Partiel de Mécanique Analytique

Epreuve du 1 février 2007 - Durée: 110 minutes - Sans document

Indications:
La fonction génératrice F_2 associée à une transformation canonique est une fonction des anciennes coordonnées q_i, des nouvelles impulsions P_i et du temps. Elle relie les anciennes et les nouvelles coordonnées par les relations:

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \quad \text{et} \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \ .$$

Le nouvel Hamiltonien est donné par:

$$K(Q_i, P_i, t) = H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \ .$$

Exercice 1 *(4 points)*

On considère une particule de masse m se déplaçant dans l'espace $\mathbb{R}^3$ soumise à un potentiel

$$V(r, \vartheta) = \frac{\sin^2 \vartheta}{r^2} \ ,$$

où ϑ est l'angle par rapport à l'axe z et r est la distance à l'origine.

a) Trouver le Hamiltonien $H(r, \vartheta, \varphi, p_r, p_\vartheta, p_\varphi, t)$ de la particule en coordonnées sphériques.

b) Montrer que la quantité

$$C(r, \vartheta, \varphi, p_r, p_\vartheta, p_\varphi, t) = -2H(r, \vartheta, \varphi, p_r, p_\vartheta, p_\varphi, t)t + rp_r$$

est conservée.

Exercice 2 *(5 points)*

Considérer le Hamiltonien d'une particule de masse m dans un champ gravitationnel homogène g,

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + mgq \ .$$

a) On veut effectuer un changement de variables

$$(q, p) \to (Q, P)$$

tel que $P = E$ où E est l'énergie mécanique du système. A l'aide des crochets de Poisson, trouver $Q(q, p, t)$ tel que le changement de variables soit une transformation canonique.

b) Résoudre l'équation de Hamilton-Jacobi dépendant du temps et écrire la transformation canonique $F_2(q, P, t)$.

c) Trouver les nouvelles variables (Q, P) en fonction des anciennes (q, p). Comparer le résultat avec celui du point a).

Exercice 3 *(6 points)*

Une particule de masse m se déplace sur l'axe x et est soumise à un potentiel

$$V(x) = \frac{x^3}{3} - l^2 x \ .$$

a) Faire une esquisse du potentiel.

b) Trouver le Hamiltonien de la particule.

c) On suppose pour le reste de l'exercice que la particule effectue de faibles oscillations autour du minimum local du potentiel. Résoudre les équations canoniques et donner la fréquence de ces petites oscillations.

d) Toujours dans cette approximation, résoudre l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi et écrire la transformation canonique $F_2(x, P)$ sous la forme d'une intégrale.

e) Exprimer les nouvelles variables (Q, P) en fonction des anciennes (x, p) (effectuer les intégrales).

Exercice 1

a) Le Hamiltonien de la particule est:

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\vartheta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2(\vartheta)}\right) + \frac{\sin^2(\vartheta)}{r^2}.$$

b) La quantité $C = -2Ht + rp_r$ est conservée si

$$\{C, H\} + \frac{\partial C}{\partial t} = 0.$$

On a d'une part:

$$\{C, H\} = \{-2Ht + rp_r, H\} = -2t\{H, H\} + \{rp_r, H\} = 0 + \frac{p_r^2}{m} - r\frac{\partial H}{\partial r} = 2H,$$

et d'autre part,

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -2H$$

La quantité C est donc bien conservée.

Exercice 2

a) Pour que le changement de variables $(q, p) \to (Q, P)$ soit une transformation canonique, il doit conserver les crochets de Poisson. En particulier il faut que:

$$\{Q, P\} = 1$$

En sachant que $P = E$, on peut écrire:

$$\{Q, P\} = \{Q, E\} = \frac{\partial Q}{\partial q}\frac{p}{m} - \frac{\partial Q}{\partial p}mg = 1$$

L'équation peut être résolue par séparation des variables en posant:

$$Q(q, p, t) = f(q) + g(p) + h(t)$$

L'équation devient alors:

$$\frac{\partial f(q)}{\partial q}\frac{p}{m} - \frac{\partial g(p)}{\partial p}mg = 1$$

On pose:

$$\frac{\partial f(q)}{\partial q} = k$$

$$f(q) = kq + c$$

On substitue dans l'équation et on obtient:

$$g(p) = \frac{1}{m^2 g}\int(-m + kp)dp = \frac{1}{m^2 g}(-mp + k\frac{p2}{2})$$

L'expression de $Q(q, p, t)$ est donc donnée par:

$$Q(q, p, t) = kq + k\frac{p2}{2m^2 g} - \frac{p}{mg} + h(t) = \frac{k}{mg}H - \frac{p}{mg} + h(t)$$

b) On écrit l'equation de Hamilton-Jacobi dépendante du temps:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial f}{\partial q}\right)2 + mgq + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

