Partiel de Mécanique Analytique

Epreuve du 15 novembre 2007 - Durée : 110 minutes - Sans document

Exercice 1 *(12 points)*

On considère deux billes de masse égale m, chacune contrainte à se mouvoir sur un rail rectiligne horizontal (voir figure), reliées par un ressort de raideur k et de longueur au repos nulle. La distance le long de l'axe z entre les deux rails est égale à h. La pesanteur ne jouant aucun rôle dans ce problème, on la laisse de côté.

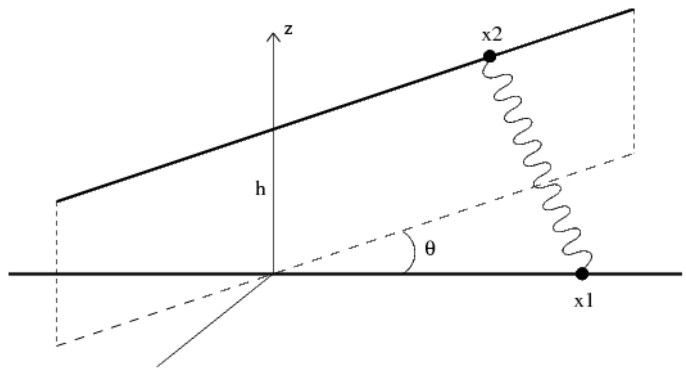

FIG. 1 – On pose $x_i = 0$ lorsque les billes sont sur l'axe z. L'angle θ est fixé.

1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Pourquoi la position $(x_1, x_2) = (0, 0)$ est-elle un point d'équilibre stable ? Trouver les fréquences des oscillations autour de ce point, et décrire les mouvements correspondant à chaque fréquence. Ce résultat est-il valable quelle que soit l'amplitude des oscillations ?
3. Pour $\theta = 0$:
   - Trouver la symétrie du système ($x_i \to x_i(s)$), et la quantité conservée correspondante grâce au théorème de Nœther :

$$C = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \left. \frac{\partial x_i(s)}{\partial s} \right|_{s=0}$$

   - Relier les fréquences d'oscillation à ces symétries.
4. Même chose que 3) mais pour $\theta = \pi/2$.

Exercice 2 *(6 points)*

Un train doit relier deux gares distantes de l en un temps T. On veut choisir la vitesse $v(t)$ de telle façon à réaliser le voyage en causant le moins de désagrément possible aux voyageurs.

Ceux-ci sont dérangés d'une part par les vibrations, proportionnelles à $v(t)^2$, ainsi qu'aux accélérations, effet propotionnel à $a(t)^2$. De façon générale on peut donc écrire le désagrément à un instant donné comme :

$$c_v v(t)^2 + c_a a(t)^2$$

Pour assurer la sécurité des voyageurs, on imposera également que le train soit à l'arrêt aux deux gares.

1. Ecrire la fonctionnelle $D[v(t), \dot{v}(t), t]$ qui donne le désagrément sur le tajet total.
2. Ecrire la contrainte $C[v(t), t]$ que doit satisfaire le train.
3. Trouver les consignes $(v(t))$ à donner au conducteur du train pour minimiser le désagrément des voyageurs.

Exercice 3 *(7 points)*

On considère une particule de masse $m = 1$ en deux dimensions soumise à un potentiel de la forme

$$V(x, y) = \frac{1}{32}(x^2 + y^2)$$

1. Ecrire le Lagrangien du système.
2. Déterminer les quantités conservées.
3. Pour un moment cinétique donné L, écrire le Lagrangien en fonction de r et trouver la fréquence des oscillations autour du minimum du potentiel efficace V_{eff}.

[**Remarque :** On rapelle que l'hamiltonien du système est donné par $T + V$ et que le potentiel efficace V_{eff} est definie comme la partie du hamiltonien qui ne dépend pas explicitement des vitesses.]

Exercice 1

1) Le terme cinétique est simplement donné par :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) \tag{1}$$

Pour le potentiel, on a $V = \frac{1}{2}kl^2$, où l est la longueur du ressort. Les positions des billes dans le repère cartésien sont $\mathbf{p_1} = (0, x_1, 0)$ et $\mathbf{p_2} = (-x_2 \sin\theta, x_2 \cos\theta, h)$. Avec $l^2 = (\mathbf{p_1} - \mathbf{p_2})^2$ on trouve donc le Lagrangien :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2\cos\theta + h^2) \tag{2}$$

2) Une position est stable si elle correspond à un minimum du potentiel. Dans notre cas, celui-ci est proportionnel à l^2, dont il nous faut trouver le minimum, qui est h^2. Pour $\theta \neq 0, \pi$, cette valeur n'est obtenue qu'en $(0, 0)$. Si les deux axes sont parallèles, on a une symétrie de translation.

