Examen de Mécanique Analytique

Professeur: P. De los Rios

Epreuve du 23 février 2006 - Durée: 4 heures - Sans document

N.B.: Les intégrales nécessaires pour cette épreuve sont indiquées sur la dernière page.

Exercice 1 *Régulateur de force centrifuge (8 points)*

On considère le système représenté sur la figure 1. Un losange plan $ABCD$ peut tourner autour d'un axe vertical z tel que le point A est fixé à l'axe et le point C peut se déplacer librement le long de l'axe z. Deux masses m sont fixées aux points B et D et un ressort de constante d'élasticité k et de longueur au repos nulle relie les points A et C. Les tiges (chacune de longeur a), le ressort et les points A et C sont considérés sans masses. Les angles du losange sont variables (pour autant que le losange reste plan) et le système est soumis à la pesanteur. On note φ l'angle mesurant la rotation autour de l'axe z.

a) Ecrire le Lagrangien de ce système dans les coordonnées appropriées.

b) Etablir les équations d'Euler-Lagrange et déterminer les constantes du mouvement. Ecrire le hamiltonien du système.

c) Considérer que le système ne tourne pas ($\dot{\varphi} = 0$), c'est-à-dire que le système oscille verticalement

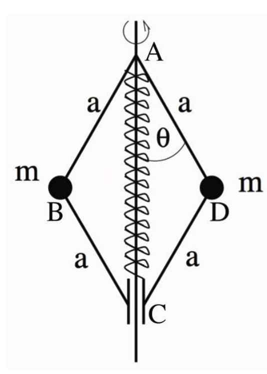


Figure 1: Régulateur de force centrifuge

seulement. Trouver le point d'équilibre stable du système et calculer la fréquence des petites oscillations autour de ce point. Que se passe-t-il avec les coordonnées du point d'équilibre si la constante k du ressort est très petite? (Ne pas considérer ce cas pour calculer la fréquence des petites oscillations.)

Question bonus (2 points):

Supposons maintenant que le système tourne rapidement avec un moment cinétique L_z très grand. Quelle est la position d'équilibre dans ce cas? Pour trouver la solution de l'équation obtenue, imaginer la position approximative du point C et effectuer un développement limité autour de ce point.

Exercice 2 *Extrêmalisation (7 points)*

Dans le plan (x, y), on considère la propagation de la lumière dans un milieu d'indice de réfraction n variable. On sait que la lumière minimise la fonctionnelle

$$S = \int_{\text{chemin}} n(x, y) ds,$$

où $ds^2 = dx^2 + dy^2$. On place un laser centré en $A = (0, 0)$ et pointé dans une direction faisant un angle α avec le côté positif de l'axe x. Trouver la trajectoire $y(x)$, puis $x(y)$, du faisceau lumineux dans le cas où $n(x, y) = n(x) = \sqrt{n_0 + ax^2}$ avec $n_0 > 1$ et $a > 0$. Faire une esquisse de la trajectoire.

Question bonus (2 points):

Considérer le cas $a < 0$. Discuter et esquisser la trajectoire. Cette trajectoire, est-elle le minimum global de l'action?

Exercice 3 *Potentiel exponentiel (6 points)*

On considère une particule de masse m, effectuant un mouvement uni-dimensionel dans un potentiel exponentiel

$$V(q) = V_0 e^{q/q_0} \ ,$$

où V_0 et q_0 sont des constantes positives.

a) Ecrire le hamiltonien $H(q, p)$ et tracer le potentiel et le portrait de phase.

b) Ecrire l'équation de Hamilton-Jacobi et trouver une expression sous la forme d'une intégrale pour la solution $W(q, \alpha)$.

c) Effectuer la transformation canonique correspondante à cette solution.

$$F_2(q, P; t) := W(q, \alpha =: P) \ .$$

Calculer le nouveau hamiltonien $K(Q, P)$ et trouver la solution dans les nouvelles coordonnées $Q(t)$ et $P(t)$.

d) En déduire les fonctions $q(t)$ et $p(t)$ solution du problème.

