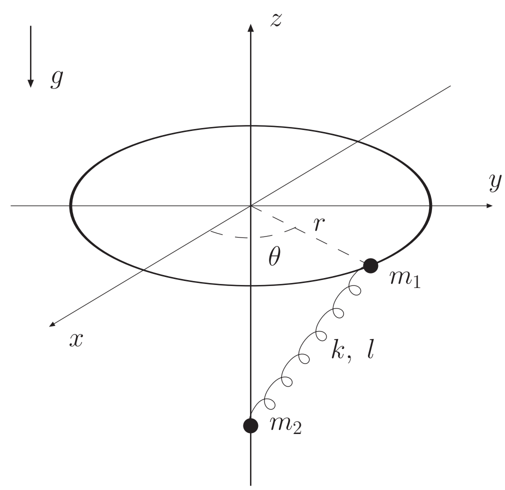
Examen de Mécanique Analytique

Professeur: P. De Los Rios

Epreuve du 22 janvier 2008 - Durée: 4 heures - Sans document

Exercice 1 *(11 points)*



Deux billes sont reliées par un ressort de raideur k et de longueur au repos l ; l'une, de masse m_1, se déplace sur un cercle horizontal de rayon r, alors que l'autre, de masse m_2, se déplace selon un rail vertical. On considère uniquement le cas $l > r$. La gravitation est prise en compte.

1. (i) Ecrire le Lagrangien du système.

   (ii) Trouver les symétries et les quantités conservées (experssion et interprétation).

2. Sans gravitation ($g = 0$)

   (i) Trouver tous les points d'équilibre, préciser s'ils sont stables ou non et justifier.

   (ii) Trouver les fréquences d'oscillation autour des points d'équilibre stables.

   (iii) Relier, si possible, ces fréquences aux symétries trouvées plus haut.

   (iv) Expliquer ce qu'il se passe dans la limite $l \to r$, et pourquoi.

3. Sans gravitation

   (i) Esquisser le potentiel pour la bille 2.

   (ii) Esquisser le portrait de phase (z, p_z) pour différentes énergies. Préciser les points de rebroussement, ainsi que les différents régimes.

4. Avec gravitation

   (i) Sans résoudre explicitement, discuter qualitativement ce qui se passe si l'on ajoute la gravitation. En particulier, expliquer la différence entre les deux situations que l'on pourrait appeler "gravitation faible" et "gravitation forte".

   (ii) Esquisser le potentiel pour la bille 2 dans ces deux situations (sans calculer les points de rebroussement).

   (iii) Esquisser le portrait de phase (z, p_z) pour ces deux situations et pour les différents régimes d'énergie. Préciser à quelle énergie correspond chaque orbite.

Exercice 2 *(6 points)*

Un aventurier se trouvant dans le désert apperçoit une oasis à un angle $\arctan(5/12)$ en-dessus de l'horizontale. Le principe de Fermat dit que la lumière suit les trajectoires minimisant :

$$S = \int n(s)\mathrm{d}s$$

où n est l'indice de réfraction du milieu et s la distance le long de la trajectoire. Dans des conditions de grande chaleur, l'indice de réfraction dépend significativement de la hauteur z en-dessus du sable approximativement par :

$$n(z) = n_0(1 - az)$$

Trouver la trajectoire $z(x)$ suivie par la lumière depuis l'oasis et indiquer à l'aventurier la distance qu'il doit encore parcourir avant un repos bien mérité. Le rayon de courbure de la terre est négligé.

Indication:
$$\mathrm{arccosh}'(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Exercice 3 *(5 points)*

Considérer la transformation:

$$Q = p^\alpha q^\beta$$

$$P = p^\gamma q^\delta$$

définie sur l'ensemble $\{q > 0, p > 0\}$.

1. Deux méthodes sont possibles pour vérifier que la transformation est canonique: la méthode de la matrice jacobienne et la méthode des crochets de Poisson. Trouver les valeures des paramètres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ afin que la transformation soit canonique à l'aide d'une des deux méthodes au choix et vérifier le résultat avec l'autre méthode.

2. Déterminer la fonction génératrice de type deux $F_2(q, P)$ qui engendre la transformation donnée.

Indication:

La fonction génératrice F_2 associée à une transformation canonique est une fonction des anciennes coordonnées q_i, des nouvelles impulsions P_i et du temps. Elle relie les anciennes et les nouvelles coordonnées par les relations:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad \text{et} \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \, .$$

Exercice 4 *(8 points)*

Une particule de masse m est soumise au potentiel:

$$V(q) = \alpha \, |q|$$

1. Dessiner le potentiel et esquisser le portrait de phase.

2. Ecrire le Hamiltonien. Choisir les conditions initiales les plus simples possible pour une énergie totale E et résoudre les équations de Hamilton. Trouver la période T.

