Examen Formulaire d'analyse vectorielle

- **COORDONNEES CARTESIENNES :**

1. Gradient

$$\mathbf{grad}\ \psi \equiv \nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}\mathbf{e_x} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\mathbf{e_y} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e_z}$$

2. Rotationnel

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{A} \equiv \nabla\times\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{e_x}\ +\ \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{e_y}\ +\ \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{e_z}$$

3. Divergence

$$\text{div}\ \mathbf{A} \equiv \nabla\cdot\mathbf{A}\ =\ \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

4. Laplacien

$$\text{div}\ \mathbf{grad}\ \psi \equiv \Delta\psi\ =\ \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

- **COORDONNEES CYLINDRIQUES :** base $(\mathbf{e_r},\ \mathbf{e_\varphi},\ \mathbf{e_z})$ usuelle

1. Gradient

$$\nabla\psi\ =\ \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{e_z}$$

2. Divergence

$$\nabla\cdot\mathbf{A}\ =\ \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

3. Rotationel

$$\nabla\times\mathbf{A}\ =\left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\mathbf{e_r} + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\mathbf{e_z}$$

4. Laplacien

$$\Delta\psi\ = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

- **COORDONNEES SPHERIQUES :** base $(\mathbf{e_r},\ \mathbf{e}_\theta,\ \mathbf{e}_\varphi)$ usuelle

1. Gradient

$$\nabla\psi \ = \ \frac{\partial\psi}{\partial r}\mathbf{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi$$

2. Divergence

$$\nabla\cdot\mathbf{A} \ = \ \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta\ A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}$$

3. Rotationel

$$\nabla\times\mathbf{A} \ = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right]\mathbf{e_r} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right]\mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\mathbf{e}_\varphi$$

4. Laplacien

$$\Delta\psi \ = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\Big(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\Big(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\Big) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

- **FORMULES UTILES :**

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\big(\mathbf{b}\times\mathbf{c}\big) &= \big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\big)\mathbf{b} - \big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\big)\mathbf{c} \\
\big(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\big)\cdot\big(\mathbf{c}\times\mathbf{d}\big) &= \big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}\big)\big(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}\big) - \big(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}\big)\big(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}\big) \\
\nabla\times\nabla\psi &= 0 \\
\nabla\cdot\big(\nabla\times\mathbf{A}\big) &= 0 \\
\nabla\times\big(\nabla\times\mathbf{A}\big) &= \nabla\big(\nabla\cdot\mathbf{A}\big) - \Delta\mathbf{A} \\
\nabla\cdot\big(\psi\mathbf{A}\big) &= \psi\nabla\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\nabla\psi \\
\nabla\times\big(\psi\mathbf{A}\big) &= \psi\nabla\times\mathbf{A} + \nabla\psi\times\mathbf{A} \\
\nabla\big(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\big) &= \mathbf{A}\times\big(\nabla\times\mathbf{B}\big) + \mathbf{B}\times\big(\nabla\times\mathbf{A}\big) + \big(\mathbf{A}\cdot\nabla\big)\mathbf{B} + \big(\mathbf{B}\cdot\nabla\big)\mathbf{A} \\
\nabla\cdot\big(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\big) &= \mathbf{B}\cdot\big(\nabla\times\mathbf{A}\big) - \mathbf{A}\cdot\big(\nabla\times\mathbf{B}\big) \\
\nabla\times\big(\mathbf{A}\times\mathbf{B}\big) &= \mathbf{A}\big(\nabla\cdot\mathbf{B}\big) - \mathbf{B}\big(\nabla\cdot\mathbf{A}\big) + \big(\mathbf{B}\cdot\nabla\big)\mathbf{A} - \big(\mathbf{A}\cdot\nabla\big)\mathbf{B} \\
\Delta\big(\psi\phi\big) &= \psi\Delta\phi + 2\nabla\psi\cdot\nabla\phi + \phi\Delta\psi \\
\Delta\big(\psi\mathbf{A}\big) &= \psi\Delta\mathbf{A} + 2(\nabla\psi\cdot\nabla\big)\mathbf{A} + \mathbf{A}\Delta\psi
\end{aligned}$$