Plus formellement, on peut arriver à cette conclusion en regardant la matrice hessienne du potentiel (i.e. deuxièmes dérivées) et en vérifiant qu'elle est définie positive.

Les équations du mouvement sont données par :

$$m\ddot{x}_1 + k(x_1 - x_2\cos\theta) = 0 \quad \text{et} \quad (1 \leftrightarrow 2) \tag{3}$$

On a donc une équation du deuxième degré. Pour la résoudre, on fait l'Ansatz $\big(x_1(t), x_2(t)\big) = \big(\bar{x}_1, \bar{x}_2\big)e^{i\omega t}$, qui conduit à l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} -m\omega^2 + k & -k\cos\theta \\ -k\cos\theta & -m\omega^2 + k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = 0$$

où $\bar{x}_i$ sont juste deux nombres. Pour que cette équation ait une solution, le déterminant de la matrice doit être nul, ce qui conduit aux fréquences d'oscillation :

$$\omega_\pm = \sqrt{\frac{k}{m}(1 \pm \cos\theta)} \tag{4}$$

Il reste à trouver les déplacements associés. Pour cela il faut résoudre () avec $\omega = \omega_\pm$:

$$-k\cos\theta \begin{pmatrix} \pm 1 & +1 \\ +1 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1^\pm \\ \bar{x}_2^\pm \end{pmatrix} = 0$$

Et donc $\bar{x} = (+1, \mp 1)$. ω_+ est associé à des déplacements en direction opposée, alors que ω_- correspond à un déplacement dans la même direction.

Si on prend θ entre $]0, \frac{1}{2}\pi[$, ω_+ correspond aux oscillations autour du grand angle $(\pi - \theta)$, le ressort est plus vite tendu, la force de rappel plus forte, et donc la fréquence d'oscillation plus élevée que pour ω_- qui correspond aux oscillations autour du petit angle (θ).

Pour obtenir ce résultat, nous n'avons fait aucune approximation ; le Lagrangien est quadratique dès le début. L'amplitude des oscillations n'est donc, d'un point de vue théorique, aucunement limitée.

Une autre façon de le voir est de ce rendre compte que si dans le Lagrangien, on avait fait le changement d'unité $x_i \to \lambda x_i$, on aurait juste mulitplié le Lagrangien par λ et donc laissé la physique intacte ; invariance sous symétrie d'échelle.

3) Le Lagrangien pour $\theta = 0$ s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k((x_1 - x_2)^2 + h^2) \tag{5}$$

On y repère une symétrie de translation :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & \to & x_1 + s \\ x_2 & \to & x_2 + s \end{array} \right. \tag{6}$$

qui correspond bien à ce qu'on observe sur le système égalment. La quantité conservée est donc la quantité de mouvement le long de l'axe y, ce qui peut être montré par calcul :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial(x_i + s)}{\partial s}\right|_{s=0} = 1 \quad \Rightarrow \quad C = m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \tag{7}$$

Dans la partie précédente on avait trouvé les fréquences des petites oscillations, ici elles se réduisent à $\sqrt{2\frac{k}{m}}$, 0. La deuxième fréquence correspond aux mouvements dans la même direction. Donc, ici, dans le sens de la symétrie de translation. Il est clair que dans cette direction il n'y aura pas d'oscillation, et donc la fréquence associée est nulle. Cette fréquence est appelée un mode zéro.

4) Le Lagrangien pour $\theta = \pi/2$ s'écrit :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2 + h^2) \tag{8}$$

On reconnaît, au h^2 près, le Lagrangien d'un oscillateur harmonique en 2D. Il y a une symétrie de rotation :

$$\left\{ \begin{array}{lcr} x_1 & \to & \cos(s)x_1 + \sin(s)x_2 \\ x_2 & \to & -\sin(s)x_1 + \cos(s)x_2 \end{array} \right. \tag{9}$$

Ici, contrairement au cas précédent, on ne peut pas observer cette symétrie sur le système vu qu'on mélange x_1 et x_2. Il faut le voir comme une symétrie du Lagrangien. Mais on sait quand-même quelle est la quantité conservée, le moment cinétique selon l'axe z. A nouveau, on peut s'en assurer en faisant le calcul :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i \quad \text{et} \quad \left.\frac{\partial(\cos(s)x_{1/2} \pm \sin(s)x_{2/1})}{\partial s}\right|_{s=0} = \pm x_{2/1}$$

$$\Rightarrow \quad C = m(\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1) \tag{10}$$

Les fréquences des oscillations sont ici données par $\sqrt{k/m}$ et $\sqrt{k/m}$. Si l'on repense au fait que c'est un oscillateur harmonique en 2D, la symmétrie sous rotation donne nécessairement que les fréquences des oscillations dans les différentes directions sont les mêmes. Le spectre est dégénéré par symétrie. Et si l'on regarde les déplacements associés à chaque frquence, on se rend compte que d'un point de vue géométrique c'est les mêmes.

