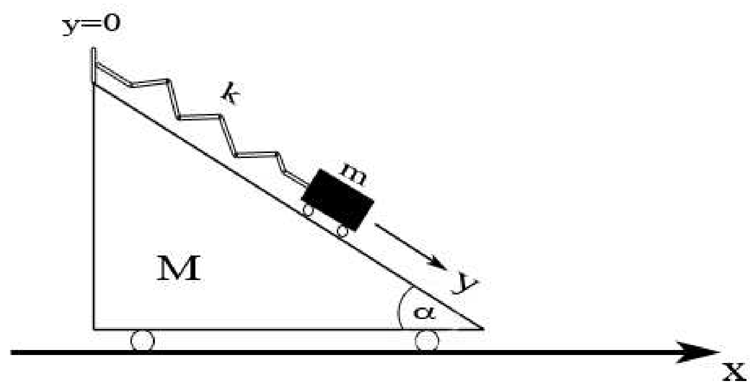
Examen de Mécanique Analytique

Professeur: P. De Los Rios

Epreuve du 20 février 2007 - Durée: 4 heures - Sans document

Exercice 1 *Plan incliné (6 points)*

On considère une masse m glissant sans frottement sur un plan incliné de masse M et d'angle d'inclinaison α. La masse m est reliée à un ressort de masse nulle, de constante élastique k et de longeur au repos $l_0 = 0$. L'autre bout du ressort est fixé à l'origine $y = 0$ de l'axe y. L'axe y est placé le long de la pente du plan incliné et il bouge avec lui. Le plan incliné peut lui aussi bouger sans frottement le long de l'axe x.



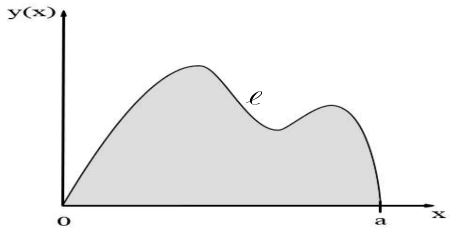
a) Ecrire le Lagrangien du système (en faisant attention à bien écrire le terme cinétique!)

b) Résoudre les équations du mouvement avec les conditions initiales $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.

c) Ecrire le Hamiltonien H du système.

Exercice 2 *Maximisation (5 points)*

Dans le plan (x, y) on considère la famille des courbes $y(x)$ de longueur fixe l qui relient les points $(0, 0)$ et $(a, 0)$ sur l'axe x.



a) On cherche à maximiser l'aire entre l'axe x et la courbe $y(x)$. Trouver la solution générale $y(x)$ (sans utiliser les conditions au bord).

b) Interpréter la solution générale $y(x)$. Que représentent les constantes présentes dans cette solution?

c) Application: Calculer ces constantes pour le cas où $l = a\pi/2$. Discuter la solution obtenue.

Exercice 3 *Potentiel cônique (8 points)*

On considère une particule de masse m se déplaçant dans le plan (x, y). Cette particule est soumise à un potentiel $V(r) = ar$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et a est une constante positive.

a) Ecrire le Lagrangien du système et trouver les quantités conservées.

b) On considère un mouvement circulaire avec moment cinétique L_z fixé non nul. Quel est le rayon $r = r_0$ de la trajectoire?

c) On perturbe maintenant ce mouvement par de petites oscillations radiales $r = r_0 + \delta r$ autour de r_0. Trouver la fréquence de ces petites oscillations.

d) Résoudre l'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi et en déduire la fonction génératrice. (Ne pas effectuer les intégrales)

e) Un grand nombre de mouvements sont possibles, et le portrait de phase est très complexe. On décompose donc le portait quadri-dimensionel en deux plans (r, p_r) et (θ, p_θ). Sur ces deux plans, représenter uniquement le mouvement circulaire du point **b)**. Que se passe-t-il dans le plan (r, p_r) si on admet des petites oscillations radiales comme au point **c)**?

Exercice 4 *Puits de Potentiel (10 points)*

Une particule de masse m se déplaçant sur l'axe x est soumise au potentiel

$$V(x) = -\frac{V_0}{\cosh^2(x)} \tag{1}$$

où $V_0 > 0$ est une constante positive.

a) Esquisser la forme du potentiel et écrire le Hamiltonien $H(x,p)$ de la particule.

Indication:
Pour dessiner le potentiel on rappelle que

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \ .$$

b) Déterminer la fréquence des petites oscillations autour du minimum du potentiel (1).

c) Dessiner le portrait de phase. Considérer en particulier les trajectoires correspondant à $E < 0$, $E = 0$ et $E > 0$.

d) Dans la suite on considère les trajectoires avec $E < 0$. Dans ce cas, calculer la variable action $I(E)$.

