Relativité et cosmologie II

Notes de cours du Professeur *Mikhaïl Shaposhnikov*

Claude Becker & Yannis Burnier

2008

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Faculté des Sciences de Base, Section de Physique
Institut de Théorie des Phénomènes Physiques
Laboratoire de Physique des Particules et de Cosmologie

Table des matières

Table des matières **i**

1 Actions en relativité générale **1**
1.1 Notations 1
1.2 Actions pour la matière 2
1.3 Action de Einstein-Hilbert 5
1.4 Tenseur énergie-impulsion 8

2 Evolution de l'Univers **11**
2.1 Espace homogène et isotrope 11
2.2 Equations de Friedmann 15
2.3 Différentes solutions des équations de Friedmann 18
2.4 Eq. de Friedmann en mécanique Newtonienne 20
2.5 Propagation de la lumière 20
2.6 Horizons 25
2.7 Densité critique de l'Univers 26
2.8 Le futur de l'Univers 27

3 Théorie du Big Bang **31**
3.1 Univers dominé par la radiation 32
3.2 Univers dominé par la matière 33
3.3 Univers dominé par la const. cosmologique 33
3.4 Evolution de l'Univers 34

4 Thermodynamique dans l'Univers **35**
4.1 Équilibre thermique 35
4.2 Gaz de bosons et de fermions 37
4.3 Application à l'Univers primordial 39
4.4 Photons dans l'Univers 41
4.5 Neutrinos dans l'Univers 43
4.6 Histoire thermodynamique 45

5 Fond de rayonnement cosmique (CMB) **47**
5.1 Mesures du CMB 47
5.2 Anisotropies du CMB 49

6 Nucléosynthèse **55**
6.1 Physique nucléaire 55
6.2 Nucléosynthèse par étape 56
6.3 Résultats de la nucléosynthèse 58

7 Matière sombre **61**
7.1 Mise en évidence de la matière sombre 61
7.2 Candidats à la matière sombre 65
7.3 Modifications de la gravité 67

8 Problèmes du modèle standard **69**
8.1 Le problème des horizons 69
8.2 Le problème de la courbure spatiale 71

9 Inflation **73**
9.1 Modèle inflationnaire 73
9.2 Inflation chaotique 75
9.3 Prédictions observationnelles 78

10 Formation des structures **81**
10.1 Instabilités de Jeans 81
10.2 Caractéristiques de la matière sombre 85

11 Baryogenèse **89**
11.1 Les trois critères de Sakharov 89
11.2 Exemple de modèle pour expliquer la baryogenèse 90

A Exercices **93**

B Formulaire **103**

Bibliographie **105**

Chapitre 1

Actions en relativité générale

Dans ce chapitre, nous allons écrire les actions des champs scalaire et vectoriel de manière invariante sous difféomorphismes. Nous allons ensuite introduire l'action du champ gravitationnel lui-même. Commençons par introduire les notations utilisées dans ce cours.

1.1 Notations

- Nous utilisons généralement les unités naturelles, où $c = \hbar = k_B = 1$.
- L'intervalle de longueur est noté $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ avec $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.
- Les indices grecs $(\mu, \nu, \dots)$ prennent les valeurs $0, 1, 2, 3$, tandis que les indices latins $(i, j, \dots)$ couvrent les valeurs $1, 2, 3$.
- La signature de la métrique est $(+1, -1, -1, -1)$.
- Les transformations de coordonnées

$$x^\mu \quad \rightarrow \quad x'^\mu = f^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

  agissent sur les vecteurs contravariants selon

$$A^\mu \quad \rightarrow \quad A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu$$

  et sur les vecteurs covariants selon

$$A_\mu \quad \rightarrow \quad A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu.$$

- Le tenseur $g^{\mu\nu}$ est défini comme l'inverse de la métrique, $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu$.
- Les indices sont montés ou descendus avec la métrique $g_{\mu\nu}$ selon

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \;\; A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu.$$

- L'espace plat est représenté par la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$.

– L'élément de volume invariant sous transformations de coordonnées est :

$$dV = \sqrt{-g}\ dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

avec $g = \det(g_{\mu\nu})$.

– La dérivée covariante agit sur les tenseurs selon :

$$D_\nu T^{\alpha\beta}_{\ \ \mu} = T^{\alpha\beta}_{\ \ \mu;\nu} = \frac{\partial T^{\alpha\beta}_{\ \ \mu}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\rho} T^{\rho\beta}_{\ \ \mu} + \Gamma^\beta_{\nu\rho} T^{\alpha\rho}_{\ \ \mu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu} T^{\alpha\beta}_{\ \ \rho}.$$

Le symbole de Christoffel Γ est défini à partir de la métrique :

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\alpha} \right). \tag{1.1}$$

– Le tenseur de courbure de Riemann est donné par

$$R^\lambda_{\ \mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa}\Gamma^\lambda_{\eta\nu}, \tag{1.2}$$

le tenseur de Ricci par $R_{\mu\kappa} = R^\lambda_{\ \mu\lambda\kappa}$ et la courbure scalaire par $R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}$. Il est possible de calculer directement le tenseur de Ricci avec :

$$R_{\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu}\Gamma^\lambda_{\lambda\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda_{\eta\nu}. \tag{1.3}$$

1.2 Actions pour la matière

Nous allons dériver l'action pour la matière dans un espace courbé, sans pour autant écrire l'action de la gravité elle-même. L'action S doit satisfaire les critères suivants :

Pour l'espace de Minkowski :

1. Invariance sous transformation de Lorentz.
2. Localité, c'est-à-dire $S = \int d^4x \mathscr{L}$, où $\mathscr{L}$ ne dépend que des champs et de leurs dérivées au point x.
3. Contient au plus des dérivées premières par rapport au temps, de manière à ne pas avoir de dérivées plus que secondes par rapport au temps dans les équations du mouvement.