<u>Indication:</u>

La fonction génératrice du type $F_2(q_i, P_i)$ d'une transformation canonique satisfait les équations suivantes:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad , \qquad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i}$$

Exercice 4 *Vingt mille lieues sous les mers ... (9 points)*

D'après Jules Verne on s'imagine qu'il est possible de creuser un tunnel rectiligne entre deux points opposés à la surface de la terre (rayon: R_T, masse: M), tel que le tunnel passe par le centre de la terre. A partir d'une position initiale $r = r_0$ où r est la distance mesurée depuis le centre de la terre, on laisse tomber une particule de masse m dans le tunnel. La particule commence donc à osciller entre le point $r = r_0$ et un autre point $r = r_0$ de même distance du centre, mais opposé de celui-ci.

A l'extérieur de la terre ($r > R_T$) le mouvement de la particule est décrit par le potentiel de gravité usuel. A l'intérieur de la terre ($r \leq R_T$) on suppose que les frottements dans le tunnel sont négligeables et que la terre est homogène, ce qui conduit à une énergie potentielle de la forme

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{GMm}{R_T^3}\left(\frac{3R_T^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right) & r < R_T \\ -\frac{GMm}{r} & r \geq R_T \end{cases} , \tag{1}$$

où G est la constante de gravitation.

a) Ecrire le hamiltonien $H(r, p)$ et tracer le potentiel et le portrait de phase en représentant tous les types de trajectoires possibles avec leurs énergies correspondantes.

b) Exprimer la position initiale r_0 de la particule en fonction de son énergie E. Calculer la variable action-angle I. Distinguer bien les cas $r_0 \leq R_T$ et $r_0 > R_T$!

c) Pour $r_0 < R_T$ calculer la fréquence de l'oscillation et vérifier le résultat obtenu en utilisant l'équation de Newton.

Question bonus: (2 points)

En supposant que la terre est une sphère composée de matière de densité constante ρ, prouver que l'énergie potentielle de gravité est bien décrite par (1).

Tableau des intégrales:

$$\int_a^b \sqrt{\frac{b-r}{r}} = \frac{b\pi}{2} - \sqrt{a(b-a)} - b \arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b-a}}\right) , \quad 0 < a < b$$

$$\int \frac{dx}{x} \frac{1}{\sqrt{a-x}} = -\frac{2}{\sqrt{a}} \operatorname{artanh}\left(\sqrt{\frac{a-x}{a}}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh}(x)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$$

$$\int_0^a dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{\pi a^2}{4} , \quad a > 0$$

$$\int_0^b dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2}\left[b\sqrt{a^2-b^2} + a^2 \arctan\left(\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)\right], \quad 0 < b < a .$$

Exercice 1 *Régulateur de force centrifuge (8 points)*
a) Le Lagrangien du système est : *(1 point)*

$$L = ma^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) + 2mga\cos\theta - 2ka^2\cos^2\theta$$

b) Le Lagrangien ne dépend pas de ϕ donc le moment cinetique autour de l'axe est conservé:

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\phi}} = const = L_z = 2ma^2\sin^2\theta\dot{\phi}.$$

Le Lagrangien ne dépend pas du temps, la fonction hamiltonienne, qui correspond ici à l'énergie est conservée *(1 point)*

$$h = E = ma^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) - 2mga\cos\theta + 2ka^2\cos^2\theta.$$

Les équations du mouvement sont: *(1 point)*

$$2ma^2\ddot{\theta} = -2mga\sin\theta + 4ka^2\cos\theta\sin\theta + 2ma^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2, \tag{2}$$

$$\sin^2\theta\ddot{\phi} + 2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi} = 0. \tag{3}$$

Le hamiltonien est : *(1 point)*

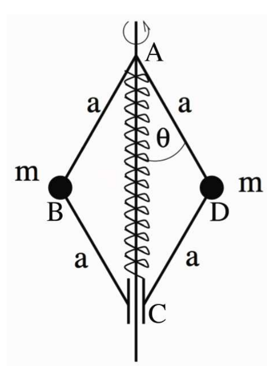
$$H = \frac{p_\theta^2}{4ma^2} + \frac{p_\phi^2}{4ma^2\sin^2\theta} - 2mga\cos\theta + 2ka^2\cos^2\theta$$

c) De la première équation du mouvement, avec $\dot{\theta} = \dot{\phi} = 0$, on tire:

$$\cos\theta = \frac{mg}{2ka} \quad ou \quad \sin\theta = 0$$

On effectue un développement limité ($\theta = \theta_0 + t$) autour du point stable $\theta_0 = \arccos\frac{mg}{2ka}$. Notons premièrement: *(1 point)*

$$\cos\theta = \cos(\theta_0 + t) = \cos\theta_0 - t\sin\theta_0 + \mathcal{O}(t^2), \quad \sin(\theta_0 + t) = \sin\theta_0 + t\cos\theta_0 + \mathcal{O}(t^2)$$