Indication:

$$\int_0^b \sqrt{\frac{a^2}{\cosh^2(x)} - 1}\, dx = \frac{\pi(a-1)}{2} \quad \text{pour} \quad b = \mathrm{Arcosh}(a) \ .$$

e) En déduire la fréquence des oscillations ω. Exprimer la fréquence en fonction de l'énergie E. En particulier, montrer que pour $E \to -V_0$ on retrouve le cas des petites oscillations du point b).

f) Discuter la limite $E \to 0^-$.

g) Qu'est-ce qui se passe quand on considère le potentiel (1) avec $V_0 < 0$? Tracer le portrait de phase dans ce cas.

Exercice 1 *Plan incliné (6 points)*

a) La vitesse de la masse m est donnée par la somme véctorielle de sa vitesse le long du plan incliné $(\dot{y}\cos\alpha, \dot{y}\sin\alpha)$ et de la vitesse du plan lui même $(\dot{x}, 0)$. Le terme cinétique du Lagrangien sera donc donné par:

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\right)$$

Le potentiel sera donné par:

$$V = \frac{1}{2}ky^2 - mg\sin\alpha \ .$$

Le Lagrangien est donc:

$$L = T - V = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + 2\dot{x}\dot{y}\cos\alpha\right) - \frac{1}{2}ky^2 + mgy\sin\alpha \ .$$

b) Les équations du mouvement s'écrivent:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = (M+m)\ddot{x} + m\ddot{y}\cos\alpha = 0 \ ,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = m(\ddot{x}\cos\alpha + \ddot{y}) + ky - mg\sin\alpha = 0 \ .$$

L'expression de $\ddot{x}$ donnée par la première équation peut être substituée dans la deuxième:

$$\ddot{x} = -\frac{m\cos\alpha}{m+M}\ddot{y}$$

$$\left(m - \frac{m^2\cos^2\alpha}{m+M}\right)\ddot{y} + ky - mg\sin\alpha = 0 \ .$$

La solution de la deuxième équation est:

$$y(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM + m^2(1-\cos^2\alpha)}}t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM + m^2(1-\cos^2\alpha)}}t\right) + \frac{mg\sin\alpha}{k}$$

Avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $\dot{y}(0) = 0$ on obtient:

$$A = -\frac{mg\sin\alpha}{k} \ ,$$

$$B = 0$$

et finalement

$$y(t) = \frac{mg\sin\alpha}{k}\left[1 - \cos\left(\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM + m^2(1-\cos^2\alpha)}}t\right)\right] \ .$$

A l'aide de cette expression on obtient la solution de la première équation:

$$x(t) = Ct + \frac{m^2 g \sin\alpha \cos\alpha}{m+M} \cos\left(\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM + m^2(1-\cos^2\alpha)}}t\right) + E \ .$$

Avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0$:

$$E = -\frac{m^2 g \sin\alpha \cos\alpha}{m+M} \ ,$$
$$C = 0 \ ,$$

on obtient finalement

$$x(t) = \frac{m^2 g \sin\alpha \cos\alpha}{k(m+M)} \left[\cos\left(\sqrt{\frac{k(m+M)}{mM + m^2(1-\cos^2\alpha)}}t\right) - 1\right] \ .$$

c) Les impulsion en fonction des coordonnées et des vitesses sont données par:

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (m+M)\dot{x} + m\dot{y}\cos\alpha \ ,$$
$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + m\dot{x}\cos\alpha \ .$$

On peut donc écrire les vitesses en fonction des impulsion:

$$\dot{x} = \frac{p_x - p_y \cos\alpha}{(m+M) - m\cos^2\alpha} \ ,$$
$$\dot{y} = \frac{p_y}{m} - \left(\frac{p_x - p_y\cos\alpha}{(m+M) - m\cos^2\alpha}\right)\cos\alpha \ .$$

Le Hamiltonien s'écrit:

$$H = \dot{x}p_x + \dot{y}p_y - L \ .$$

En substituant les vitesses en fonction des impulsion et après les calcules en trouve finalment:

$$H = \frac{p_x^2}{2D} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{p_y^2\cos^2\alpha}{2D} + \frac{1}{2}ky^2 - mgy\sin\alpha$$

avec

$$D = M + m\sin^2\alpha \ .$$

Exercice 2 *Maximisation (5 points)*

a) On cherche à maximiser l'intégrale

$$\int_0^a y(x)\ dx \tag{2}$$

sous la contrainte que

$$l = \int ds = \int_0^a \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\ dx \ . \tag{3}$$