Pour l'espace courbé on demande de plus que l'action soit invariante sous les transformations générales des coordonnées.

1. Invariance sous les transformations générales de coordonnées

$$x^\mu \quad \rightarrow \quad x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3).$$

2. Localité $S = \int dV \mathscr{L}$.

3. Dérivées premières au plus $\mathscr{L} = \mathscr{L}[\phi, \partial_\mu \phi]$.

La première étape consiste à trouver l'élément d'intégration dV.

Dans l'espace plat, l'élément de volume

$$dV = d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$$

est invariant sous transformations de Lorentz (Λ). En effet, les transformations de Lorentz ayant déterminant 1, on a

$$d^4x \quad \rightarrow \quad d^4x' = \det(\Lambda) d^4x = d^4x.$$

Pour l'espace courbé, on exige que l'élément de volume dV soit invariant par rapport aux transformations générales de coordonnées. Au voisinage d'un point x_0, on peut toujours ramener la métrique $g_{\mu\nu}$ à la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ par un changement de coordonnées

$$x^\mu \ \rightarrow \ y^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3).$$

Localement, on a donc $dV = d^4y$. En inversant la transformation de coordonnées, $y^\mu \ \rightarrow \ x^\mu(y^0, \ldots, y^3)$, on peut réécrire l'élément de volume en fonction des coordonnées initiales x^μ,

$$dV = d^4y = J d^4x,$$

où $J = \det(\frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu})$ est le Jacobien de la transformation de coordonnées. Comme $dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} dy^\nu$, et

$$g^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \eta^{\alpha\beta},$$

on peut écrire le Jacobien J à l'aide de la métrique :

$$\det(g^{\mu\nu}) = \frac{1}{J^2} \det(\eta^{\mu\nu}) = -\frac{1}{J^2}.$$

Nous avons donc

$$J^2 = -\frac{1}{\det(g^{\mu\nu})} = -\det(g_{\mu\nu}) = -g,$$

ce qui nous permet d'écrire l'élément de volume invariant :

$$dV = \sqrt{-g}\ d^4x. \tag{1.4}$$

Reste maintenant à généraliser les densités Lagrangiennes.

Champ scalaire réel

Dans le cas de l'espace de Minkowski, on a

$$S = \int d^4x \mathscr{L}$$

avec

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{1.5}$$

Pour la généralisation à l'espace courbé, on constate que $\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi$. Dans un espace courbé, la métrique plate $\eta_{\mu\nu}$ est remplacée par $g_{\mu\nu}$, et donc

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right]. \tag{1.6}$$

Notons que pour le cas d'un champ scalaire $D_\mu\phi = \partial_\mu\phi$, donc les dérivées n'ont pas besoin d'être transformées en dérivées covariantes.

Champ vectoriel

Dans l'espace de Minkowski, on a

$$S = \int d^4x\left[-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A^\mu A_\mu\right], \tag{1.7}$$

avec

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Pour un espace courbé, on généralise cette action de la manière suivante :

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}F_{\alpha\gamma}F_{\beta\delta} + \frac{1}{2}m^2g^{\alpha\beta}A_\alpha A_\beta\right]. \tag{1.8}$$

Comme pour le cas scalaire, comme $F^{\mu\nu}$ est antisymétrique, la dérivée n'a pas besoin d'être remplacée par une dérivée covariante ($F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = D^\mu A^\nu - D^\nu A^\mu$).

Particule classique

Rappelons encore que l'action de particules classiques de masse m est donnée par

$$S = -m\int ds. \tag{1.9}$$

Les champs spinoriels ne seront pas traités dans ce cours. La mise de leur action sous forme covariante est plus compliquée, et nécessite d'utiliser le formalisme des tétrades.

Équations du mouvement

Les équations du mouvement sont dérivées comme usuellement, en variant par rapport aux champs. Pour le champ scalaire par exemple, on a :

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\sqrt{-g}\left[g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\delta\phi - m^2\phi\delta\phi\right]\\ &= \int d^4x\left[-\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\right) - \sqrt{-g}m^2\phi\right]\delta\phi.\end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont donc

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\nu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\right)+m^2\phi=0$$

que l'on peut encore écrire comme

$$\phi^{;\mu}_{;\mu}+m^2\phi=0, \tag{1.10}$$

puisque

$$D_\mu A^\mu=\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}A^\mu\right). \tag{1.11}$$

Noter que cette relation n'est valable que pour une 4-divergence.

Pour les champs vectoriels, on a :

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\sqrt{-g}\left[-g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}F_{\alpha\gamma}\partial_\beta A_\delta+g^{\mu\nu}A_\mu\delta A_\nu m^2\right]\\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta\left(g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}\sqrt{-g}F_{\alpha\gamma}\right)+m^2g^{\mu\delta}A_\mu\right]\delta A_\delta.\end{aligned}$$

Les équations du mouvement sont donc

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\beta\left(\sqrt{-g}F^{\beta\delta}\right)+m^2A^\delta=0,$$

ou

$$F^{\beta\delta}_{;\beta}+m^2A^\delta=0. \tag{1.12}$$

Comme règle générale, les dérivées ordinaires sont transformées en dérivées covariantes.

1.3 Action de Einstein-Hilbert

Nous allons maintenant dériver l'action pour le champ gravitationnel. L'action doit satisfaire les conditions suivantes :

1. Invariance sous les transformations générales de coordonnées.
2. Localité.
3. Au plus des dérivées secondes par rapport au temps dans les équations du mouvement.

