Partiel de Mécanique Analytique

Epreuve du 13 décembre 2007 - Durée: 110 minutes - Sans document

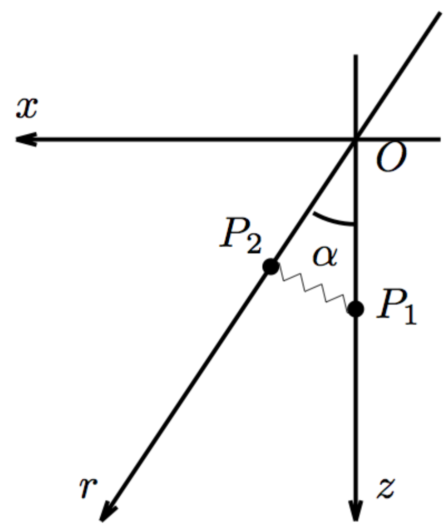
Indications:
La fonction génératrice F_2 associée à une transformation canonique est une fonction des anciennes coordonnées q_i, des nouvelles impulsions P_i et du temps. Elle relie les anciennes et les nouvelles coordonnées par les relations:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad \text{et} \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \ .$$

Le nouvel Hamiltonien est donné par:

$$K(Q_i, P_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \ .$$

Exercice 1 *(5 points)*



Deux particules P_1 et P_2 de masse m sont contraintes sur un plan verticale xz. En plus, la particule P_1 est contrainte de bouger que le long de l'axe z, alors que la particule P_2 bouge elle le long d'une droite r qui passe par l'origine O et elle forme un angle α avec l'axe z. Les deux particules sont reliées par un ressort de constante élastique k et longueure au repos $l_0 = 0$. A l'instant $t = 0$ les deux particules se trouve en O avec vitesse nulle. Le système est soumis à la pesanteur.

1. Ecrire le Hamiltonien du système.
2. Résoudre les équations du mouvement.

Exercice 2 *(4 points)*

Considerer la transformation:

$$Q = p^{1/2} q^{3/2}$$
$$P = p^{1/2} q^{-1/2}$$

définie sur l'ensemble $\{q > 0, p > 0\}$.

1. Montrer que la transformation est canonique à l'aide de la méthode de la matrice jacobienne et à l'aide de la méthode des crochets de poisson.

2. Déterminer la fonction génératrice de type deux $F_2(q, P)$ qui engendre la transformation donnée.

Exercice 3 *(6 points)*

Considérer le Hamiltonien d'une particule de masse m soumise à la force de gravité:

$$H(x, z, p_x, p_z, t) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_z^2) + mgz$$

Au temps initiale $t = 0$ la particule se trouve dans le point $(0, 0)$.

1. Trouver toutes les quantités conservées.

2. Ecrire l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi (cas indépendant du temps) et trouver la solution $W(x, z, \alpha_1, \alpha_2)$.

3. Ecrire les solutions générales des équations du mouvement en utilisant la fonction génératrice $F_2(q_i, P_i, t) = W(q_i, \alpha_i = P_i)$.

Exercice 1

1) Nous choisissons les distances des deux points respective par rapport à l'origine comme coordonnées généralisées. Le Hamiltonien du système s'écrit:

$$H(r, z, p_r, p_z, t) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}k(r^2 + z^2 - 2rz\cos\alpha) - mg(z + \frac{r}{\cos\alpha}) \tag{1}$$

2) Les équations du mouvement deviennent donc:

$$\dot{p}_r = mkr - mkz\cos\alpha - \frac{m^2 g}{\cos\alpha} \tag{2}$$

$$\dot{p}_z = mkz - mkr\cos\alpha - m^2 g \tag{3}$$

Si on considére le vecteur des impulsion $\mathbf{p} = (p_r, p_z)$, on peut écrire le système d'équations précedant en forme de produit matrice vecteur:

$$\dot{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} mk & -mk\cos\alpha \\ -mk\cos\alpha & mk \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{m^2 g}{\cos\alpha} \\ m^2 g \end{pmatrix} \tag{4}$$

Exercice 2

1) La matrice de la transformation est donnée par:

$$(M\phi^t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{3}{2}} & \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \tag{5}$$

La condition pour que la matrice jacobienne de la transformation soit symplectique est donc facilement vrifie:

$$(M\phi^t)^T J(M\phi^t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}} \\ -\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{3}{2}} & \frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = J$$

Dans le cas de la méthode des crochets de poisson, le seule crochets de poisson non trivial est le suivant:

$$\{Q, P\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p} = \left(\frac{3}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}\right) - \left(-\frac{1}{2}p^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{3}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}p^{-\frac{1}{2}}q^{\frac{3}{2}}\right) = 1$$

2) On cherche un fonction génératrice de type deux. A partir de la transformation donnée, on obtient les expressions suivantes:

$$Q = Pq^2 = \frac{\partial F_2}{\partial P} \tag{6}$$

$$p = (Pq^{\frac{1}{2}})^2 = \frac{\partial F_2}{\partial q} \tag{7}$$

En intégrant la première en obtient:

$$F_2(q, P) = \frac{1}{2}P^2q^2 + f(q) \tag{8}$$

qui, remplacée dans la deuxème nous donne:

$$qP^2 + f'(q) = qP^2 \tag{9}$$

$$f'(q) = 0 \tag{10}$$

$$f(q) = C \tag{11}$$

La fonction génératrice de la transformation canonique est donc donnée par:

$$F_2(q, P) = \frac{1}{2}q^2P^2 + C. \tag{12}$$

Exercice 3

1) Le Lagrangien du système est donné par

$$\mathcal{L}(x, z, \dot{x}, \dot{z}, t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgz \tag{13}$$

Le Lagrangien ne dépend pas de la variable x. Il s'agit donc d'une coordonnée cyclique à la quelle correspond la quantité conservée:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} = p_x = const \tag{14}$$

En plus, le Lagrangien est aussi indépendant du temps. La fonction hamiltonienne est donc conservée:

$$h = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + mgz = T + V = E = const \tag{15}$$

2) Le hamiltonien du système est conservé. On peut donc écrire l'équation de Hamilton-Jacobi dans le cas indépendant du temps

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] + mgz = E \tag{16}$$

A l'aide de la mt́hode de séparation des variables, on applique l'ansatz

$$W(x, z) = W_x + W_z \tag{17}$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2\right]+mgz=E \tag{18}$$

$$\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2=2mE-2m^2gz-\left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2 \tag{19}$$

Pour que l'égalité soit satisfaite, les termes qui se trouvent des deux cotés doivent être égales à une constante:

$$\left(\frac{\partial W_x}{\partial x}\right)^2=\alpha_2 \tag{20}$$

$$\left(\frac{\partial W_z}{\partial z}\right)^2=2mE-\alpha_2-2m^2gz \tag{21}$$

L'intégration des deux expressions nous donne:

$$W_x=\sqrt{\alpha_2}x+C_1 \tag{22}$$

$$W_z=-\frac{1}{3m^2g}[2mE-\alpha_2-2m^2gz]^{\frac{3}{2}}+C_2 \tag{23}$$

Et finalment:

$$W(x,z,E,\alpha_2)=\sqrt{\alpha_2}x-\frac{1}{3m^2g}[2mE-\alpha_2-2m^2gz]^{\frac{3}{2}}+C \tag{24}$$

3)

$$-\frac{1}{mg}(2mE-\alpha_2-2m^2gz)^{\frac{1}{2}}=t+C_1 \tag{25}$$

$$z=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2 \tag{26}$$

$$z=-C_1x^2+C_2x+C_3 \tag{27}$$