3. Trouver à nouveau la période T, cette fois à l'aide de la méthode des variables action-angle. Comparer le résultat avec celui trouvé au point précédant.

4. Par rapport à l'oscillateur harmonique de fréquence w_0, trouver l'énergie E pour la quelle $w = \frac{2\pi}{T} = w_0$ et discuter la solution à l'aide du graphique du potentiel et de l'intuition physique.

Exercice 1 *(11 points)*

1. (i)

$$\mathcal{L}(z,\dot{z},\theta,\dot{\theta}) = \tfrac{1}{2}m_1(r\dot{\theta})^2 + \tfrac{1}{2}m_2\dot{z}^2 - \tfrac{1}{2}k\left(\sqrt{r^2+z^2}-l\right)^2 - m_2gz \tag{1}$$

   (ii)
   - Rotation $\Rightarrow$ moment cinétique selon $z\; = r^2\dot{\theta}$ conservé
   - Temps homogène $\Rightarrow$ fonction hamiltonienne $= T + V$ conservée

2. Sans gravitation ($g = 0$)

   (i) Il y a deux points d'équilibre qui sont donnés par :

$$\bar{z} = \pm\sqrt{l^2 - r^2} \tag{2}$$

   quel que soit θ.
   Selon θ la position n'est pas stable, mais à on le sait déjà vu qu'il y a une symétrie de rotation. Selon z, tout mouvement changerais la longueur du ressort qui est au repos pour $z = \bar{z}\; \Rightarrow$ stable.

   (ii)

$$\omega_\theta = 0 \quad \text{et} \quad \omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}\left[1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2\right]} \tag{3}$$

   (iii) $\omega_\theta = 0 \leftrightarrow$ symétrie de rotation

   (iv) Pour $l \to r$, la fréquence d'oscillation tombe à 0. Ce qui est dû au fait que les points d'équilibre stable et instable se regroupent en un seul, ou, d'un point de vue physique, qu'un petit déplacement change la longueur du ressort seulement $\mathcal{O}(\delta x^2)$ ($\cos(\delta x) = 1 - \frac{1}{2}\delta x^2$), et donc une contribution au potientiel $\mathcal{O}(\delta x^2)$.
   On peut également noter la limite opposée, $l \to \infty$, $\omega = \sqrt{k/m}$, comme pour un oscillateur harmonique en une dimension, ce qui est évident du fait que dans cette limite on peut négliger r, et alors on a effectivement un oscillateur harmonique en une dimension!

