Partiel de Mécanique Analytique

Epreuve du 15 décembre 2005 - Durée: 110 minutes - Sans document

Exercice 1 *(9 points)*

On considère deux plans horizontaux parallèles distant d'une hauteur h. Sur le plan supérieur, on place un rail rectiligne infini. Un point matériel de masse m_1 est contraint à se déplacer sur ce rail. On considère un autre point matériel de masse m_2, qui peut se déplacer librement sur le plan inférieur. Les deux masses sont reliées par un ressort de longueur au repos l et de constante d'élasticité k. On ne considère pas de forces de gravité.

a) Ecrire le Lagrangien du système et dériver les équations du mouvement.

b) Trouver toutes les quantités conservées et les interpréter physiquement.

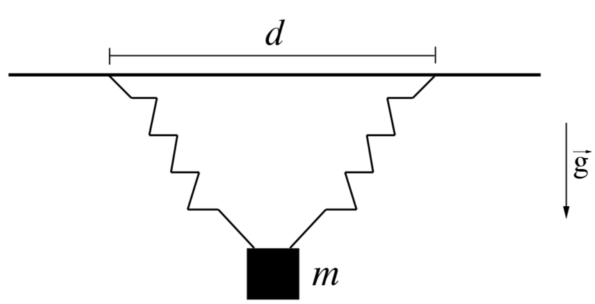
Exercice 2 *(11 points)*

Une masse m soumise à la pesanteur se déplaçant dans le plan vertical $(\mathcal{O}xz)$ est suspendue aux bouts de deux ressorts identiques de constante d'élasticité k et de longueur au repos $l_0 = 0$. Les deux autres bouts des ressorts son fixés à deux points de l'axe $\mathcal{O}x$ qui se trouvent à une distance d l'un de l'autre (voir figure).

a) Ecrire le Lagrangien de ce système.

b) Etablir les équations d'Euler-Lagrange et déterminer les constantes du mouvement.

c) Trouver les points d'équilibre (minima du potentiel) et calculer la fréquence des oscillations autour de ces points.



Exercice 3 *Pendule sphérique (15 points)*

Un pendule sphérique est formé d'une tige rigide de longueur l et de masse négligeable fixée au point $\mathcal{O}$. A l'autre extrémité, on attache une masse m. L'angle entre la tige et l'axe vertical $\mathcal{O}z$ est appelé ϑ. Le pendule peut ainsi osciller dans n'importe quelle direction de l'espace tridimensionnel.
En plus, le système est soumis à un champ de gravitation créé par une masse M au point P de l'axe $\mathcal{O}z$, situé à une distance $2l$ du point $\mathcal{O}$. Ne pas considérer d'autre force de gravité.

a) Dans le système de coordonnées le mieux adapté au problème, écrire le Lagrangien.

b) Trouver les équations du mouvement.

c) Déterminer toutes les quantités conservées à l'aide des variables cycliques et les interpréter physiquement.

d) Quelles sont les symétries associées aux quantités conservées? Pour chaque quantité conservée, écrire la transformation des coordonnées généralisées correspondante qui amène à cette quantité par le théorème de Noether.

e) On considère le cas où le mouvement du pendule s'effectue dans le plan vertical ($\mathcal{O}xz$). Dans ce cas calculer la fréquence des petites oscillations (ϑ petit).

f) Trouver la solution des équations du mouvement qui correspondent à un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe $\mathcal{O}z$. Calculer la vitesse angulaire Ω de ce mouvement circulaire (de nouveau pour ϑ petit).

Exercice 1

On choisit d'orienter l'axe x du repère dans la direction du rail, ceci peut toujours être fait par rotation autour de l'axe z. Il y a deux manières de complexité approximativement égale de résoudre ce problème.

méthode 1

On choisit les coordonnées les plus adaptées au système, ce qui simplifie l'obtention des quantité conservées.

a) On considère la coordonné x_1 qui repère la position de la particlue de masse m_1 sur le rail. On place un repère sur le plan inférieur à la verticale de la particule 1 (le repère se déplaçant avec la particule). On note (x_2, y_2) les coordonées de la particule m_2 par rapport à ce repère. Le Lagrangien est:

$$L(x_1, x_2, y_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, t) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \dot{y}_2^2\right] - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{h^2 + x_2^2 + y_2^2} - l\right)^2 \tag{1}$$

Les équations du mouvement sont:

$$\begin{aligned}
(m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 &= 0, \\
m_2(\ddot{x}_2 + \ddot{x}_1) &= -kx_2\left(1 - \frac{l}{\sqrt{h^2 + x_2^2 + y_2^2}}\right), \\
m_2\ddot{y}_2 &= -ky_2\left(1 - \frac{l}{\sqrt{h^2 + x_2^2 + y_2^2}}\right).
\end{aligned}$$

b) Les quantités conservées sont, la quantité de mouvement P_x selon l'axe x;

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1 + m_2(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) = P_x, \tag{2}$$

et l'énergie mécanique totale E:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i - L \\
= \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \dot{y}_2^2\right] + \frac{1}{2}k\left(\sqrt{h^2 + x_2^2 + y_2^2} - l\right)^2 = E.
\end{aligned}$$

méthode 2

Si on a pas l'idée de choisir les coordonnées les plus adaptée au système, il faudra réfléchir pour obtenir les quantité conservées...

