0\rangle &= a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n (a_0^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \frac{a_0 (a_0^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \end{aligned}$$

$$\text{Mais } [a, (a^\dagger)^n] = n(a^\dagger)^{n-1}$$

(se démontre par récurrence).

$$\text{Ainsi, } a_0 (a_0^\dagger)^n |0\rangle = n (a_0^\dagger)^{n-1} |0\rangle + \underbrace{(a_0^\dagger)^n a_0 |0\rangle}_{=0}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow a_0 e^{za_0^\dagger} |0\rangle &= \sum_{n=1}^{+\infty} z^n \frac{n (a_0^\dagger)^{n-1}}{n!} |0\rangle \\ &= z \sum_{n=1}^{+\infty} z^{n-1} \frac{(a_0^\dagger)^{n-1}}{(n-1)!} |0\rangle \\ &= z e^{za_0^\dagger} |0\rangle \end{aligned}$$

$$\text{Du coup, } \langle z | a_0^\dagger a_0 | z \rangle = |z|^2$$

$$\langle z | a_0 a_0 | z \rangle = z^2$$

$$\langle z | a_0^{\dagger m} a_0^n | z \rangle = z^{*m} z^n$$

(13)

Dans cette base, les éléments de matrice de $\hat{V}$ sont obtenus en remplaçant a_0^+ par z^+ et a_0 par z . Comme $|z|^2$ est égal à N_0 supposé très grand, les excitations seront dominées par les termes contenant deux opérateurs a_0 ou a_0^+ . En effet, le terme $a_0^+ a_0^+ a_0 a_0$ est une constante, et par conservation de l'impulsion il n'y a pas de terme à 3 opérateurs.

En conf., avec $z = \sqrt{N_0}$, le terme d'interaction se décompose en 7 termes.

$$1) \quad k+q = k'-q = k'=k=0 \rightarrow \frac{1}{2} V_0 N_0^2$$

$$2) \quad k+q = k'-q=0 \rightarrow \frac{1}{2} \sum_q V_q N_0 a_q a_{-q}$$

$$3) \quad k = k'=0 \rightarrow \frac{1}{2} \sum_q V_q N_0 a_q^+ a_{-q}^+$$

$$4) \quad k+q = k'=0 \rightarrow \frac{1}{2} \sum_q V_q N_0 a_{-q}^+ a_{-q}$$

$$5) \quad k+q = k=0 \rightarrow \frac{1}{2} \sum_{k'} V_0 N_0 a_{k'}^+ a_{k'}$$

$$6) \quad k'-q = k=0 \rightarrow \frac{1}{2} \sum_q V_{-q} N_0 a_q^+ a_q$$

$$7) \quad k'-q = k'=0 \rightarrow \frac{1}{2} \sum_k V_0 N_0 a_k^+ a_k$$

Si on considère un potentiel de contact (14)
 $V(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = V \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$, $V_q = V$, et l'hamiltonien s'écrit:

$$\mathcal{H} = \sum_{k \neq 0} \varepsilon_k a_k^\dagger a_k + \frac{N_0 V}{2} \sum_{k \neq 0} (a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_{-k} + 4 a_k^\dagger a_k) + \frac{1}{2} N_0^2 V$$

Cet hamiltonien a la même forme que celui obtenu pour décrire les spins de spin dans les systèmes antiferromagnétiques. Il peut être diagonalisé par une transformation de Bogolioubov:

$$\alpha_k = u_k a_k + v_k a_{-k}^\dagger$$

Pour cela, on le réécrit (voir page 14 bis):

$$\mathcal{H} = \sum_{k \neq 0} [A_k a_k^\dagger a_k + B_k (a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_{-k})] + C$$

$$\begin{cases} A_k = \varepsilon_k + N V \\ B_k = \frac{N V}{2} \\ C = \frac{1}{2} N^2 V \end{cases}$$

On cherche α_k tel que $[\mathcal{H}, \alpha_k] = -\omega_k \alpha_k$

$$\text{Or, } [\mathcal{H}, a_k] = A_k [a_k^\dagger a_k, a_k] + B_k [a_k^\dagger a_{-k}^\dagger, a_k] + B_{-k} [a_{-k}^\dagger a_k^\dagger, a_k]$$