On cherche une solution sous la forme

$$f(q, t) = f_1(q) + f_2(t)$$

En posant:

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} + \alpha = 0$$

on obtient:

$$\frac{\partial f_1}{\partial q} = \pm\sqrt{2m(\alpha - mgq)}dq$$

La transformation est finalment donnée par:

$$f(q, P, t) = -\frac{1}{3m^2 g}\left[2m\left(P - mgq\right)\right]^{\frac{3}{2}} - Pt + c$$

c) On exprime les nouvelles variables (Q, P) en fonction des anciennes (q, p) à l'aide de la transformation $f(q, p, t)$:

$$p = \frac{\partial f}{\partial q} = \sqrt{2m\left(P - mgq\right)}$$

On obtient donc:

$$P(q, p) = \frac{p^2}{2m} + mgq$$

Pour trouver $Q(q, p)$ on utilise à nouveau la transformation $f(q, p, t)$ et puis on remplace le $P(q, p)$:

$$Q(q, p) = \frac{\partial f}{\partial P} = -\frac{1}{mg}\sqrt{2m\left(P - mgq\right)} - t = -\frac{p}{mg} - t$$

Le résultat correspond à celui trouver au point a) (à moins du premier terme constant).

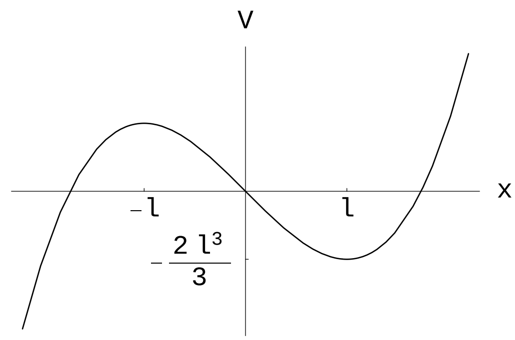

Figure 1: Esquisse du potentiel $V(x)$.

Exercice 3

b)

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{x^3}{3} - l^2 x \tag{1}$$

c) On effectue le développement limité du potentiel autour de sont minimum local $x_0 = l$:

$$V(x) = V(x_0) + \underbrace{V'(x_0)}_{0}(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 = -\frac{2l^3}{3} + l(x - l)^2 \ .$$

Alors, en ce qui suit, on considère l'approximation du Hamiltonien (1)

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{2l^3}{3} + l(x - l)^2$$

qui est valable pour $x \approx l$. Les équations canoniques sont

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \quad \text{et} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2l(x - l) \ .$$

En introduisant la première équation dans la deuxième, on obtient

$$m\ddot{x} + 2l(x - l) = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = l + a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \ ,$$

où $\omega = \sqrt{\frac{2l}{m}}$ est la fréquence des petites oscillations et a et b sont des constantes dépendantes des conditions initiales.

d) L'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi s'écrit

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - \frac{2l^3}{3} + l(x - l)^2 = E \ ,$$

de laquelle on trouve la solution

$$W(x,E) = \int_0^x d\widetilde{x}\ \sqrt{2m\left[E + \frac{2l^3}{3} - l(\widetilde{x}-l)^2\right]}\ .$$

La fonction génératrice devient

$$F_2(x,P) = \int_0^x d\widetilde{x}\ \sqrt{2m\left[P + \frac{2l^3}{3} - l(\widetilde{x}-l)^2\right]}$$

e) Pour la variable Q on trouve

$$Q = \frac{\partial F_2}{\partial P} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^x \frac{d\widetilde{x}}{\sqrt{P + \frac{2l^3}{3} - l(\widetilde{x}-l)^2}}\ .$$

Avec la substitution

$$\sqrt{P + \frac{2l^3}{3}}\sin(u) = \sqrt{l}(\widetilde{x}-l)$$

on obtient

$$Q = \sqrt{\frac{m}{2l}}u = \frac{1}{\omega}\ \arcsin\left[\sqrt{\frac{l}{P + \frac{2l^3}{3}}}(x-l)\right]\ .$$

Alors, les anciennes variables en fonction des nouvelles sont

$$x(Q,P) = l + \sqrt{\frac{P}{l} + \frac{2l^2}{3}}\sin(\omega Q)\ ,$$
$$p(Q,P) = \sqrt{2m\left(P + \frac{2l^3}{3}\right)}\cos(\omega Q)\ .$$