En insérant ces developpements dans la premiêre equation du mouvement, avec toujours $\dot{\phi} = 0$, on trouve:

$$\ddot{t} = -\frac{2k}{m}\left(1 + \frac{m^2g^2}{4k^2a^2}\right)t$$

La fréquence est donc $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}\left(1 + \frac{m^2g^2}{4k^2a^2}\right)}$. *(2 point)*

Si $k < mg/2a$ l'angle θ_0 n'existe pas, et le point $\theta = 0$ est stable. En effet, la dérivée seconde du potentiel est:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = 2mga\cos\theta - 2ka^2(2\cos\theta - 1).$$

Au point θ_0, on a $V'' = 2ka^2 - m^2g^2/k > 0$ le point est donc stable, Au point $\theta = 0$, on a $V'' = -4ka + 2mga^2$ qui est stable si $k < mg/2a$ *(1 point)*

Question bonus: Si le moment cinétique $L_z \to \infty$, l'angle $\theta \to \pi/2$. Le développement $\theta = \pi/2 - t$ dans la première équation du mouvement donne (en remplaçant $\dot{\phi}$ par le moment cinétique):

$$2mga + 4ka^2t = \frac{tL_z}{2ma^2}$$

d'ou: *(2 point)*

$$t = \frac{2mga}{\frac{L_z}{2ma^2} + 4ka^2}.$$

Exercice 2 *Extrêmalisation (7 points)*

On paramétrise l'élément de longueur ds par rapport à la variable x (comme seul x intervient dans $n(x)$): *(2 point)*

$$ds = \sqrt{\frac{dy^2}{dx^2} + 1}\ dx = \sqrt{y'^2 + 1}\ dx$$

l'action devient:

$$S = \int \sqrt{n_0 + ax^2}\sqrt{y'^2 + 1}dx,$$

elle est indépendante de y, il y a donc une quantité conservée (on peut aussi utiliser l'équation du mouvement): *(1 point)*

$$\frac{d}{dy'}\left(\sqrt{n_0 + ax^2}\sqrt{y'^2 + 1}\right) = \text{const} =: A = \sqrt{n_0 + ax^2}\frac{y'}{\sqrt{y'^2 + 1}}.$$

On tire:

$$y'(x) = \frac{A}{\sqrt{n_0 + ax^2 - A^2}}$$

d'où

$$y(x) = \frac{A}{\sqrt{n_0 - A^2}}\int dx\sqrt{\frac{1}{1 + \frac{a}{n_0 - A^2}x^2}}.$$

On effectue le changement de variable $z = \sqrt{\frac{a}{n_0 - A^2}}x$, et à l'aide des indications, on trouve:

$$y(z) = \frac{A}{\sqrt{a}}\text{arsinh}(z) + B.$$

En revenant à la variable x: *(1 point)*

$$y(x) = \frac{A}{\sqrt{a}}\text{arsinh}\left(\sqrt{\frac{a}{n_0 - A^2}}x\right) + B.$$

La condition initiale $y(0) = 0$ implique $B = 0$. Alors que l'angle d'émission du faisceau lumineux $y'(0) = \tan(\alpha)$ donne $A^2 = n_0 \sin^2 \alpha$. Noter qu'on a bien $A^2 < n_0$ et toutes les racines sont bien définies. En résumé: *(2 point)*

$$y(x) = \sqrt{\frac{n_0}{a}} \sin\alpha \ \text{arsinh}\left(\sqrt{\frac{a}{n_0}}\frac{x}{\cos\alpha}\right), \quad x(y) = \sqrt{\frac{n_0}{a}} \cos\alpha \ \sinh\left(\sqrt{\frac{a}{n_0}}\frac{y}{\sin\alpha}\right).$$

Shema de la trajectoire... *(1 point)*

Question bonus:

On effectue le mÃªme calcul et on obtient:

$$y(x) = \sqrt{\frac{n_0}{a}} \sin\alpha \ \arcsin\left(\sqrt{\frac{a}{n_0}}\frac{x}{\cos\alpha}\right), \quad x(y) = \sqrt{\frac{n_0}{a}} \cos\alpha \ \sin\left(\sqrt{\frac{a}{n_0}}\frac{y}{\sin\alpha}\right).$$

La trajectoire du faisceau oscille autour de l'axe y. C'est en fait le principe d'une fibre optique, et la trajectoire n'est pas le minimum global de l'action: pour aller de l'origine à un point tres éloigné sur l'axe y, il vaut mieux aller dans la zone où n et petit, c'est-à-dire loin de l'axe y suivre l'axe pendant la distance voulue puis y revenir. Hereusement, la lumière ne recherche pas ici le minimum global! *(2 point)*
La trajectoire obtennue est probablement un minimum local, mais cette question dépasse la cadre de ce cours et la témérité des assistants...

Exercice 3 *Potentiel exponentiel (6 points)*

a) Hamiltonien : *(1 point)*

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) = \frac{p^2}{2m} + V_0 \exp\left(\frac{q}{q_0}\right)$$

Portrait de phase... *(1 point)*

b) Vu que le hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, l'équation de Hamilton-Jacobi devient *(1 point)*

$$\begin{aligned}
&H\left(q, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = \alpha \\
&\quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + V_0 \exp\left(\frac{q}{q_0}\right) = \alpha \\
&\quad \Rightarrow \quad \pm\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\left(\alpha - V_0 \exp\left(\frac{q}{q_0}\right)\right)} \\
&\quad \Rightarrow \quad W(q,\alpha) = \pm\int dq \sqrt{2m\left(\alpha - V_0 \exp\left(\frac{q}{q_0}\right)\right)}.
\end{aligned}$$

c) La transformation canonique engendrée par la fonction génératrice

$$F_2(q,P;t) := W(q, \alpha =: P) = \int dq \sqrt{2m\left(P - V_0 \exp\left(\frac{q}{q_0}\right)\right)}$$

conduit a un nouveau hamiltonien donné par

$$K(Q,P) = P \ ,$$

dont les équations canoniques s'écrivent

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q} = 0$$
$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = 1$$

avec les solutions presques triviales

$$P(t) = \text{const} =: P_0$$
$$Q(t) = t + Q_0 \ ,$$

où Q_0 et P_0 sont des constantes. *(1 point)*

d) Il reste maintenant de trouver des relation entre les nouvelles et les anciennes coordonnées. On sait déjà que

$$p = \frac{\partial F_2}{\partial q} = \sqrt{2m\left(P - V_0 \exp\left(\frac{q}{q_0}\right)\right)} \ .$$

L'autre équation de base pour la transformation canonique donne

$$\begin{aligned} Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} &= \frac{\partial}{\partial P}\left[\int dq \sqrt{2m\left(P - V_0 \exp\left(\frac{q}{q_0}\right)\right)}\right] \\ &= \int dq \ \frac{\partial}{\partial P}\left[\sqrt{2m\left(P - V_0 \exp\left(\frac{q}{q_0}\right)\right)}\right] \\ &= \sqrt{\frac{m}{2}} \ \int \ \frac{dq}{\sqrt{P - V_0 \exp\left(\frac{q}{q_0}\right)}} \ . \end{aligned}$$

En effectuant la substitution $y = V_0 \exp\left(\frac{q}{q_0}\right)$ on trouve

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{\frac{m}{2}} q_0 \ \int \ \frac{dy}{y} \frac{1}{\sqrt{P-y}} \\ &= -\sqrt{\frac{2m}{P}} q_0 \ \text{Artanh}\left(\sqrt{\frac{P-y}{P}}\right) \ . \end{aligned}$$