Alors, le 'lagrangien' est donné par

$$L(y, y', x) = y + \lambda\sqrt{1 + (y')^2} \ ,$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange. Parce que le lagrangien ne dépend pas du paramètre x,

$$K = y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L = \frac{\lambda(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}} - y - \lambda\sqrt{1+(y')^2} = \text{const} \ ,$$

ce qui mène à

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y+K)^2}}{y+K} \tag{4}$$

après un petit calcul. L'équation différentielle (4) est resolue par séparation des variables,

$$\pm\frac{(y+K)dy}{\sqrt{\lambda^2-(y+K)^2}} = dx \quad \Rightarrow \quad \mp\sqrt{\lambda^2-(y+K)^2} = x + C \ ,$$

où C est une constante d'intégration. Finalement, la solution générale est

$$(x+C)^2 + (y+K)^2 = \lambda^2 \ . \tag{5}$$

b) La solution (5) représente un cercle autour du point $(-C, -K)$ avec rayon λ.

c) Les trois constantes λ, C et K sont déterminées par les conditions au bord $y(0) = y(a) = 0$ et la contrainte (3). Les conditions au bord donnent

$$\begin{aligned} C^2 + K^2 &= \lambda^2 \ , \\ (a+C)^2 + K^2 &= \lambda^2 \ , \end{aligned}$$

d'où on déduit $-C = a/2$ et

$$\lambda^2 - K^2 = \frac{a^2}{4} \ . \tag{6}$$

Avec la solution (5) la contrainte peut être écrite,

$$\begin{aligned} l &= \int_0^a \sqrt{1+(y')^2}\ dx = \lambda\int_0^a \frac{dx}{y+K} \\ &= \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\lambda^2-(x+C)^2}} = \lambda\left[\arcsin\left(\frac{a+C}{\lambda}\right) - \arcsin\left(\frac{C}{\lambda}\right)\right] \\ &= 2\lambda\arcsin\left(\frac{a}{2\lambda}\right) \ . \end{aligned}$$

Pour $l = a\pi/2$ on obtient $\lambda = a/2$ et $K = 0$ en utilisant (6). Alors, dans ce cas on trouve le demi-cercle autour de $(a/2, 0)$ avec rayon $a/2$.

Exercice 3 *Potentiel cônique (8 points)*

a) Le Lagrangien est:

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - ar$$

Les quantités conservée sont:
- La fonction hamiltonienne, qui représente ici l'énergie mécanique (le Lagrangien est indépendant du temps)

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + ar.$$

- Le moment cinétique (θ est cyclique)

$$L_z = mr^2\dot{\theta}. \tag{7}$$

b) L'équation du mouvement pour r est

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - a.$$

En imposant un mouvemnet circulaire $r = r_0,\ \ddot{r} = 0$, et en utilisant (7) on obtient:

$$\frac{L_z^2}{mr^3} - a = 0,$$

d'où on tire $r_0 = \left(\frac{L_z^2}{ma}\right)^{1/3}$.

c) En utilisant l'équation du mouvement pour r et la relation(7) on obtient:

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - a = \frac{L_z^2}{mr^3} - a.$$

On effectue un développement limité $r = r_0 + \delta r$ avec δr petit, l'équation précédente devient:

$$m\delta\ddot{r} = \frac{L_z^2}{mr_0^3}\left(1 - 3\frac{\delta r}{r_0}\right) - a = -3a\left(\frac{ma}{L_z^2}\right)^{1/3}\delta r$$

La fréquence des petites oscillations radiales est donc

$$\omega = \sqrt{3}\left(\frac{a^4}{m^2L_z^2}\right)^{1/6}. \tag{8}$$

d) Le Hamiltonien est:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\theta^2}{2mr^2} + ar$$

L'équation caractéristique de Hamilton-Jacobi est:

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 + ar = E$$

Par séparation des variables, on trouve que $\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)$ doit être indépendant de θ et donc $f = \alpha\theta + f(r)$. L'équation de Hamilton-Jacobi devient

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 = 2m(E - ar) - \frac{\alpha^2}{r^2}$$

Et donc la solution est:

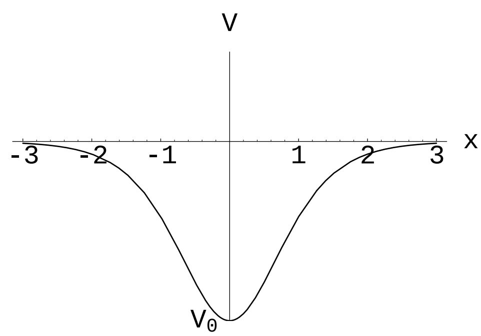
$$f(r, \theta, \alpha, E) = \int \sqrt{2m(E - ar) - \frac{\alpha^2}{r^2}}dr + \alpha\theta$$

e) Le mouvement circulaire a $r = r_0$, $p_r = 0$, $p_\theta = L_z = const.$ Il est donc représenté par un point dans le plan (r, p_r) et par une droite de pente nulle dans le plan (θ, p_θ). Les petites oscillations radiales donnent un petit cercle autour de $(r_0, 0)$ dans le plan (r, p_r).