La seule action consistante avec les conditions (1) à (3) est l'action de Einstein-Hilbert :

$$S_g=-\frac{1}{16\pi G}\int d^4x\sqrt{-g}(R+2\lambda), \tag{1.13}$$

où R est la courbure scalaire et λ une constante, appelée constante cosmologique, qui peut en principe être ajoutée. Le point (3) nécessite d'être discuté. En effet, les symboles de Christoffels Γ contiennent des dérivées premières par rapport au

temps, R contient des dérivées secondes, donc potentiellement les équations du mouvement pourraient contenir des dérivées tierces. Ce n'est pas le cas, puisque l'action est linéaire en R.

Notez encore la dimensionalité de G. La courbure R étant de dimension GeV^2, l'action sans dimension, l'élément d'intégration d^4x de dimension GeV^{-4}, G est donc de dimension GeV^{-2}. On notera ainsi $G = M_{Pl}^{-2}$ avec $M_{Pl} = 1.22 \cdot 10^{19}[\mathrm{GeV}] = 2.18 \cdot 10^{-8}[kg]$ la masse de Planck.

Les équations d'Einstein proviennent de la variation de l'action par rapport à la métrique. L'action totale est donnée par :

$$S = S_g + S_m \tag{1.14}$$

où S_m est la contribution de la matière. Calculons maintenant la variation de cette action (on laisse tomber la constante cosmologique, dont la variation est facile) :

$$\begin{aligned}\delta S = \delta S_g + \delta S_m &= \delta S_m - \frac{1}{16\pi G}\int d^4x(\delta(\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}\delta R) \\ &= \delta S_m - \frac{1}{16\pi G}\int d^4x[\delta(\sqrt{-g})R + \sqrt{-g}(\delta g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu})]\end{aligned}$$

Il faut premièrement calculer la variation du déterminant de la métrique :

$$g = \det g_{\mu\nu} = \exp(\mathrm{Tr}(\ln(g_{\mu\nu}))).$$

Sa variation donne

$$\delta g = g\delta(\mathrm{Tr}(\ln g_{\mu\nu})),$$

et en supposant que la métrique est diagonalisable :

$$\delta g = g g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}.$$

On peut maintenant calculer :

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2\sqrt{-g}}\delta g = \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}.$$

Notez que pour la dernière égalité, on a utilisé la relation :

$$\delta g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}\delta g^{\alpha\beta} = \delta(g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}) = 0.$$

On obtient ainsi :

$$\delta S = \delta S_m - \frac{1}{16\pi G}\int d^4x\{\delta g^{\mu\nu}\sqrt{-g}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) + g^{\mu\nu}\sqrt{-g}\delta R_{\mu\nu}\}. \tag{1.15}$$

De manière générale, la variation de l'action de la matière peut être écrite comme

$$\delta S_m = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}, \tag{1.16}$$

avec $T_{\mu\nu}$ un tenseur symétrique dont la forme précise dépend de l'action de la matière considérée. Ce tenseur est appelé le tenseur énergie-impulsion et sera discuté dans la prochaine section. On peut voir que le premier terme de la variation de la métrique et essentiellement le côté gauche des équations d'Einstein. En effet, si le second terme de δS_g tombe, on a :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1.17}$$

Intéressons-nous donc au second terme de cette variation, soit

$$\int d^4x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} \tag{1.18}$$

Rappelons tout d'abord l'expression du tenseur de Ricci

$$R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\beta_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha_{\beta\mu}, \tag{1.19}$$

de même que celle du symbole de Christoffel

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (-\partial_\beta g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\beta\mu} + \partial_\mu g_{\nu\beta}).$$

La variation du tenseur de Ricci est alors donnée par

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \partial_\nu \delta\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} \Gamma^\beta_{\alpha\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \delta\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \delta\Gamma^\beta_{\nu\alpha} \Gamma^\alpha_{\beta\mu} - \Gamma^\beta_{\nu\alpha} \delta\Gamma^\alpha_{\beta\mu}. \tag{1.20}$$

En utilisant la définition de la dérivée covariante

$$D_\alpha A_\beta = \partial_\alpha A_\beta - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} A_\sigma,$$

on a ainsi

$$D_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \partial_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha_{\alpha\lambda} \delta\Gamma^\lambda_{\nu\mu} - \delta\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \delta\Gamma^\lambda_{\alpha\nu},$$

et

$$D_\nu \delta\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} = \partial_\nu \delta\Gamma^\alpha_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \delta\Gamma^\lambda_{\alpha\mu} - \delta\Gamma^\alpha_{\lambda\mu} \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} - \delta\Gamma^\alpha_{\nu\mu} \Gamma^\lambda_{\alpha\lambda}. \tag{1.21}$$

Les équations (1.19-1.21) nous permettent de prouver l'identité de Palatini

$$\delta R_{\mu\nu} = D_\alpha \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - D_\nu \delta\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}. \tag{1.22}$$

Ainsi l'équation (1.18), en se rappelant que $D_\alpha g^{\mu\nu} = 0$ devient

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \sqrt{-g} D_\alpha (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \sqrt{-g} D_\nu (g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}).$$

En utilisant la relation (1.11), on obtient finalement pour la variation du tenseur de Ricci

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu}) - \partial_\nu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\alpha_{\alpha\mu}).$$

En définissant le 4-vecteur $V^\alpha = g^{\mu\nu} \delta\Gamma^\alpha_{\mu\nu} - g^{\mu\alpha} \delta\Gamma^\beta_{\beta\mu}$, on obtient

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = \partial_\alpha (\sqrt{-g} V^\alpha).$$

On effectue alors l'intégrale de (1.18) sur un volume 4-dimensionnel Ω. En se servant du théorème de Gauss, on peut alors ramener cette intégrale à une intégrale sur le bord de Ω. $d\Sigma_\alpha$ est alors une élément infinitésimal d'une hypersurface 3-dimensionnelle :

$$\int_\Omega d^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int_\Omega d^4x\partial_\alpha(\sqrt{-g}V^\alpha) \equiv \oint_{\partial\Omega} d\Sigma_\alpha\sqrt{-g}V^\alpha. \tag{1.23}$$

Cependant cette intégrale est nulle puisque les variations s'annulent sur le bord $\partial\Omega$.