Avec la solution $Q(t) = t + Q_0$ et $P(t) = P_0$ on peut résoud l'équation pour $q(t)$: *(1 point)*

$$\begin{aligned} & \frac{t+Q_0}{q_0} \sqrt{\frac{P_0}{2m}} = -\text{Artanh}\left(\sqrt{\frac{P_0 - y}{P_0}}\right) \\ & \quad \Rightarrow \quad \tanh^2\left(\sqrt{\frac{P_0}{2m}} \ \frac{t+Q_0}{q_0}\right) = \frac{P_0 - V_0 \exp\left(\frac{q(t)}{q_0}\right)}{P_0} \\ & \quad \Rightarrow \quad V_0 \exp\left(\frac{q(t)}{q_0}\right) = P_0 \left[1 - \tanh^2\left(\sqrt{\frac{P_0}{2m}} \ \frac{t+Q_0}{q_0}\right)\right] \\ & \quad \Rightarrow \quad q(t) = q_0 \ln\left\{\frac{P_0}{V_0}\left[1 - \tanh^2\left(\sqrt{\frac{P_0}{2m}} \ \frac{t+Q_0}{q_0}\right)\right]\right\} \ . \end{aligned}$$

Finalement, on obtient pour l'impulsion *(1 point)*

$$p(t) = \sqrt{2m\left(P - V_0 \exp\left(\frac{q}{q_0}\right)\right)} = \sqrt{2mP_0}\tanh\left(\sqrt{\frac{P_0}{2m}}\ \frac{t+Q_0}{q_0}\right) \ .$$

Exercice 4 *Vingt mille lieues sous les mers ... (9 Points)*

a) Hamiltonien:

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(r) \ ,$$

avec

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{GMm}{R_T^3}\ (\frac{3R_T^2}{2} - \frac{r^2}{2}) & r < R_T \\ -\frac{GMm}{r} & r \geq R_T \end{cases} \tag{4}$$

Portrait de phase... *(3 points)*

b) Considérons d'abord le cas $r_0 \leq R_T$:

La variable action-angle est donnée par

$$I = \frac{1}{2\pi}\ \oint\ pdq = \frac{1}{2\pi}\ \oint\ \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_{r_0 \leq R_T} dr$$

où *(1 point)*

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_{r_0 \leq R_T} = \pm\sqrt{2m\left[E + \frac{GMm}{R_T^3}\left(\frac{3R_T^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right)\right]}$$

La relation entre l'énergie E et la position initiale r_0 est *(1 point)*

$$V(r_0) = E = -\frac{GMm}{R_T^3}\left(\frac{3R_T^2}{2} - \frac{r_0^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad E + \frac{3GMm}{2R_T} = \frac{r_0^2}{2}\ \frac{GMm}{R_T^3}$$

$$\Rightarrow \qquad r_0^2 = \frac{2ER_T^2}{GMm} + 3R_T^2 \ .$$

Encore, la variable action-angle devient *(1 point)*

$$\begin{aligned} I(r_0 \leq R_T) &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{r_0}^{0}\ \left(\frac{\partial |W_{r_0 \leq R_T}|}{\partial r}\right) dr - \int_0^{r_0}\ \left(\frac{\partial |W_{r_0 \leq R_T}|}{\partial r}\right) dr\right] = \frac{2}{\pi}\int_0^{r_0}\ \left(\frac{\partial |W_{r_0 \leq R_T}|}{\partial r}\right) dr \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{r_0}\ \sqrt{2m\left[E + \frac{GMm}{R_T^3}\left(\frac{3R_T^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right)\right]} \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{r_0}\ \sqrt{2m\frac{GMm}{2R_T^3}\left(r_0^2 - r^2\right)} \\ &= \frac{mr_0^2}{2}\sqrt{\frac{GM}{R_T^3}} \\ &= \sqrt{\frac{R_T^3}{GM}}\left(E + \frac{3GMm}{2R_T}\right) \ . \end{aligned}$$

$r_0 > R_T$:
Pour $r_0 > R_T$ on a

$$V(r_0) = -\frac{GMm}{r_0} = E$$
$$\Rightarrow \qquad r_0 = -\frac{GMm}{E} \ ,$$