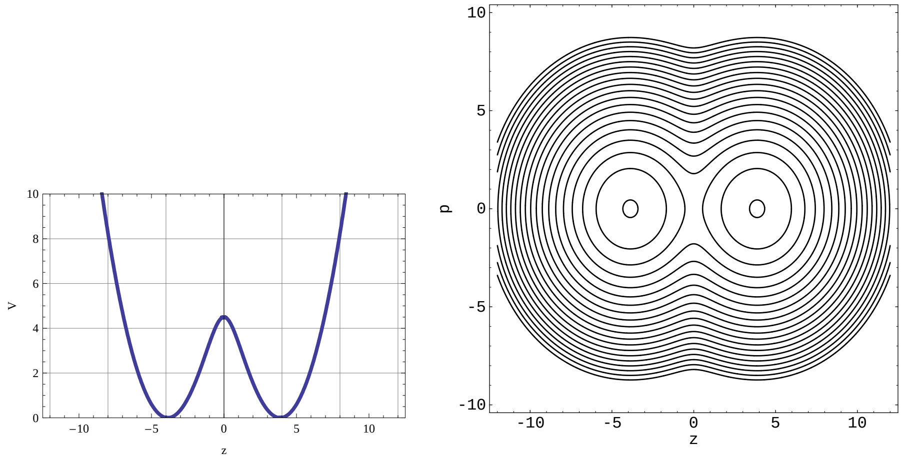
3. Sans gravitation

   (i) Voir figure 1

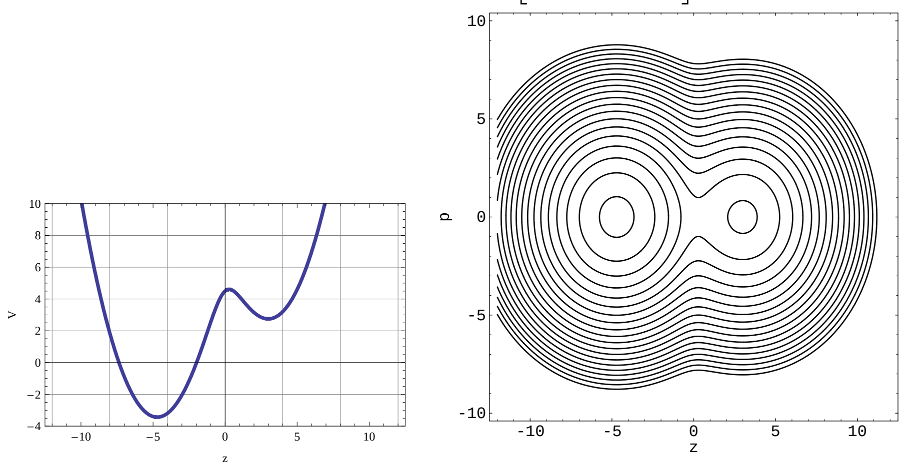
   (ii) Voir figure 1

4. Avec gravitation

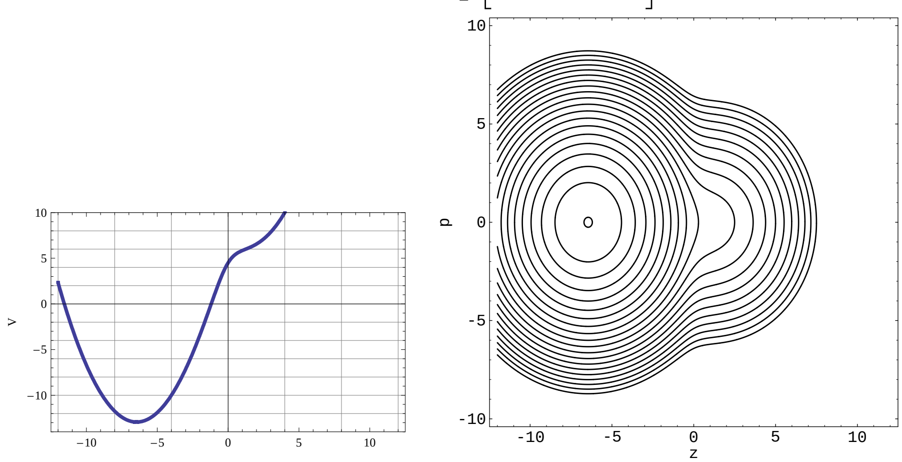
   (i) Si l'on ajoute la graviation, les deux points d'équilibre stable vont descendre. Le point d'équilibre instable qui était en $z = 0$ va monter.
   La position d'en-haut sera de moins en moins stable, jusqu'au point limite ou la gravitation est trop forte pour que le ressort puisse s'y opposer. Il n'y aura alors plus qu'un point d'équilibre stable en $z < 0$.



Sans graviation, $V(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+1} - 4\right]^2$



Graviation faible, $V(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+1} - 4\right]^2 + 0.8x$



Graviation forte, $V(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2+1} - 4\right]^2 + 2.5x$

Figure 1: Potentiel pour la bille 2 dans les différents cas

(ii) Voir figure 1. A noter que pour le dessiner on peut graphiquement additionner le potentiel avec $g = 0$ et une droite.

(iii) Voir figure 1

Exercice 2 *(6 points)*

On choisit notre système de coordonnées de sorte que l'aventurier se trouve en $x = 0$ et l'oasis en $x = l$. De plus on paramétrise la trajectoire par $z(x)$.

La fonctionnelle à minimiser est donnée par $S = \int n(s)\mathrm{d}s$, avec l'élément de chemin $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}z^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z(x)}{\partial x}\right)}$. On obtient donc :

$$S[z(x)] = \int_0^l \mathrm{d}x \cdot n_0(1 - az)\sqrt{1 + z'^2} \tag{4}$$

Les conditions au bord sont données par :

$$z(0) = 0 \quad \text{et} \quad z'(0) = 5/12 \tag{5}$$

L'intégrand ne dépend pas de x, et donc la fonction hamiltonienne est une constante :

$$(1 - az)\sqrt{1 + z'^2} - (1 - az)\frac{z'^2}{\sqrt{1 + z'^2}} = \frac{1 - az}{\sqrt{1 + z'^2}} = C_0 \tag{6}$$