Then N_0 is related to N per:

$$N = N_0 + \sum_k a_k^\dagger a_k$$

$$\rightarrow N_0 = N - \sum_k a_k^\dagger a_k$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} N_0^2 V = \frac{1}{2} V \left(N - \sum_k a_k^\dagger a_k \right)^2$$

$$\simeq \frac{1}{2} V N^2 - V N \sum_k a_k^\dagger a_k$$

$$\rightarrow \mathcal{H} \simeq \sum_{k \neq 0} (\epsilon_k + V N) a_k^\dagger a_k$$

$$+ \frac{NV}{2} \sum_{k \neq 0} (a_k^\dagger a_{-k}^\dagger + a_k a_{-k})$$

$$+ \frac{1}{2} N^2 V$$

$$[a_k^\dagger a_k, a_k] = -a_k$$

$$[a_k^\dagger a_{-k}^\dagger, a_k] = -a_{-k}^\dagger$$

$$\rightarrow [\mathcal{H}, a_k] = -A_k a_k - 2B_k a_{-k}^\dagger$$

$$[\mathcal{H}, a_{-k}^\dagger] = A_{-k} [a_{-k}^\dagger a_{-k} a_{-k}^\dagger] + B_k [a_k a_{-k}, a_{-k}^\dagger] + B_{-k} [a_{-k} a_k, a_{-k}^\dagger]$$

$$= A_{-k} a_{-k}^\dagger + [B_k + B_{-k}] a_k$$

$$\rightarrow [\mathcal{H}, \alpha_k] = u_k [-A_k a_k - 2B_k a_{-k}^\dagger] + v_k [A_k a_{-k}^\dagger + 2B_k a_k]$$

$$= (-A_k u_k + 2B_k v_k) a_k + (-2B_k u_k + A_k v_k) a_{-k}^\dagger$$

$$= -\omega_k (u_k a_k + v_k a_{-k}^\dagger)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -A_k u_k + 2B_k v_k = -\omega_k u_k \\ -2B_k u_k + A_k v_k = -\omega_k v_k \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\omega_k - A_k) u_k + 2B_k v_k = 0 \\ -2B_k u_k + (\omega_k + A_k) v_k = 0 \end{cases}$$

$$\omega_k^2 - A_k^2 + 4B_k^2 = 0$$

$$\Rightarrow \omega_k^2 = A_k^2 - 4B_k^2 = (A_k + 2B_k)(A_k - 2B_k)$$

$$\omega_k = \sqrt{(A_k - 2B_k)(A_k + 2B_k)}$$

$$\text{or } \omega_k = \sqrt{\epsilon_k (\epsilon_k + 2NV)}$$

$$\boxed{\omega_k \approx c k} \quad \text{pour } k \text{ petit } (\epsilon_k \ll 2NV)$$

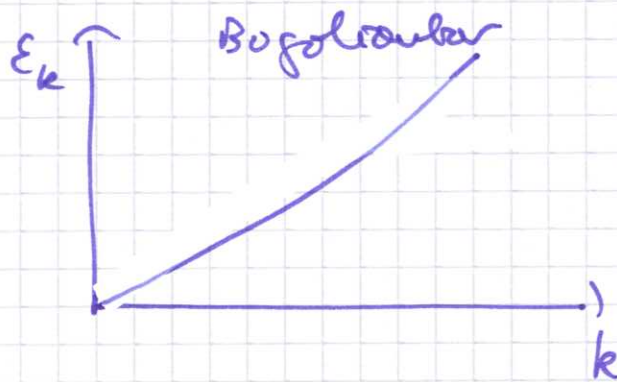
$$\text{avec } c = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \sqrt{2NV}$$

Dès qu'il y a des interactions, le spectre d'excitations est linéaire

→ le gaz de bosons est superfluide.

Ce calcul n'est valable que tant que N_0 est macroscopique. Comme les fluctuations thermiques dépeuplent le condensat (voir BEC pour gaz sans interaction), on prédit que la superfluidité est liée à la condensation de Bose, et qu'elle disparaît à une température finie.