On considère la coordonné x_1 qui repère la position de la particlue de masse m_1 sur le rail et les coordonnées (x_2, y_2) qui repèrent la particule de masse m_2 sur le plan inférieur. Les quantités $x_1,\ x_2,\ y_2$ sont toutes mesurée par rapport à l'origine du meme repère. Le Lagrangien est donc:

$$L(x_1, x_2, y_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}_2, t) = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right] - \frac{1}{2}k\left(\sqrt{h^2 + (x_2 - x_1)^2 + y_2^2} - l\right)^2 \tag{3}$$

Les équations du mouvement et la conservation de l'énergie sont obtenue comme précédemment, la conservation de l'impulsion est plus difficile à obtenir puisqu'il n'y a pas de variable cyclique. Il faut donc appliquer le théorème de Noether. Le Lagrangien est laissé invariant par la transformation $x_1 \to x_1 + s,\ x_2 \to x_2 + s,\ y_2 \to y_2$. la quantité associée à cette quantité conservée est:

$$P_x = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\frac{\partial x_i}{\partial s} = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2.$$

Exercice 2

a) On considère le plan vertical $(\mathcal{O}xz)$ avec l'axe z orienté vers le bas et on place l'origine $\mathcal{O}$ sur le point fixe d'un des deux ressorts. On considère les coordonnées cartésiennes x et z comme coordonnées du système. Les coordonées du point fixe de chaque ressort seront alors: $(0,0)$ et $(d,0)$ et on calcule les deux différentes longeurs l_1 et l_2 des ressorts à l'aide du calcul de la norme:

$$l_1 = \sqrt{x^2 + z^2}$$
$$l_2 = \sqrt{(d-x)^2 + z^2}\ .$$

On rappelle que $l_0 = 0$ pour les deux ressorts! Pour l'énergie cinétique et le potentiel on trouve donc:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)$$
$$V = \frac{1}{2}k(l_1^2 + l_2^2) - mgz$$

Le Lagangien est donné par:

$$L(x, z, \dot{x}, \dot{z}, t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz - \frac{1}{2}k(x^2 + z^2) - \frac{1}{2}k((d-x)^2 + z^2)$$

b) Les équations du mouvement sont:

$$m\ddot{x} = -k(2x - d)$$

$$m\ddot{z} = mg - 2kz$$

L ne dépend pas explicitement de t:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

donc la fonction hamiltonienne est conservée:

$$\begin{aligned}
h(x,z,\dot{x},\dot{z}) &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\dot{z} - L \\
&= m\dot{x}^2 + m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + \frac{1}{2}k(x^2+z^2) + \frac{1}{2}k((d-x)^2+z^2) \\
&= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz + \frac{1}{2}k(x^2+z^2) + \frac{1}{2}k((d-x)^2+z^2) \\
&= \text{const}
\end{aligned}$$

et elle correspond à l'énergie mécanique $E = T + V$.

c) A l'aide des équations du mouvement on trouve que le système a un seul point d'équilibre en:

$$x = \frac{d}{2}$$
$$z = \frac{mg}{2k}$$

Pour trouver la fréquence des oscillations autour de ce point on considère:

$$x = \frac{d}{2} + \delta x$$

$$z = \frac{mg}{2k} + \delta z$$

A l'aide des équations du mouvement on trouve alors:

$$m\ddot{\delta x} + 2k\delta x = 0$$

$$m\ddot{\delta z} + 2k\delta z = 0$$

(oscillateur harmonique) avec:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

identique dans les deux cas.

Exercice 3 *Pendule sphérique*

a) Pour l'énergie cinétique et le potentiel on trouve

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right)$$
$$V = -G\frac{Mm}{|\mathbf{d}|} \ ,$$

où G est la constante de la gravitation.
Le vecteur entre les deux masses M et m est

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - 2l \end{pmatrix}$$

La longueur fixe de la tige nous donne la contrainte $r := \sqrt{x^2+y^2+z^2} = l$. Donc, les coordonnées les mieux adaptées au problème sont les coordonnées sphériques

$$\begin{aligned} x &= r\sin\vartheta\cos\varphi = l\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= r\sin\vartheta\sin\varphi = l\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= r\cos\vartheta = l\cos\vartheta \end{aligned}$$

desquelles les dérivées temporelles sont

$$\begin{aligned} \dot{x} &= l\cos\vartheta\cos\varphi\ \dot{\vartheta} - l\sin\vartheta\sin\varphi\ \dot{\varphi} \\ \dot{y} &= l\cos\vartheta\sin\varphi\ \dot{\vartheta} + l\sin\vartheta\cos\varphi\ \dot{\varphi} \\ \dot{z} &= -l\sin\vartheta\ \dot{\vartheta}\ . \end{aligned}$$