En introduisant $\xi = (1 - az)/a$, et en inversant la relation on trouve :

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{\dfrac{\xi^2}{C_1^2} - 1}} = \mathrm{d}x \tag{7}$$

oú C_1 est juste une redéfinition de C_0. On en tire :

$$\xi(x) = C_1 \cosh\left(\frac{x}{C_1} + C_2\right) \Rightarrow z(x) = \frac{1}{a} - C_1 \cosh\left(\frac{x}{C_1} + C_2\right) \tag{8}$$

En imposant les conditions au bord on trouve :

$$C_2 = -\mathrm{arcsinh}\left(\frac{5}{12}\right) = -\ln\left(\frac{3}{2}\right) \quad \text{et} \quad C_1 = \frac{12}{13a} \tag{9}$$

pour finalement avoir la trajectoire donnée par :

$$z(x) = \frac{1}{a} - \frac{12}{13a}\cosh\left[\frac{13}{12}a\left(x - \frac{12}{13a}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right] \tag{10}$$

d'où l'on tire aisément la distance jusqu'à l'oasis, $z(L) = 0$

$$\boxed{L = \frac{24}{13}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\frac{1}{a}} \tag{11}$$

Exercice 3 *(5 points)*

1) On choisit la méthode des crochets de Poisson pour trouver les valeures des paramètres afin que la transformation soit canonique. On considère le seul crochet de Poisson qui soit non-trivial:

$$\begin{aligned}\{Q,P\} &= \{p^\alpha q^\beta, p^\gamma q^\delta\}\\ &= p^\alpha\{q^\beta, p^\gamma\}q^\delta + \{p^\alpha, q^\delta\}q^\beta p^\gamma\\ &= \beta\gamma p^\alpha q^{\beta-1}p^{\gamma-1}q^\delta - \alpha\delta p^{\alpha-1}q^{\delta-1}q^\beta p^\gamma\\ &= \beta\gamma p^{\alpha+\gamma-1}q^{\beta+\delta-1} - \alpha\delta p^{\alpha+\gamma-1}q^{\beta+\delta-1}\end{aligned}$$

Afin que la condition $\{Q,P\} = 1$ soit satisfaite, nous avons les trois équations

$$\left\{\begin{array}{c}\gamma = 1-\alpha\\ \delta = 1-\beta\\ \beta\gamma - \alpha\delta = 1\end{array}\right. \tag{12}$$

En substituant les deux premières dans la troisième on obtient, finalment, des expression de β, γ et δ en fonction de α. La transformation canoniques est donc donnée par:

$$Q = p^\alpha q^{\alpha+1} \tag{13}$$

$$P = p^{-\alpha+1}q^{-\alpha} \tag{14}$$

On vérifie maintenant le résultat à l'aide de la méthode de la matrice jacobienne. La matrice de la transformation est donnée par:

$$(M\phi^t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial q} & \frac{\partial Q}{\partial p}\\ \frac{\partial P}{\partial q} & \frac{\partial P}{\partial p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha+1)p^\alpha q^\alpha & \alpha p^{\alpha-1}q^{\alpha+1}\\ -\alpha p^{-\alpha+1}q^{-\alpha-1} & (-\alpha+1)p^{-\alpha}q^{-\alpha}\end{pmatrix} \tag{15}$$

La condition pour que la matrice jacobienne de la transformation soit symplectique est donc facilement vérifiée:

$$(M\phi^t)^T J (M\phi^t) = \begin{pmatrix} (\alpha+1)p^\alpha q^\alpha & -\alpha p^{-\alpha+1}q^{-\alpha-1}\\ \alpha p^{\alpha-1}q^{\alpha+1} & (-\alpha+1)p^{-\alpha}q^{-\alpha}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\alpha+1)p^\alpha q^\alpha & \alpha p^{\alpha-1}q^{\alpha+1}\\ -\alpha p^{-\alpha+1}q^{-\alpha-1} & (-\alpha+1)p^{-\alpha}q^{-\alpha}\end{pmatrix} = J$$

2) On cherche un fonction génératrice de type deux. A partir de la transformation donnée, on obtient les expressions suivantes:

$$Q = P^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}q^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{\partial F_2}{\partial P} \tag{16}$$

$$p = (Pq^\alpha)^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{\partial F_2}{\partial q} \tag{17}$$

