Partiel de Mécanique Analytique

Epreuve du 14 décembre 2006 - Durée: 110 minutes - Sans document

Exercice 1 *(6 points)*

Une particule de masse m est attachée à un ressort de longeur au repos l_0 et de constante élastique k. L'autre extrémité du ressort est fixée à l'origine et la masse se déplace librement sur le plan horizontal.

a) Ecrire le Lagrangien du système et dériver les équations du mouvement.

b) On considère un mouvement avec vitesse angulaire ω constante. Que vaut l'allongement du ressort.

c) On considère maintenant que le mouvement précédent est perturbé par des petites oscillation du ressort. (La longueur du ressort varie d'une petite quantité $h(t)$). Trouver la fréquence de ces petites oscillations.

d) Que se passe-t-il physiquement si ω est très grand?

Exercice 2 *(4 points)*

Deux particules ponctuelles de masses identiques sont reliée entre elles par un ressort de longueur au repos l_0 et de constante élastique k. Ce système se déplace librement dans le plan horizontal.

a) Ecrire le Lagrangien de ce système.

b) Trouver et interpréter toutes les quantités conservées à l'aide de vos méthodes préférées.

Exercice 3 *(7 points)*

Un marcheur veut traverser un plan (x, y) du point (-1,1/4) au point (1,1/4). Le plan est recouvert d'une couche de neige de profondeur croissante selon l'axe y. L'épaisseur de neige fait qu'il avance avec une vitesse $v(y) = \frac{1}{\sqrt{1+y}}$.

a) Trouver la trajectoire $y(x)$ qui minimise le temps nécessaire au marcheur pour sa traversée.

b) Discuter les 2 solutions possibles.

Exercice 1

a) Le Lagrangien du système exprimé en coordonnées polaires (r, θ) est donné par:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{k}{2}(r - l_0)^2 \tag{1}$$

Les équations du mouvement pour les deux coordonnées sont donc:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - k(r - l_0) \tag{2}$$

$$mr^2\ddot{\theta} = 0 \tag{3}$$

A partir de la deuxième équation on peut déduire:

$$L_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} = const \tag{4}$$

b) On considère le mouvement avec vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ constante. Ceci implique $r = const$ et donc $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$. A l'aide de la premiére équation du mouvement on obtient:

$$mr_0\omega^2 = k(r_0 - l_0)) \tag{5}$$

Le rayon est donné par:

$$r_0 = \frac{kl_0}{k - m\omega^2} \tag{6}$$

et l'allongement du ressort est finalement:

$$r_0 - l_0 = \frac{kl_0}{k - m\omega^2} - l_0 = \frac{ml_0\omega^2}{k - m\omega^2} \tag{7}$$

c) Dans le cas d'un mouvement perturbé par des petites oscillation du ressort on peut écrire la longueur du ressort comme:

$$r = r_0 + h(t) \tag{8}$$

et la substituer dans la première équation du mouvement:

$$m\ddot{h} = mr_0\omega^2 + mh\omega^2 - k(r_0 - l_0) - kh = (m\omega^2 - k)h \tag{9}$$

La fréquence des petites oscillations est:

$$\omega_{osc} = \sqrt{\frac{k}{m} - \omega^2} \tag{10}$$

d) Si ω est très grand l'argument de la racine dans l'expression de la fréquence des petites oscillations devient imaginaire. Physiquement, le ressort ne peut plus supporter l'effet de la force centrifuge est il est arraché de son point fixe.

Exercice 2

a) On paramétrise les masses par les coordonnées cartésiennes (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et donc on obtient

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) && (11)\\
V &= \frac{k}{2}(d - l_0)^2 = \frac{k}{2}\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l_0\right)^2 && (12)\\
L = T - V &= \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) - \frac{k}{2}\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l_0\right)^2 \; . && (13)
\end{aligned}
$$

b) D'abord on remarque que la fonction de Lagrange ne dépend pas explicitement du temps,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \; ,$$

alors la fonction hamiltonienne est conservé

$$
\begin{aligned}
h &= \dot{x}_1 \frac{\partial L}{\dot{x}_1} + \dot{y}_1 \frac{\partial L}{\dot{y}_1} + \dot{x}_2 \frac{\partial L}{\dot{x}_2} + \dot{y}_2 \frac{\partial L}{\dot{y}_2} - L \\
&= \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{k}{2}\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l_0\right)^2 \; ,
\end{aligned}
$$

ce qui montre, que la fonction hamiltonienne correspond à l'énergie mécanique,

$$h = T + V \; .$$

Remarque:
Le *Hamiltonien* est donné par

$$H = \frac{1}{2m}(p_{x_1}^2 + p_{y_1}^2 + p_{x_2}^2 + p_{y_2}^2) + \frac{k}{2}\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l_0\right)^2 \; .$$

Pour trouver les autres quantités conservées, il existe une variété de méthodes:

