Partiel de Mécanique Analytique

Epreuve du 2 février 2006 - Durée: 100 minutes

Exercice 1 *(14 points)*

Une particule se déplaçant sur l'axe x, est soumise à un potentiel $V(x) = V_0 \sin^2(x)$.

a) Esquisser le potentiel et le portrait de phase. Pour le portrait de phase, considérer différentes orbites, avec $E < V_0$, $E = V_0$ et $E > V_0$.

b) Ecrire le Hamiltonien et déterminer la forme de la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi. Laisser le résultat sous la forme d'une intégrale.

c) Dans le cas de faibles oscillations autour de $x = 0$, calculer explicitement la variable action I.

Indication: $\int \sqrt{1-x^2}dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right)$.

d) Trouver la fréquence des petites oscillations en fonction de l'énergie $\omega(E)$ et discuter le résultat obtenu.

Exercice 2 *(16 points)*

Une particule se déplaçant sur l'axe x, est soumise à un potentiel

$$V(x) = \begin{cases} ax & x > 0 \\ -bx & x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

avec a et b deux constantes positives.

a) Esquisser le potentiel et le portrait de phase. Pour le portrait de phase, considérer quatre différents cas: $a = b = 1$, $a = 2b = 2$, $a = \infty$ et $b = 1$, $a = 0$ et $b = 1$.

b) Ecrire le Hamiltonien et résoudre les équations de Hamilton. Déterminer la période $T(E)$ du mouvement.

b) Déterminer la forme de la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi. Laisser le résultat sous la forme d'une intégrale.

c) Calculer explicitement la variable action I.

d) A l'aide de la variable action, retrouver la période $T(E)$ et comparer au point b). Discuter le résultat obtenu dans les deux cas limite: $a = \infty$ et $b = 1$, $a = 0$ et $b = 1$.

Exercice 1

(b) Hamiltonien du système:

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V_0 \sin^2(x).$$

L'équation de Hamilton-Jacobi est :

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) + V_0 \sin^2(x) = E.$$

On trouve:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \pm\sqrt{2m(E - V_0 \sin^2(x))},$$

que l'on résoud formellement:

$$W(x,E) = \pm \int_0^x \sqrt{2m(E - V_0 \sin^2(x'))}dx'$$

(c) Pour les faibles oscillations, on pose $\sin^2(x) = x^2 + \mathcal{O}(x^4)$. La variable action est donnée par $I = \oint W(x,E)$, où on intègre sur un chemin fermé dans l'espace de phase. Les points extrêmes du mouvement sont $x_\pm = \pm\sqrt{\frac{E}{V_0}}$ et donc:

$$I = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{x_-}^{x_+} dx\sqrt{2m(E - V_0 x^2)} - \int_{x_+}^{x_-} dx\sqrt{2m(E - V_0 x^2)}\right).$$

On effectue le changement de variable $y = \sqrt{\frac{V_0}{E}}x$:

$$I = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{E}{V_0}}dy\sqrt{2mE}\sqrt{1-y^2}$$

et on effectue l'integrale avec l'indication:

$$I = E\sqrt{\frac{m}{2V_0}}$$

(d) On inverse la relation précédente pour trouver $E = E(I) = I\sqrt{\frac{2V_0}{m}}$, et la fréquence est $\omega = \frac{dE}{dI} = \sqrt{\frac{2V_0}{m}}$. La fréquence ne dépend pas de l'énergie (pour des énergies faibles), ce qui est le comportement d'un oscillateur harmonique.

Exercice 2

(b) Le Hmiltonien est:

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + V(x) = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} + ax & x > 0 \\ \frac{p^2}{2m} - bx & x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Les équtions de Hamilton sont:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \tag{3}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = \begin{cases} -a & x > 0 \\ b & x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

La solution de la deuxième équation est

$$p(t) = -at + p(0) \tag{5}$$

$$p(t) = bt + p(0) \tag{6}$$

Notons T_1 respectivement T_2 les temps mis par le système pour aller du point $x = 0$ au point maximum $x_M > 0$ respectivement $x_M < 0$ atteint lors du mouvement. La période totale du système est alors $T = 2T_1 + 2T_2$:

$$p(T_1) = -aT_1 + \sqrt{2mE} \tag{7}$$

$$p(T_2) = bT_2 - \sqrt{2mE} \tag{8}$$

On obtient donc:

$$T = 2\frac{\sqrt{2mE}}{a} + 2\frac{\sqrt{2mE}}{b} \tag{9}$$

(c) L'équation de H-J:

$$\frac{1}{2m}(\frac{\partial W}{\partial x})^2 + V(x) = E \tag{10}$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \pm\sqrt{2m(E - V(x))} \tag{11}$$

(d) La variable action est donnée par $I = \oint W(x, E)$, où on intègre sur un chemin fermé dans l'espace de phase. Les points extrêmes du mouvement sont:

$$E = V(x) \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{E}{a} \\ x = -\frac{E}{b} \end{cases} \tag{12}$$

On obtient:

$$I = \frac{1}{2\pi}(-\int_{\frac{E}{a}}^{0} dx\sqrt{2m(E - ax)} + \int_{0}^{\frac{E}{a}} dx\sqrt{2m(E - ax)} +$$

$$\int_{-\frac{E}{b}}^{0} dx\sqrt{2m(E + bx)} - \int_{0}^{-\frac{E}{b}} dx\sqrt{2m(E + bx)}).$$

L'intégration donne:

$$I = \frac{1}{\pi}(2mE)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{3ma} + \frac{1}{3mb}\right)$$

(e) On inverse la relation précédente pour trouver $E = E(I)$, et on retrouve la période du mouvement du point (b) a l'aide de $\frac{2\pi}{T} = \frac{dE}{dI}$.