En résumé, on a prouvé que la variation de l'action (1.13) nous redonne bien les équations d'Einstein (on réintroduit ici la constante cosmologique pour la complétude).

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1.24}$$

1.4 Tenseur énergie-impulsion

Nous avons, pour le moment, représenté la matière à l'aide du tenseur énergie-impulsion. Nous allons maintenant expliciter le tenseur énergie-impulsion dans les cas les plus courants.

Champ scalaire réel

Rappelons l'action du champ scalaire :

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right].$$

En utilisant la relation $\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}$, la variation de l'action du champ scalaire par rapport à la métrique vaut

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\mathscr{L}\left(-\frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}\right) + \int d^4x\sqrt{-g}\frac{1}{2}\delta g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\mathscr{L}\right]\delta g^{\mu\nu},\end{aligned}$$

et donc le tenseur énergie-impulsion

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\mathscr{L} \tag{1.25}$$

est identique à celui de l'espace plat.

Champ vectoriel

Dans le cas du champ vectoriel, l'action est

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}F_{\alpha\gamma}F_{\beta\delta} + \frac{1}{2}m^2g^{\alpha\beta}A_\alpha A_\beta\right]$$

et sa variation par rapport à la métrique

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x\sqrt{-g}\left[-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}\mathscr{L}\delta g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\delta g^{\alpha\beta}g^{\gamma\delta}F_{\alpha\gamma}F_{\beta\delta} + \frac{m^2}{2}\delta g^{\alpha\beta}A_\alpha A_\beta\right] \\ &= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{-g}\left[-g^{\gamma\delta}F_{\alpha\gamma}F_{\beta\delta} + m^2A_\alpha A_\beta - g_{\alpha\beta}\mathscr{L}\right]\delta g^{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Le tenseur énergie-impulsion est donc

$$T_{\alpha\beta} = -g^{\gamma\delta}F_{\alpha\gamma}F_{\beta\delta} + m^2A_\alpha A_\beta - g_{\alpha\beta}\mathscr{L}. \tag{1.26}$$

Pour l'espace plat et dans le cas non massif ($m = 0$) on retrouve bien le tenseur énergie-impulsion de l'électrodynamique, par exemple

$$T_{00} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2). \tag{1.27}$$

Fluide idéal

Pour la cosmologie, le tenseur énergie impulsion le plus utilisé est celui du fluide idéal, c'est-à-dire sans viscosité. Dans ce cas

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \tag{1.28}$$

où u est la quadrivitesse du fluide, ρ sa densité d'énergie et p sa pression.

Dans le cas de matière non-relativiste, $u^i \sim 0$, et seulement $T_{00} = \rho$ est non-nul. Cette approximation est excellente pour la matière présente actuellement dans notre Univers.

Dans le cas ultra-relativiste, $p = \rho/3$, c'est-à-dire $T_{00} = \rho$ et $T_{ii} = -pg_{ij} = -\frac{\rho}{3}g_{ij}$.

Chapitre 2

Evolution de l'Univers

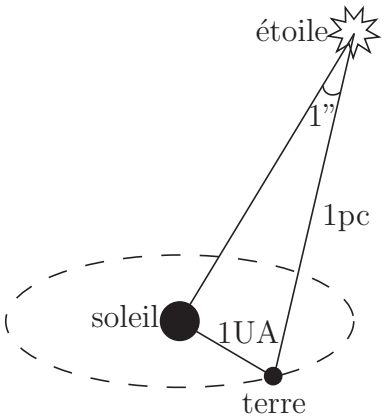
2.1 Espace homogène et isotrope – Métrique de Robertson-Walker

En cosmologie et en astrophysique apparaissent différentes échelles. Donnons quelques ordres de grandeur :

$$\begin{aligned} \text{Rayon de la terre} &\simeq 6,4 \cdot 10^8 \text{cm} \\ \text{Rayon du soleil} &\simeq 7 \cdot 10^{10} \text{cm} \\ \text{Distance terre-soleil} &\simeq 1,5 \cdot 10^{13} \text{cm} = 1\text{UA} \end{aligned}$$

Une unité courante est le *parsec*, défini comme étant la distance à laquelle la distance terre-soleil est vue comme sous un angle de 1 arcsec, i.e.

$$\begin{aligned} \text{pc} = \frac{1\text{UA}}{1\text{arcsec}} &\simeq 3,26 \text{ ly} \\ &\simeq 3 \cdot 10^{18} \text{cm}. \end{aligned}$$



Notre galaxie a une largeur de l'ordre de 30 kpc et une épaisseur de l'ordre de 10 kpc. Notre système solaire se trouve à environ 8 kpc du centre de la voie lactée. La galaxie la plus proche, Andromède, est distante d'environ 770 kpc. Les amas de galaxies (e.g. Virgo, Coma), qui comportent typiquement entre 10^3 et 10^4 galaxies, ont une taille de l'ordre de 10 Mpc. La taille de l'Univers visible est environ $5 \cdot 10^3$ Mpc.