et cette fois, on obtient pour la variable action-angle *(1 point)*

$$\begin{aligned}
I(r_0 > R_T) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{R_T} \sqrt{2m\left[E + \frac{GMm}{R_T^3}\left(\frac{3R_T^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right)\right]} + \frac{2}{\pi}\int_{R_T}^{r_0} \sqrt{2m\left(E + \frac{GMm}{r}\right)}dr \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{R_T} \sqrt{2m\left[-\frac{GMm}{r_0} + \frac{GMm}{R_T^3}\left(\frac{3R_T^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right)\right]} + \frac{2}{\pi}\int_{R_T}^{r_0} \sqrt{2m\left(E + \frac{GMm}{r}\right)}dr \\
&= +\frac{2m}{\pi}\sqrt{\frac{GM}{R_T^3}}\int_0^{R_T} \sqrt{-\frac{2R_T^3}{r_0} + 3R_T^2 - r_0^2} + \frac{2m}{\pi}\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}\int_{R_T}^{r_0} \sqrt{\frac{r_0 - r}{r}}dr \\
&= \frac{m}{\pi}\sqrt{\frac{GM}{R_T^3}}\left[R_T^2\sqrt{\frac{2(r_0 - R_T)}{r_0}} + \frac{3R_T^2 r_0 - 2R_T^3}{r_0} \ \mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{r_0}{2(r_0 - R_T)}}\right)\right] \\
&+ \frac{2m}{\pi}\sqrt{\frac{2GM}{r_0}}\left[\frac{r_0\pi}{2} - \sqrt{R_T(r_0 - R_T)} - r_0\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{R_T}{r_0 - R_T}}\right)\right] \ .
\end{aligned}$$

c) Pour le cas $r_0 \leq R_T$ on obtient la fréquence de l'oscillation avec

$$\omega = \frac{\partial E}{\partial I} \ ,$$

où l'énergie E en fonction de la variable action-angle I est

$$E = \sqrt{\frac{GM}{R_T^3}}I - \frac{3GMm}{2R_T}$$

et on obtient *(1 point)*

$$\omega = \sqrt{\frac{GM}{R_T^3}} \ .$$

L'équation de Newton à l'intérieur de la terre est

$$m\ddot{r} = F(r) = -\frac{\partial V(r \leq R_T)}{\partial r} = -\frac{GMmr}{R_T^3} = -m\omega^2 r \ ,$$

ce qui donne le même résultat pour ω. *(1 point)*

Question bonus (2 points):
D'après le théorème de Gauss la force de gravité sur une particule à la distance r du centre de la terre ne dépend que de la masse $M_{\text{int}}(r)$ à l'intérieur de r

$$F(r) = -\frac{GM_{\text{int}}(r)m}{r^2}$$

Pour $r < R_T$ la masse à l'intérieur de r est donnée par

$$\frac{M_{r\leq R_T}(r)}{M} = \frac{V_{r\leq R_T}(r)}{V_T} = \frac{r^3}{R_T^3} ,$$

donc on a

$$M_{\text{int}}(r) = \begin{cases} M\frac{r^3}{R_T^3} & r \leq R_T \\ M & r > R_T \end{cases} ,$$

alors, la force de gravité est *(1 point)*

$$F(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{GMmr}{R_T^3} & r \leq R_T \\ -\frac{GMm}{r^2} & r > R_T \end{cases}$$

et elle est moins le gradient du potentiel ($\mathbf{F}(r) = -\nabla V(r)$). Alors, on trouve le potentiel par intégration

$$V(r) \begin{cases} \frac{GMmr^2}{2R_T^3} + a & r \leq R_T \\ -\frac{GMm}{r} + b & r > R_T \end{cases} ,$$

où a et b sont des constantes d'intégration. La continuité du potentiel en $r = R_T$ nous donne

$$a = b - \frac{3GMm}{2R_T} .$$

Une constante est fixée par le zéro du potentiel, en mettant celui-ci à l'infini, on pose $b = 0$ et on obtient le potentiel (4). *(1 point)*

Tableau des intégrales:

$$\int_a^b \sqrt{\frac{b-r}{r}} = \frac{b\pi}{2} - \sqrt{a(b-a)} - b \arctan\left(\sqrt{\frac{a}{b-a}}\right) , \quad 0 < a < b$$

$$\int \frac{dx}{x} \frac{1}{\sqrt{a-x}} = -\frac{2}{\sqrt{a}} \operatorname{artanh}\left(\sqrt{\frac{a-x}{a}}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arsinh}(x)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$$

$$\int_0^a dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{\pi a^2}{4} , \quad a > 0$$

$$\int_0^b dx\sqrt{a^2-x^2} = \frac{1}{2}\left[b\sqrt{a^2-b^2} + a^2\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)\right]$$