En intégrant la première en obtient:

$$F_2(q,P) = (1-\alpha)(Pq)^{\frac{1}{1-\alpha}} + f(q) \tag{18}$$

qui, remplacée dans la deuxème nous donne:

$$(q^\alpha P)^{\frac{1}{1-\alpha}} + f'(q) = (q^\alpha P)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{19}$$

$$f'(q) = 0 \tag{20}$$

$$f(q) = C \tag{21}$$

La fonction génératrice de la transformation canonique est donc donnée par:

$$F_2(q, P) = (1 - \alpha)(qP)^{\frac{1}{1-\alpha}} + C. \tag{22}$$

Exercice 4 *(8 points)*

1)

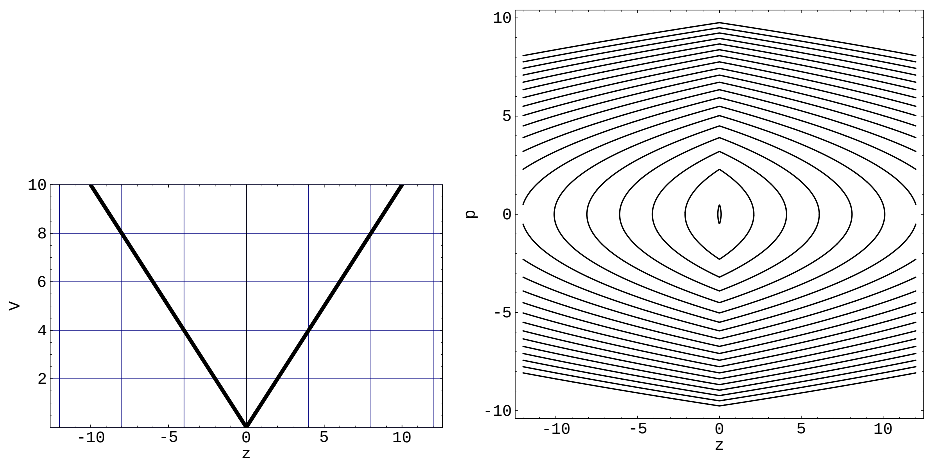


Figure 2: Potentiel et portrait de phase.

2) Le Hamiltonien du système s'écrit:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \alpha\,|q| \tag{23}$$

Les équations de Hamilton sont donc données par:

$$\dot{q} = \frac{p}{m} \tag{24}$$

$$\dot{p} = -\alpha\frac{q}{|q|} \tag{25}$$

On choisit une condition initiale $q(t = 0) = 0$, ce qui nous donne, pour une énergie E, la condition initiale $p(t = 0) = \sqrt{2mE}$. En observant le dessin du potentiel et le portrait de phase on peut se rendre compte que le temps nécessaire pour parcourir une trajectoire entière (période) est donné par quatre fois le temps nécesssaire pour aller du point $q(0) = 0$ au point ou $p(t) = 0$. On peut donc considérer la deuxième équation du mouvement dans le cas $q > 0$ et l'intégrer pour obtenir:

$$p = -\alpha t + p(0) \tag{26}$$

L'impulsion devient $p(t) = 0$ au temps $t = \frac{p(0)}{\alpha} = \frac{\sqrt{2mE}}{\alpha}$. La période sera donc donnée par:

$$T = 4\frac{\sqrt{2mE}}{\alpha} \tag{27}$$

3) Léquation de Hamilton-Jacobi est donnée par:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \alpha\,|q| = E \tag{28}$$

les points de rebroussement sont donnés par $q = \frac{E}{\alpha}$ et $q = -\frac{E}{\alpha}$. La variable action est donc:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{-E/\alpha}^{E/\alpha}\sqrt{2m(E-\alpha\,|q|)}dq = \frac{4\sqrt{2m}}{3\pi\alpha}E^{3/2} \tag{29}$$

On peut maintenant trouver l'expression de l'énergie E en fonction de la variable action I et donc calculer la fréquence:

$$w(E) = \frac{dE}{dI} = \frac{\pi\alpha}{2\sqrt{2m}}E^{-1/2} \tag{30}$$

La période sera:

$$T = \frac{2\pi}{w} = 4\frac{\sqrt{2mE}}{\alpha} \tag{31}$$

4) On pose:

$$w = \frac{\pi\alpha}{2\sqrt{2m}}E^{-1/2} = w_0 \tag{32}$$

On obtient donc:

$$E = \frac{\pi^2\alpha^2}{8mw_0^2} \tag{33}$$