$\mathbf{x}$ les cordonnées d'un point et $\mathbf{n} = \mathbf{x}/\left|\mathbf{x}\right|$ un vecteur unitaire radial, alors

$$\nabla\cdot\mathbf{x} = 3 \qquad \nabla\times\mathbf{x} = 0$$

$$\nabla\cdot\mathbf{n} = \frac{2}{|\mathbf{x}|} \qquad \nabla\times\mathbf{n} = 0$$

- **THEOREMES DE L'ANALYSE VECTORIELLE :**

Ci-dessous, ϕ et ψ sont des fonctions scalaires, $\mathbf{A}$ est un champ vectoriel et V est un volume 3-dimensionel avec l'élément de volume dV. Le volume V est délimité par une surface 2-dimensionelle fermée $S = \partial V$ avec $d\sigma$ son élément d'aire et $\mathbf{n}$ un vecteur unitaire de la normale, ayant son sens sortant du volume.

1. Théorème de la divergence (Théorème de Gauss)
   - **Flux** d'un champ vectoriel sortant de S : $\int\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma$.

   $$\int\int\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}\ dV \ = \int\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\ d\sigma$$

   L'intégrale de la divergence d'un champ vectoriel, étendue à un volume est égale au flux de ce champ sortant de la surface qui limite ce volume.

2. Formule du gradient

   $$\int\int\int_V \nabla\psi\ dV \ = \int\int_S \psi\mathbf{n}\ d\sigma$$

3. Formule du rotationnel

   $$\int\int\int_V \nabla \times \mathbf{A}\ dV \ = \int\int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} d\sigma$$

4. Théorème de Green

   $$\int\int\int_V (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)\ dV \ = \int\int_S (\phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi) \cdot \mathbf{n}\ d\sigma$$

5. Théorème de Stokes
   Ci-après, S est une surface 2-dimensionelle ouverte, délimitée par la courbe C avec l'élément curviligne $\mathbf{dl}$. La normale $\mathbf{n}$ de S est définie selon la règle de la main droite, le sens positif étant fixé le long de la courbe.
   - **Circulation** d'un champ vectoriel $\mathbf{A}$ le long de C : $\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl}$

   $$\int_C \mathbf{A} \cdot \mathbf{dl} \ = \int\int_S \big(\nabla \times \mathbf{A}\big) \cdot \mathbf{n}\ d\sigma$$

   La circulation d'un champ vectoriel $\mathbf{A}$ le long d'une courbe fermée C est égale au flux de son rotationnel passant par S, surface délimitée par C.

• **FORMULES SUPPLÉMENTAIRES :**

Définition du champ de déplacement et champ magnétique :

$$\mathbf{D} = \mathbf{P} + \epsilon_0 \mathbf{E} \;, \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

Relations entre le champ de déplacement et le champ électrique, entre le champ magnétique et le champ de induction magnétique dans un milieu linéaire isotrope :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \;, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Densité de charge microscopique moyennée et densité de courant microscopique moyennée :

$$\langle \eta \rangle = \rho - \nabla \cdot \mathbf{P}$$
$$\langle \mathbf{j} \rangle = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M}$$

Potentiel scalaire électrostatique généré par un dipôle électrique $\mathbf{p}$:

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

Potentiel vecteur magnétostatique généré par un dipôle magnétique $\mathbf{m}$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

Vecteur de Poynting :

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

Champs électrique et magnétique de la radiation dipolaire

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{x} \ddot{\mathbf{d}} \times \mathbf{n}$$
$$\mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \mathbf{n}$$

Expression du potentiel électrostatique avec les fonctionnes de Green :

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{x}') G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3x' + \oint_S \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \frac{\partial \phi}{\partial n'} - \phi(\mathbf{x}') \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\partial n'} \right] da'$$

Gradient de $|\mathbf{x}|$:

$$\nabla |\mathbf{x}| = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$