Cette théorie explique l'apparition de suprafluidité dans les liquides de bosons en interaction faible. L'hélium 4 ne peut pas être rigoureusement traité de cette façon. Les interactions très fortes conduisent à 1 dispersion différente aux grands vecteurs d'onde.



Phénoménologie: Landau

Théorie microscopique: Feynman

3) Vortex et quantification du flot:

L'existence d'un condensat se traduit par des propriétés tout à fait remarquables de la phase suprafluide.

Pour le voir, revenons à la définition du courant en seconde quantification:

$$\hat{\vec{j}} = -\frac{i\hbar}{2m} \left(\hat{\Psi}^\dagger(\vec{r}) \vec{\nabla} \hat{\Psi}(\vec{r}) - (\vec{\nabla} \hat{\Psi}^\dagger(\vec{r})) \hat{\Psi}(\vec{r}) \right)$$

où $\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_i \psi_i(\vec{r}) a_i$ est l'opérateur champ. Si le condensat $|z\rangle$ est construit à partir de la fonction d'onde $\psi_0(\vec{r})$, on a:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(\vec{r}) |z\rangle &= \sum_i \psi_i(\vec{r}) a_i |z\rangle \\ &= \psi_0(\vec{r}) a_0 |z\rangle \\ &= z \psi_0(\vec{r}) |z\rangle \end{aligned}$$

Du coup, le courant lié au condensat est donné par:

$$\begin{aligned} \vec{j} &= \langle z | \hat{\vec{j}} | z \rangle \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} |z|^2 \times 2i \operatorname{Im} (\psi_0^\dagger(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi_0(\vec{r})) \\ &= \frac{\hbar}{m} N_0 \operatorname{Im} [\psi_0^\dagger(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi_0(\vec{r})] \end{aligned}$$

Considérons désormais un flot supra-fluide de densité uniforme décrit par le champ de vitesse $\vec{v}_s$ (on a rappelé qu'il s'agit de la vitesse de la composante suprafluide). Si la densité est uniforme, $\psi_0(\vec{r})$ doit satisfaire :

$$|\psi_0(\vec{r})|^2 = \frac{1}{V}$$

$$\Rightarrow \psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\theta(\vec{r})}$$

$$\Rightarrow \psi_0^*(\vec{r}) \vec{\nabla} \psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{V} i \vec{\nabla} \theta(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{j} = \frac{\hbar}{m} n_0 \vec{\nabla} \theta}$$

où $n_0 = \frac{N_0}{V}$ est la densité du condensat.

La vitesse est reliée au courant par

$$\vec{v}_s = n_0 \vec{j}$$

d'où :

$$\boxed{\vec{v}_s = \frac{\hbar}{m} \vec{\nabla} \theta}$$

On en déduit que $\text{rot } \vec{v}_s = \vec{0}$

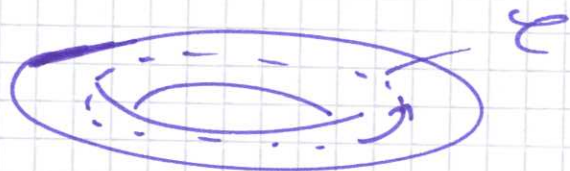
→ le flux suprafluide est irrotationnel.

Du coup, il ne peut pas exister de
branches de courant dans un suprafluide.
En effet,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v}_s \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{S}} \nabla \times \vec{v}_s \cdot d\vec{S} = 0$$

où $\mathcal{S}$ est une surface du fluide s'appuyant
sur le contour $\mathcal{C}$.