1. **Equations du mouvement:**
   Les équations de Lagrange pour le Lagrangien (13) sont:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(m\dot{x}_1) &= -k\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l_0\right) && (14)\\
\frac{d}{dt}(m\dot{x}_2) &= k\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l_0\right) && (15)\\
\frac{d}{dt}(m\dot{y}_1) &= -k\frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l_0\right) && (16)\\
\frac{d}{dt}(m\dot{y}_2) &= k\frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} - l_0\right) \; . && (17)
\end{aligned}
$$

   En prenant les sommes de (14)+(15) et (16)+(17), on trouve que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2) &= 0 && (18)\\
\frac{d}{dt}(m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2) &= 0 \; , && (19)
\end{aligned}
$$

et alors les composantes selon x et y de la quantité de mouvement totale sont conservées,

$$P_x = m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 = \text{const} \tag{20}$$
$$P_y = m\dot{y}_1 + m\dot{y}_2 = \text{const}\ . \tag{21}$$

2. **Changement de variables (1):**
Avec des nouvelles coordonnées $\hat{x}_1$, $\hat{y}_1$, $\hat{x}$, $\hat{y}$ définies par

$$\hat{x}_1 = x_1 \qquad\qquad \hat{x} = x_2 - x_1$$
$$\hat{y}_1 = y_1 \qquad\qquad \hat{y} = y_2 - y_1$$

le Lagragnien devient

$$L = \frac{m}{2}\left[\dot{\hat{x}}_1^2 + \dot{\hat{y}}_1^2 + (\dot{\hat{x}}_1 + \dot{\hat{x}})^2 + (\dot{\hat{y}}_1 + \dot{\hat{y}})^2\right] - \frac{k}{2}\left(\sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2} - l_0\right)^2\ .$$

Les coordonnées $\hat{x}_1$ et $\hat{y}_1$ sont maintenant des variables cycliques, donc

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{x}}_1} = 2m\dot{\hat{x}}_1 + m\dot{\hat{x}} = \text{const} \tag{22}$$
$$P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{y}}_1} = 2m\dot{\hat{y}}_1 + m\dot{\hat{y}} = \text{const}\ . \tag{23}$$

On retrouve les deux composante de la quantité de mouvement totale.

3. **Théorème de Noether:**
Le Lagrangien (13) est invariant par les translations selon x:

$$x_1(s) = x_1 + s \qquad\qquad x_2(s) = x_2 + s$$
$$y_1(s) = y_1 \qquad\qquad y_2(s) = y_2$$

et selon y:

$$x_1(s') = x_1 \qquad\qquad x_2(s') = x_2$$
$$y_1(s') = y_1 + s' \qquad\qquad y_2(s') = y_2 + s'$$

Le théorème de Noether nous donne tout de suite les quantités conservées correspondantes

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\frac{\partial x_2}{\partial s} = m\dot{x}_1 + m\dot{x}_2 = \text{const}$$
$$P_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_1}\frac{\partial y_1}{\partial s'} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_2}\frac{\partial y_2}{\partial s'} = m\dot{y}_1 + m\dot{y}_2 = \text{const}\ .$$

4. **Changement de variables (2):**
On obtient un autre changement de variables possible, quand on passe au référentiel du centre de masse

$$x_1 = x_c + r\cos\vartheta \qquad\qquad x_2 = x_c - r\cos\vartheta$$
$$y_1 = y_c + r\sin\vartheta \qquad\qquad y_2 = y_c - r\sin\vartheta\ ,$$

où (x_c, y_c) est la position du centre de masse. Le Lagrangien s'écrit

$$L = m(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2) - \frac{k}{2}\left(4r^2 - l_0^2\right) \ .$$

Les trois variables cycliques sont x_c, y_c et ϑ est le quantités conservées sont les composantes de la quantité de mouvement du centre de masse selon x et y,

$$P_{cx} = 2m\dot{x}_c = \text{const}$$
$$P_{cy} = 2m\dot{y}_c = \text{const}$$

et le moment cinétique par rapport au centre de masse

$$L_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = mr^2\dot{\vartheta} = \text{const} \ .$$

Exercice 3

Le temps de parcours est donné par:

$$T = \int dx \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)}$$

où $y' = \frac{dy}{dx}$ et $\sqrt{1+y'^2}dx$ est la longueur d'un élément de trajectoire. Le "Lagrangien" à minimiser ($L = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)}$) ne dépend pas explicitement de x, on a donc la "fonction hamiltonienne" qui est conservée:

$$h = y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = \frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\sqrt{1+y} - \sqrt{1+y'^2}\sqrt{1+y} = K = \text{constante}$$

De cette relation, on tire

$$\frac{y'}{\sqrt{1-K^2+y}} = \frac{1}{K}.$$

On peut intégrer les deux côtés de l'égalité par rapport à x pour trouver:

$$2\sqrt{1-K^2+y} = Kx + C;$$

d'oũ

$$y = (\frac{x}{2K} + \frac{C}{2})^2 - 1 + K^2.$$

La forme générale du mouvement est une parabole, et les constantes K et C sont obtennues en imposant les conditions au bords:

$$\begin{aligned} y(-1) &= \frac{1}{4} = (-\frac{1}{2K} + \frac{C}{2})^2 - 1 + K^2, \\ y(1) &= \frac{1}{4} = (\frac{1}{2K} + \frac{C}{2})^2 - 1 + K^2. \end{aligned}$$