Notre Univers est homogène et isotrope à grande échelle (i.e. pour des échelles plus grandes que l'échelle des amas de galaxies). Homogène signifie qu'il n'existe pas de point préféré dans l'espace. Isotrope signifie qu'il n'existe pas de direction préférée. Pour montrer que l'Univers est isotrope, on peut observer le ciel dans différentes directions et compter le nombre de galaxies pour voir s'il est plus ou moins le même dans chaque direction. Une autre preuve pour l'isotropie de l'Univers vient du fond de rayonnement cosmique (CMB – "Cosmic Microwave Background") qu'on discutera plus en détail dans ce cours. Montrer que l'Univers est homogène s'avère plus difficile, vu qu'on ne peut pas l'étudier d'un autre point de l'espace. Pour étudier l'homogénéité on essaie de mesurer les distances entre les galaxies et de reconstruire une image 3D de notre Univers.

On aimerait maintenant comprendre comment décrire mathématiquement un espace homogène et isotrope. Essayons donc de trouver quelles sont les métriques qui décrivent un espace homogène et isotrope. Pour répondre à cette question, oublions pour l'instant le temps et concentrons-nous sur la partie spatiale de la métrique :

$$ds^2 = \gamma_{ij} dx^i dx^j, \qquad \text{avec signature}(\gamma) = (+,+,+).$$

La métrique γ_{ij} détermine complètement la géometrie de l'espace courbe et entre autre le tenseur de courbure de Riemann R_{ijkl}. Rappellons les propriétés de symétrie du tenseur de Riemann

$$\begin{aligned} R_{ijkl} &= -R_{jikl}, \\ R_{ijkl} &= -R_{ijlk}, \\ R_{ijkl} &= R_{klij}. \end{aligned}$$

On va utiliser ces propriétés et exiger qu'il n'existe pas de point ou de direction préféré pour déterminer la structure de R_{ijkl} dans un espace homogène et isotrope.

Choisissons un système de coordonnées localement plat autour d'un point $\bar{x}$, i.e. $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ et $\Gamma^i_{jk} = 0$. Alors, par les propriétés de symétrie et pour avoir un espace sans direction préférée, on aura :

$$R_{ijkl} = \zeta \left[\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}\right],$$

où ζ est une constante. Pour un système de coordonnées quelconque on obtient :

$$R_{ijkl} = \zeta \left[\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}\right]. \tag{2.1}$$

Par contraction des indices on trouve successivement le tenseur de Ricci et la courbure scalaire :

$$\begin{aligned} R_{ij} &= 2\gamma_{ij}\zeta, \\ R &= 6\zeta. \end{aligned}$$

On distingue 3 types d'espace :

$$\begin{cases} \zeta > 0 : \text{courbure constante positive}, \\ \zeta = 0 : \text{espace plat}, \\ \zeta < 0 : \text{courbure constante négative}. \end{cases}$$

Cas $\zeta = 0$

On peut choisir les coordonnées cartésiennes : $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$. Donc

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{2.2}$$

Cas $\zeta > 0$

En trois dimensions, on connaît un exemple d'un espace homogène et isotrope à courbure constante positive : la 3-sphère S^3 définie par l'équation $\sum_{i=1}^4 x_i^2 = a^2$, où a est le rayon de la sphère. L'élément de distance est le même qu'en espace plat quadri-dimensionel, à savoir :

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Toutefois sur la 3-sphère on peut exprimer dx_4 en fonction des autres coordonnées,

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 + x_4 dx_4 = 0,$$

d'où

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

On aimerait encore écrire la métrique sous une forme simplifiée. Introduisons des coordonnées sphériques (r, θ, φ) définies par :

$$\begin{cases} x_1 &= r \sin\theta \cos\varphi, \\ x_2 &= r \sin\theta \sin\varphi, \\ x_3 &= r \cos\theta. \end{cases}$$

On trouve alors que

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dr^2 + r^2 \left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right],$$

et

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 = r dr.$$

L'élément de longueur est donné par

$$\begin{aligned} dl^2 &= dr^2 + r^2 \left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right] + \frac{r^2 dr^2}{a^2 - r^2} \\ &= \frac{a^2}{a^2 - r^2} dr^2 + r^2 \left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right]. \end{aligned}$$

Posons encore $d\Omega^2 := d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ et $\bar{r} := \frac{r}{a}$,

$$dl^2 = a^2 \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - \bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right]. \tag{2.3}$$

Le domaine de définition des variables est

$$\begin{cases} 0 \leq \bar{r} \leq 1, \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Remarquons encore que la courbure scalaire est donnée par $\frac{1}{a^2} > 0$.

Cas $\zeta < 0$

On s'attend à ce que le résultat soit identique à celui de la sphère, mais où on a remplacé $a^2 \mapsto -a^2$ pour avoir une courbure scalaire négative. Ainsi

$$\begin{aligned} dl^2 &= \frac{-a^2}{-a^2 - r^2} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= a^2 \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 + \bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right]. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Le domaine de définition des variables est donné par

$$\begin{cases} 0 \leq \bar{r} \leq \infty, \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

On peut résumer les trois cas précédents dans la formule générale

$$dl^2 = a^2 \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right], \tag{2.5}$$

où

$$k = \begin{cases} +1 & \text{, Univers fermé,} \\ 0 & \text{, espace plat,} \\ -1 & \text{, Univers ouvert.} \end{cases}$$

Notons qu'avec une redéfinition des coordonnéees, on peut toujours se ramener à $k = -1, 0, 1$. Ces trois valuers de k correspondent aux différentes géometries possibles. La terminologie d'un Univers fermé ou ouvert se réfère à la finitude ou infinitude du volume de l'Univers.