Exercice 4 *Puits de potentiel (10 points)*

a) Le hamiltonien est donné par

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} - \frac{V_0}{\cosh^2(x)}$$



b) On développe le potentiel autour du minimum en $x = 0$,

$$V(x) = V(0) + \underbrace{V'(0)}_{0}x + \frac{1}{2}V''(0)x^2 = -V_0 + V_0 x^2$$

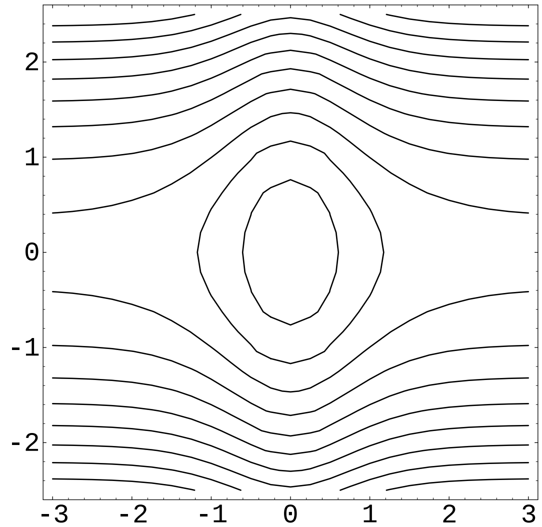
et on trouve pour l'équation du mouvement

$$m\ddot{x} = -2V_0 x \ .$$

Alors, la fréquence des petites oscillation autour $x = 0$ est

$$\omega = \sqrt{\frac{2V_0}{m}} \ .$$

c)



d) En partant de l'équation de Hamilton-Jacobi charactéristique,

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 - \frac{V_0}{\cosh^2(x)} = E \ ,$$

on trouve

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \pm\sqrt{2m\left(E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)}\right)} \ .$$

La variable action est

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2\pi}\oint\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)\, dx && (9)\\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{x_s}\sqrt{2m\left(E + \frac{V_0}{\cosh^2(x)}\right)}\, dx && (10)\\
&= \frac{2\sqrt{-2mE}}{\pi}\int_0^{x_s}\sqrt{\frac{V_0}{-E\cosh^2(x)} - 1}\, dx && (11)\\
&= \frac{2\sqrt{-2mE}}{\pi}\int_0^{x_s}\sqrt{\frac{a^2}{\cosh^2(x)} - 1}\, dx \ , && (12)
\end{aligned}$$

où

$$a = \sqrt{\frac{V_0}{-E}} \ . \qquad (13)$$

La borne supérieure x_s se trouve par

$$E = -\frac{V_0}{\cosh^2(x_s)} \quad \Rightarrow \quad x_s = \mathrm{Arcosh}\left(\sqrt{\frac{V_0}{-E}}\right) = \mathrm{Arcosh}\,(a) \ . \qquad (14)$$

Noter que tous les termes dans les racines sont positifs parce que $-V_0 < E < 0$, ainsi que $a > 1$, donc l'argument de l'Area Cosinus est bien défini. En effectuant l'intégrale à l'aide de l'indication on obtient

$$I = \sqrt{-2mE}\left(\sqrt{\frac{V_0}{-E}} - 1\right) = \sqrt{2mV_0}\left(1 - \sqrt{\frac{-E}{V_0}}\right) .$$

e) Par inversion de la fonction $I(E)$ on trouve

$$E = -V_0\left(1 - \frac{I}{\sqrt{2mV_0}}\right)^2$$

et on en déduit la fréquence

$$\omega(E) = \frac{\partial E}{\partial I} = \frac{2V_0}{\sqrt{2mV_0}}\left(1 - \frac{I}{\sqrt{2mV_0}}\right) = \sqrt{\frac{-2E}{m}} . \tag{15}$$

Evidemment, dans la limite $E \to -V_0$ on retrouve le résultat du point **b)**.

f) En plus, on a $\omega \to 0$ quand $E \to 0^-$, c'est-à-dire dans cette limite la période des oscillations est infinie.

g)