En soustrayant ces deux équations, on trouve $C/K = 0$ d'où $C = 0$. En remplaçant $C = 0$ dans l'une des équation précédente, on obtient une équation pour K:

$$K^4 - \frac{5}{4}K^2 + \frac{1}{4} = 0,$$

qui admet les solutions suivantes:

$$K = \pm 1; \ \ \pm\frac{1}{2}.$$

Ces différentes solutions donne lieux aux mouvements suivants:

$$y = \frac{1}{4}x^2 \quad \text{pour} \quad K = \pm 1 \tag{24}$$

$$y = x^2 - \frac{3}{4} \quad \text{pour} \quad K = \pm\frac{1}{2} \tag{25}$$

La première solution est relativement proche de la ligne droite, le marcheur se décale légérement là où la neige est moins épaisse, et le second trajet est long mais profite d'une vitesse largement suppérieure.

Le temps de parcours pour les trajectoires sont:

$$t_1 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+y'^2}\sqrt{1+y^2}dx = \int_{-1}^{1} \left(1 + \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{13}{6}$$

$$t_2 = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+y'^2}\sqrt{1+y^2}dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(1+4x^2\right) dx = \frac{14}{6}$$

Le second trajet est donc très légérement plus long! Il est très interessant de voir si ce second trajet correspond a un minimum local où à un maximum local. Cette question est largement trop compliquée pour être résolue dans le cadre d'un examen du cours de mécanique analytique... Toutefois on va quand-même monter ici, puisque c'est un problème très intéressant, que la deuxième solution est un maximum local (ou plutot un point selle) de l'action.

En effet si on admet une petite perturbation $\delta y(x)$ (avec $y(-1) = y(1) = 0$ pour ne pas briser les conditions au bord dejà remplies) autour de la deuxième trajectoire:

$$y(x) = x^2 - \frac{3}{4} + \delta y(x);$$

le temps de parcours (action)

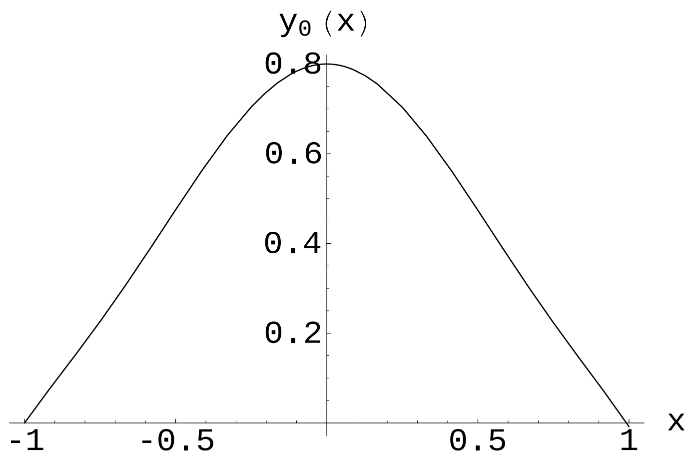
$$T = \int dx \frac{1}{2}\sqrt{1 + 4x^2 + 4x\delta y' + \delta y'^2}\sqrt{1 + 4x^2 + 4\delta y}$$

devient, après de laborieux calculs (c'est à dire un développement limité en puissance de y et y', quelques intégrations par partie):

$$T = \int dx \left[\frac{1}{2}(1+4x^2) + \delta y(x)\ \delta L\ \delta y(x) + \mathcal{O}(y^3)\right].$$

Le premier terme donne le temps de parcours dejà calculé (T=7/3) et le second contient l'opérateur différentiel

$$\delta L = \left(\frac{1}{1+4x^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{8x}{(1+4x^2)^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{8}{(1+4x^2)^2}\right).$$



Le temps de parcours peut être plus court que celui calculé précédemment (T=7/3) si l'intégrale de $\delta y(x)\ \delta L\ \delta y(x)$ est négative. Pour voir si cela est possible, on cherche les modes propres $y_n(x)$ (avec valeur propre E_n) de l'opérateur L:

$$\delta L y_n(x) = E_n y_n(x)$$

On peut par exemple résoudre cette équation numériquement, et on voit que pour certaines énergies, il éxiste une solution vérifiant les conditions au bord $y_n(-1) = 0$ et $y_n(1) = 0$. Ces énergies sont:

$$E_0 = -3.92, \quad E_1 = 2.9, \quad E_2 = 7.7\ ...$$

Il y a donc un mode avec valeur propre négative qui donne une contribution négative de $E_0 \int_{-1}^{1} dx\ y_0(x)^2$ à l'action et donc la solution $y(x) = x^2 - 3/4$ est un maximum local dans la direction de $y_0(x)$. Bien sur c'est en fait un point selle, puisque c'est un minimum dans les directions $y_n(x),\ n > 0$.