Finalement on doit rajouter la composante temporelle. Si l'espace est homogène et isotrope, le paramètre d'échelle a peut au plus dépendre du temps. Ainsi

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{d\bar{r}^2}{1 - k\bar{r}^2} + \bar{r}^2 d\Omega^2 \right]. \tag{2.6}$$

Cette métrique est appellée métrique de Robertson-Walker(RW). Ci-dessus nous donnons les composantes non-nulles des symboles de Christoffel et du tenseur de Ricci, ainsi que la courbure scalaire. Ces expressions seront démontrées en

exercices.

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{ij} &= \frac{\dot{a}}{a}\, g_{ij}, \\
\Gamma^i_{0j} &= \frac{\dot{a}}{a}\, \delta^i_j, \\
\Gamma^i_{jk} &= \frac{1}{2}\, g^{il}\left[\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk}\right], \\
R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, \\
R_{ij} &= -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}\right] g_{ij}, \\
R &= -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right].
\end{aligned}$$

2.2 Equations de Friedmann

Nous allons maintenant dériver les équations régissant l'Univers lorsque celui-ci est décrit par la métrique de Robertson-Walker. Pour ce faire nous utilisons les équations d'Einstein en prenant comme matière un fluide parfait qui décrira notre Univers homogène et isotrope. Le tenseur d'énergie-impulsion d'un fluide parfait est :

$$T_{\mu\nu} = (p+\rho)u_\mu u_\nu - p\, g_{\mu\nu},$$

où p est la pression, ρ la densité d'énergie et u^μ le quadri-vecteur vitesse. Si le fluide est au repos $u^\mu = \{1, \vec{0}\}$, alors $T_{00} = \rho$ et $T_{ij} = -p\, g_{ij}$.

En injectant ceci dans les équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu},$$

on trouve pour la composante $\mu = \nu = 0$:

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{1}{2}(-6)\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right] - \lambda = 8\pi G\rho,$$

ce qui nous donne la première équation de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho.$$

Pour la composante ij on trouve

$$-\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}\right] g_{ij} - \frac{1}{2}(-6)\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right] g_{ij} - \lambda g_{ij} = 8\pi G(-p)g_{ij},$$

ce qui nous donne la deuxième équation de Friedmann

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \lambda = -8\pi G\, p.$$

Toutes les autres composantes des équations d'Einstein sont identiquement nulles. Voici en résumé les équations régissant l'Univers homogène et isotrope décrit par la métrique de Robertson-Walker, que l'on appelle communément équations de Friedmann

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \tag{2.7}$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \lambda = -8\pi G\, p. \tag{2.8}$$

$$\tag{2.9}$$

Conservation du tenseur d'énergie-impulsion

Par ailleurs, on aura la conservation du tenseur d'énergie-impulsion :

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} T^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\alpha} T^{\mu\alpha} = 0. \tag{2.10}$$

Un calcul explicite de la composante $\nu = 0$ donne :

$$\begin{aligned} \nabla_\mu T^{\mu 0} &= \partial_\mu T^{\mu 0} + \Gamma^\mu_{\mu\alpha} T^{\alpha 0} + \Gamma^0_{\mu\alpha} T^{\mu\alpha} = \partial_0 T^{00} + \Gamma^\mu_{\mu 0} T^{00} + \Gamma^0_{ij} T^{ij} \\ &= \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho + \dot{a} a \delta_{ij} p \frac{1}{a^2}\delta^{ij} = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + p\right), \end{aligned}$$

d'où

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + p\right) = 0, \tag{2.11}$$

ce qui peut être mis sous la forme suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho a^3\right] + p\frac{\partial}{\partial t} a^3 = 0,$$

i.e.

$$dE + p\, dV = 0. \tag{2.12}$$

Ceci n'est rien d'autre que la première loi de thermodynamique. Remarquons encore qu'on aurait aussi pû obtenir cette relation à partir des équations de Friedmann. En fait, en notant la première et deuxième équation de Friedmann par $(F1)$ et $(F2)$ respectivement, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}(F1) + 3\frac{\dot{a}}{a}(F1) - \frac{\dot{a}}{a}(F2) = \nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0.$$

Forme équivalente des équations de Friedmann

Introduisons les notations suivantes :

$$\rho_\lambda := \frac{\lambda}{8\pi G}, \qquad \rho_{tot} := \rho + \rho_\lambda,$$

$$p_\lambda := -\frac{\lambda}{8\pi G}, \qquad p_{tot} := p + p_\lambda.$$

Ce sont la densité et la pression associées à la constante cosmologique ainsi que la densité et pression totale provenant de la matière et de la constante cosmologique. Avec ces notations, les équations de Friedmann peuvent être réécrites de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho_{tot}, \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} &= -8\pi G\, p_{tot}. \end{aligned}$$

On peut éliminer k en prenant la différence de ces deux équations :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho_{tot} + 3p_{tot}\right). \tag{2.13}$$

En tout on a dérivé quatre équations : deux équations de Friedmann, une équation provenant de la conservation de l'énergie-impulsion et l'équation qu'on vient d'obtenir. Parmis ces équations, il n'y a que deux qui sont linéairement indépendantes. Selon la nature du problème il peut être plus utile de travailler avec une équation plutôt qu'avec une autre.