Exercice 2

1) Le désagrément total est l'intégrale du désagrément à un instant donné entre $t = 0$ et $t = T$, avec $a(t) = \dot{v}(t)$:

$$D[v(t), \dot{v}(t), t] = \int_0^T dt\big(c_v v(t)^2 + c_a \dot{v}(t)^2\big) \tag{11}$$

2) La contrainte que doit satisfaire le train, est simplement de relier les deux gares en un temps donné, et donc de parcourir la distance l en un temps T :

$$\int_0^T dt v(t) = l \tag{12}$$

3) Pour trouver la conduite optimale, on doit minimiser :

$$F[v, \dot{v}, t, \lambda] = \int_0^T dt\big(c_v v(t)^2 + c_a \dot{v}(t)^2 + \lambda v(t)\big) \tag{13}$$

Imposer les conditions au bord sur cette solution, puis l'insérer dans (12) pour fixer les constantes.

Les équations d'Euler-Lagrange donnent :

$$2c_a\ddot{v} - 2c_v v - \lambda = 0 \tag{14}$$

La solution générale de l'équation homogène (avec $\lambda = 0$) est une somme d'exponentielles réelles qui peuvent être récrites sous la forme :

$$A\cosh(kt) + B\sinh(kt) \tag{15a}$$

où $k = \sqrt{c_v/c_a}$; à quoi il faut ajouter une solution particulière :

$$-\frac{\lambda}{2c_v} \tag{15b}$$

Ensuite il faut imposer les conditions au bord, $v(0) = v(T) = 0$, ce qui donne :

$$A = \frac{\lambda}{2c_v} \quad \text{et} \quad B = \frac{\lambda}{2c_v}\frac{1-\cosh(kT)}{\sinh(kT)} \tag{16}$$

et donc :

$$v(t) = \frac{\lambda}{2c_v}\left[\cosh(kt) - 1 + \frac{1-\cosh(kT)}{\sinh(kT)}\sinh kt\right] \tag{17}$$

En insérant cette fonction dans (12) on obtient λ :

$$\lambda = \frac{2klc_v\sinh(kT)}{2[\cosh(kT)-1] - kT\sinh(kT)} \tag{18}$$

et donc l'expression finale pour v :

$$v(t) = kl\frac{\sinh(kT)[\cosh(kT)-1] + [1-\cosh(kT)]\sinh(kt)}{2[\cosh(kT)-1] - kT\sinh(kT)} \tag{19}$$

Exercice 3

1) Le Lagrangien du système exprimé en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{32}(x^2 + y^2)$$

Pour la suite de l'exercice on va considerer le Lagrangien exprimé en coordonnées polaires :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{1}{32}r^2$$

2) On remarque que la fonction de Lagrange ne dépend pas explicitement de la variable *theta*. Nous avons donc une quantité conservée associée à cette variable cyclique

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = r^2\dot{\theta} = const$$

Il s'agit du moment cinétique. Le Lagrangien ne dépend pas non plus du temps t. La fonction hamiltonienne est donc conservée

$$h = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}}\dot{r} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\dot{\theta} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{32}r^2$$

et elle correspond à l'énergie mécanique $T + V$ du système.

3) Pour un moment cinétique donné L, nou s pouvons écrire le Lagrangien en fonction de r seul :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2}\right) - \frac{1}{32}r^2$$

La fonction hamiltonienne devient alors :

$$h = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2}\right) + \frac{1}{32}r^2$$

Le potentiel efficace V_{eff}, définie comme la partie du hamiltonien qui ne dépend pas explicitement des vitesses, est donc donné par

$$V_{eff} = \frac{L^2}{2r^2} + \frac{1}{32}r^2$$

La dérivée première de V_{eff} par rapport à r révèle que le minimum se trouve en $r_{min} = 2\sqrt{L}$. Nous pouvons donc développer le potentiel efficace autour de ce minimum :

$$\begin{aligned} V_{eff}(r) &= V_{eff}(r = r_{min}) + \left.\frac{dV_{eff}}{dr}\right|_{r=r_{min}}(r - r_{min}) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2V_{eff}}{dr^2}\right|_{r=r_{min}}(r - r_{min})^2 + ... \\ &= \frac{1}{8}z^2 + ... \end{aligned}$$

ou $z = (r - r_{min})$. On peut donc écrire le Lagrangien comme

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{8}z^2$$

L'équation du mouvement en z qui en dérive

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = \ddot{z} + \frac{1}{4}z = 0$$

correspond à l'équation de l'oscillateur harmonique avec fréquence $w = \frac{1}{2}$.