Par contre, si le suprafluide existe
dans une topologie non simplement
connectée, c'est possible. Considérons
par exemple le cas d'un suprafluide
dans un tore :



Dans ce cas, la circulation de
 $\vec{v}_s$ le long d'un chemin fermé autour
du trou n'est pas nulle. D'après la
relation entre $\vec{v}_s$ et la phase, elle
est donnée par :

$$\begin{aligned} \oint \vec{v}_s \cdot d\vec{\ell} &= \frac{\hbar}{m} \oint \nabla \theta \cdot d\vec{\ell} \\ &= \frac{\hbar}{m} \Delta \theta \end{aligned}$$

où $\Delta \theta$ est la phase accumulée lorsqu'on
fait un tour. Mais pour que la fonc-
tion d'onde $\psi_0(\vec{r})$ soit univoque, il

il faut que $\Delta\theta = 2\pi n$, n entier

$$\rightarrow \oint \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = \frac{h}{m} \times n$$

La circulation du flot suprafluide est quantifiée en multiple de $\frac{h}{m}$.

Conséquences :

① Flot "permanent" : Si on met un suprafluide en mouvement dans un tore, l'état du système correspond à 1 valeur de $\oint \vec{v}_s \cdot d\vec{l}$, donc de n . On pourrait en principe penser que si le système est livré à lui-même, il va très rapidement retourner à l'état de vitesse nulle (qui a une énergie cinétique plus basse) via les collisions de la composante normale (non suprafluide) sur les parois. Mais ce processus est essentiellement interdit par la quantification de la circulation. Le système ne peut transiter que par des sauts $n \rightarrow n-1$, et l'état intermédiaire doit cesser d'être suprafluide sur une section du tore, d'où une

barrière de potentiel gigantesque.

② Vortex;

Considérons un récipient d'hélium suprafluide, et mettons-le en rotation autour de son axe. D'après ce qui précède $\oint \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = 0$ - le suprafluide devrait rester immobile, et la surface plate. Or, la surface se creuse, comme pour un fluide normal. Pourquoi?

La condition $\oint \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = 0$ est vraie si l'intérieur du contour est suprafluide. Mais s'il se forme une région "normale", cette condition n'est plus remplie, et $\oint \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = \frac{h}{m} \times n$.

Une région de l'espace où l'hélium est dans un état normal entouré d'un flot suprafluide tel que

$$\oint \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = \frac{h}{m}$$

s'appelle un vortex.

Lorsque l'hélium suprafluide est en rotation, il apparaît des vortex. La

densité de vortex est contrôlée par la vitesse de rotation. En effet, si le cylindre tourne à la vitesse angulaire ω et que son rayon est R , la circulation le long du bord vaut:

$$\oint \vec{v}_s \cdot d\vec{l} = 2\pi R \times \omega R = 2\pi \omega R^2.$$

Il se trouve qu'il est énergétiquement plus favorable de créer 2 vortex $n=1$ qu'un vortex $n=2$, et que les vortex se rejoignent. Il apparaît donc N_v vortex $n=1$, avec:

$$\frac{h}{m} N_v = 2\pi \omega R^2 \rightarrow \boxed{\frac{N_v}{\pi R^2} = \frac{2m\omega}{h}}$$

Ces vortex forment un réseau triangulaire. Un tel réseau a été observé non seulement dans l'hélium 4 suprafluide, mais dans des condensats d'atomes froids.

4) Modèle à 2 fluides:

(20)

La première approche phénoménologique due à Landau était basée sur l'existence de deux fluides, un fluide "normal" et un fluide "suprafluide". Si l'on fait tourner de l'hélium, il apparaît en effet un moment d'inertie due à la composante "normale" du fluide. Si on appelle n_s la densité suprafluide, n_n la densité normale et n_0 la densité du condensat, on pourrait être tenté de croire que $n_s \simeq n_0$. Ce n'est pas vrai en général.

Dans le cas de bosons en interactions faibles, on a effectivement

$$n_s \simeq n_0$$

et ce sont les fluctuations thermiques qui dépeuplent le condensat.

Par contre, pour des bosons en interactions fortes, n_0 peut être très petit même à température nulle ($n_0 \simeq 0.1 n$ pour l'hélium 4), alors que $n_s = n$ à $T=0$.

Cours ${}^4\text{He}$:

- * Argument de Landau
→ Spectre linéaire
- * Calcul de Bogolioubov
→ Spectre linéaire.
- *

Exercice II Wv:

- * Moment cinétique (QHE)
- * BEC