Paramètre de décélération

On définit le paramètre de décélération q par

$$q(t) := -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2}, \tag{2.14}$$

qu'on peut exprimer en fonction des paramètres de densité observables :

$$q(t) = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{4\pi G}{3}\frac{\rho_{tot} + 3p_{tot}}{\frac{8\pi G}{3}\rho_{tot} - \frac{k}{a^2}}. \tag{2.15}$$

Dans le cas d'un Univers plat $k = 0$, on obtient

$$\Rightarrow q(t) = \frac{\rho_{tot} + 3p_{tot}}{2\rho_{tot}}$$

En explicitant les différentes contributions à l'énergie et à la pression

$$\rho_{tot} = \rho_{mat} + \rho_{rad} + \rho_\lambda, \qquad p_{tot} = p_{rad} + p_\lambda,$$

on peut écrire

$$q(t) = \frac{\Omega_{mat}}{2} + \frac{1 + 3w_\lambda}{2}\Omega_\lambda, \tag{2.16}$$

où on a introduit $w_\lambda = \frac{p_\lambda}{\rho_\lambda}$ et les fractions critiques Ω. Le premier terme du membre de droite est toujours positif, mais le second peut être négatif si $1 + 3w_\lambda < 0$. Donc si $w_\lambda < -1/3$ et si le deuxième terme est assez grand, le paramètre de décélération peut prendre une valeur négative. Il décrit alors un Univers en expansion accélérée, et on l'appelle alors parfois paramètre d'accélération. Les observations de Supernovae de type Ia sont en faveur d'un $w_\lambda < -\frac{1}{3}$ et notre Univers se trouve actuellement en expansion accélérée.

2.3 Différentes solutions des équations de Friedmann

Univers statique sans constante cosmologique : $\dot{a} = 0$**,** $\lambda = 0$

Dans ce cas les équations de Friedmann se réduisent à

$$\begin{aligned} \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho, \\ \frac{k}{a^2} &= -8\pi G\, p. \end{aligned}$$

Comme l'Univers n'est pas vide, on a $\rho > 0$, et la première équation implique alors que $k > 0$. Mais pour $k = 1$, la deuxième équation impliquerait que la pression serait négative $p < 0$, ce qui n'a pas de sens. En doit donc conclure qu'il n'existe pas de solution consistente pour un Univers statique sans constante cosmologique.

Historiquement, Einstein avait déjà réalisé ce problème. Comme il croyait en l'existence d'un Univers statique, il décida en 1917 de rajouter une constante cosmologique non-nulle aux équations. En 1929, quand Hubble mettais en évidence l'expansion de l'Univers, Einstein revenait sur l'introduction de la constante cosmologique, la qualifiant de "plus grande bêtise de sa vie". Des observations récentes suggèrent qu'il existe néanmoins une constante cosmologique non-nulle, mais très petite. A l'heure actuelle on ne sait pas expliquer pourquoi elle est si faible ; c'est le problème de la constante cosmologique.

Univers statique avec constante cosmologique : $\dot{a} = 0$**,** $\lambda \neq 0$

Les équations de Friedmann s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{k}{a^2} - \frac{\lambda}{3} &= \frac{8\pi G}{3}\rho, \\ \frac{k}{a^2} - \lambda &= -8\pi G\, p. \end{aligned}$$

Si les vitesses des étoiles sont faibles, on peut supposer que $p \simeq 0$. La deuxième équation implique alors

$$\frac{k}{a^2} = \lambda,$$

ce qui, injecté dans la première équation, nous donne

$$\lambda = 4\pi G\rho. \tag{2.17}$$

Comme $\rho > 0$ on doit aussi avoir $\lambda > 0$ et donc $k > 0$. Pour $k = 1$ on trouve pour a :

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G\rho}}. \tag{2.18}$$

Cette relation entre la densité ρ et la taille de l'Univers fût déjà dérivée par Einstein en 1917. Ce modèle statique d'Einstein a malheureusement un problème conceptuel : si on suppose $\rho = 0$, alors comme $\lambda \neq 0$, l'espace vide lui-même engendrerai une force de gravitation.

Univers vide statique : $\dot{a} = 0$**,** $\rho = p = 0$

Les équations de Friedmann se réduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{k}{a^2} - \frac{\lambda}{3} &= 0, \\ \frac{k}{a^2} - \lambda &= 0. \end{aligned}$$

On est alors confronté au paradoxe suivant : si $\lambda = 0$, alors $k = 0$ et un Univers plat est donc solution. Mais on sait que dans ce cas il n'existe pas de solution statique. Pour avoir une solution statique il faut choisir $\lambda \neq 0$, donc $k \neq 0$ mais alors l'espace plat n'est plus une solution. Ce paradoxe fût résolu en 1922 quand Alexander Friedmann proposait un modèle dans lequel l'Univers n'est plus statique.

Univers non-statique : $\dot{a} \neq 0$

Considérons, pour simplifier, un Univers plat sans constante cosmologique : $\lambda = k = 0$. Les équations de Friedmann sont alors

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho, \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} &= -8\pi G\, p \simeq 0. \end{aligned}$$

Multiplions la deuxième équation par $\frac{a}{\dot{a}}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad 2\frac{\ddot{a}}{\dot{a}} + \frac{\dot{a}}{a} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(2\ln\dot{a} + \ln a\right) = 0 \\ &\Rightarrow \quad \ln\left(\dot{a}^2 a\right) = \text{const} \Rightarrow \dot{a}^2 a = \text{const} \\ &\Rightarrow \quad \sqrt{a}da = \text{const}\cdot dt \Rightarrow a^{3/2} = \text{const}\cdot t. \end{aligned}$$

D'où

$$a(t) = a_0\left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}. \tag{2.19}$$

On voit que a augmente en fonction du temps – l'Univers est en expansion. On peut ensuite injecter cette solution dans la première équation de Friedmann :

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \left(\frac{2}{3}\frac{1}{t}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \\ &\Rightarrow \quad \rho = \frac{4}{9}\frac{3}{8\pi G}\frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\rho(t) = \frac{1}{6\pi G}\frac{1}{t^2}. \tag{2.20}$$

En particulier, connaissant la densité ρ, on peut déterminer l'âge de l'Univers. Constatons aussi que pour $t \to 0$, la densité diverge $\rho \to \infty$ (Big Bang).