Après un petit peu d'algèbre, on obtient que la fonction de Lagrange $L = T - V$ est donnée par

$$L(\vartheta,\dot{\vartheta},\varphi,\dot{\varphi}) = \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2\vartheta\ \dot{\varphi}^2\right) + \frac{GMm}{l}\ \frac{1}{\sqrt{5-4\cos\vartheta}}\ . \tag{4}$$

b) Les équations du mouvement

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} &= \frac{\partial L}{\partial\vartheta} \\ \frac{d}{dt}\ \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} &= \frac{\partial L}{\partial\varphi} \end{aligned}$$

deviennent

$$\ddot{\vartheta} = \dot{\varphi}^2\sin\vartheta\cos\vartheta - \frac{GM}{l^3}\ \frac{2\sin\vartheta}{(5-4\cos\vartheta)^{3/2}} \tag{5}$$

$$\ddot{\varphi} = -2\dot{\vartheta}\dot{\varphi}\cot\vartheta \tag{6}$$

c) L ne dépend pas explicitement de t, donc la fonction hamiltonienne est conservée:

$$\begin{aligned} h(\vartheta,\dot{\vartheta},\varphi,\dot{\varphi}) &= \dot{\vartheta}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vartheta}} + \dot{\varphi}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} - L(\vartheta,\dot{\vartheta},\varphi,\dot{\varphi}) \\ &= ml^2\dot{\vartheta}^2 + ml^2\sin^2\vartheta\ \dot{\varphi}^2 - \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\vartheta}^2+\sin^2\vartheta\ \dot{\varphi}^2\right) - \frac{GMm}{l}\ \frac{1}{\sqrt{5-4\cos\vartheta}} \\ &= \frac{ml^2}{2}\left(\dot{\vartheta}^2+\sin^2\vartheta\dot{\varphi}^2\right) - \frac{GMm}{l}\ \frac{1}{\sqrt{5-4\cos\vartheta}} \\ &= \text{const} \end{aligned}$$

Selon (4), la fonction hamiltonienne $h(\vartheta,\dot{\vartheta},\varphi,\dot{\varphi})$ correspond à l'énergie mécanique $E = T + V$.
En plus, la fonction de Lagrange ne dépend pas de φ, donc φ est une cordonnée cyclique. C'est-à-dire, l'impulsion généralisée correspondant à φ

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = ml^2\sin^2\vartheta\ \dot{\varphi} = \text{const}\ .$$

On reconnaît bien, qu'il s'agit du moment cinétique selon l'axe z:

$$L_z = (\mathbf{r}\times\mathbf{p})_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = ml^2\sin^2\vartheta\ \dot{\varphi} = p_\varphi\ .$$

d) La conservation du moment cinétique L_z vient d'une symétrie rotationnelle du système autour de l'axe $\mathcal{O}z$. La transformation des coordonnées généralisées correspondante est

$$\begin{aligned} \vartheta &\to \vartheta \\ \varphi &\to \varphi + s \ , \end{aligned}$$

et on retrouve comme quantité conservée

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta} \underbrace{\frac{\partial \vartheta}{\partial s}}_{0} + \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial s}}_{1} = ml^2 \sin^2\vartheta \ \dot\varphi \ .$$

La consevation du Hamiltonien vient de la symétrie translationelle du temps

$$t \to t + a \ ,$$

qui n'est pas générée par une transformation des coordonnées généralisées.

e) Parce que le mouvement est limité au plan vertical ($\mathcal{O}xz$), on obtient $\varphi = \dot\varphi = 0$. Pour ϑ petit, le developpement limité de $V(\vartheta)$ donne

$$\begin{aligned} V(\vartheta) &= V(0) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \vartheta}(0)}_{0}\,\vartheta + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}(0)\vartheta^2 + \mathcal{O}(\vartheta^3) \\ &\approx \frac{GMm}{l} + \frac{GMm}{l}\vartheta^2 \end{aligned}$$

Alors, le Lagrangien est

$$L(\vartheta, \dot\vartheta) = \frac{ml^2}{2}\dot\vartheta^2 + \frac{GMm}{l}\vartheta^2 \ ,$$

ce qui donne comme équation du mouvement un oscillateur harmonique

$$\ddot\vartheta + \omega^2\vartheta = 0 \ ,$$

avec

$$\omega^2 = \frac{2GM}{l^3} \ .$$

f) Pour un mouvement circulaire uniforme, on a $\vartheta = \vartheta_0 = \text{const}$. Parce que ϑ est petit, l'équation du mouvement (5) nous donne

$$\dot\varphi = \Omega = \sqrt{\frac{2GM}{l^3\cos\vartheta_0}}\ \frac{1}{(5 - 4\cos\vartheta_0)^{3/4}} \approx \sqrt{\frac{2GM}{l^3}} \ .$$