2.4 Equations de Friedmann en mécanique Newtonienne

Il s'avère que l'on peut dériver l'essentiel des équations de Friedmann déjà en mécanique Newtonienne et sans avoir recours à la relativité générale. Considérons le cas suivant

$k = 0$, espace plat,
$\lambda = 0$, le vide ne produit pas de force gravitationnelle,
$p = 0$, mouvement non-relativiste ($p \ll \rho$).

Considérons une sphère de rayon variable $a(t)$ remplie d'un gaz de particules sans interaction distribuées de façon homogène et isotrope. D'une part on peut écrire la conservation de l'énergie totale à l'intérieur de cette sphère :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \rho\right) = 0.$$

En développant on retrouve une des équations de Friedmann :

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0.$$

D'autre part on peut écrire la loi de Newton pour une particule de gaz de masse m située sur la sphère :

$$m\ddot{a} = -G \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \cdot m \cdot \frac{1}{a^2}.$$

Ce qui implique

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho.$$

On a retrouvé l'autre équation de Friedmann dans le cas particulier $p_{tot} = 0$ et $\rho_{tot} = \rho$. Pour trouver le terme $+3p_{tot}$ dans cette équation il faut utiliser la relativité générale.

2.5 Propagation de la lumière dans l'Univers – Décalage vers le rouge

On aimerait étudier la propagation de la lumière dans un Univers décrit par les équations de Friedmann. Le moyen direct serait d'étudier les équations de Maxwell dans l'espace courbe de Robertson-Walker. Mais il y a en fait un moyen plus facile qui est de faire usage d'un système de coordonnées particulier, appellé coordonnées conformes. On réécrit la métrique de Robertson-Walker comme suit

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 + a^2(t)dl^2 \\ &= a^2(t)\left[\frac{dt^2}{a^2(t)} + dl^2\right]. \end{aligned}$$

On introduit le temps conforme η définit par

$$d\eta := \frac{dt}{a(t)}, \tag{2.21}$$

donc

$$\eta - \eta_0 = \int_0^t dt' \frac{1}{a(t')}.$$

La métrique s'écrit alors

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[d\eta^2 + dl^2\right] \equiv a^2(\eta)\bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu. \tag{2.22}$$

La métrique $\bar{g}_{\mu\nu}$ ainsi définie est indépendante du temps. On peut maintenant étudier les équations de Maxwell dans ce système de coordonnées. Nous allons partir de l'action de l'électromagnétisme dans un espace courbe :

$$S_{EM} = \int d^4x\,\sqrt{|g|}\left[-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}\right].$$

Pour le système de coordonnées de temps conforme on a

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{[a^2(\eta)]^4}\sqrt{|\bar{g}|} = a^4(\eta)\sqrt{|\bar{g}|},$$

et

$$g^{\mu\nu} = \frac{1}{a^2(\eta)}\bar{g}^{\mu\nu}.$$

D'où

$$S_{EM} = -\frac{1}{4}\int d^4x\,a^4(\eta)\sqrt{|\bar{g}|}\cdot\frac{1}{a^2(\eta)}\bar{g}^{\mu\nu}\cdot\frac{1}{a^2(\eta)}\bar{g}^{\rho\sigma}\cdot F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma},$$

ou encore

$$S_{EM} = -\frac{1}{4}\int d^4x\,\sqrt{|\bar{g}|}\bar{g}^{\mu\nu}\bar{g}^{\rho\sigma}F_{\mu\rho}F_{\nu\sigma}. \tag{2.23}$$

Comme $\bar{g}_{\mu\nu}$ est statique, cette action ne dépend pas explicitement du temps. De plus, si on considère des "petites" distances ($\bar{r} \ll 1$), on peut supposer que l'espace est pratiquement plat ($k = 0$) et utiliser pour $\bar{g}_{\mu\nu}$ la métrique de Minkowski :

$$ds^2 \simeq a^2(\eta)\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu.$$

Dans ce cas, les solutions des équations de Maxwell sont simplement des ondes planes

$$A_\mu \propto e^{i\omega\eta + ik\bar{x}}, \tag{2.24}$$

où $\omega, k =$ const et $\bar{x}, \eta, \omega, k$ sont sans dimension.

Ayant trouvé la solution des équations de Maxwell, on doit encore l'interpréter physiquement. Rappelons qu'on a utilisé les coordonnées suivantes

$$ds^2 = a^2(\eta)\left[d\eta^2 - d\bar{x}^2\right].$$

Un observateur de cette onde électromagnétique utilisera simplement la métrique de Minkowski

$$ds^2 = dt^2 - dx^2.$$

On obtient ainsi la relation

$$a^2(\eta)d\bar{x}^2 = dx^2.$$

Ainsi l'observateur va en fait observer une onde plane donnée par

$$A_\mu \propto e^{i\omega\eta + ik\frac{x}{a(\eta)}}.$$

Cet observateur va donc mesurer comme longeur d'onde

$$\lambda = \frac{2\pi a(t)}{k}. \tag{2.25}$$

On conclut que $\lambda \propto a(t)$. Dans un Univers en expansion, le facteur d'échelle $a(t)$ croît, et donc aussi la longeur d'onde de la lumière observée. On peut illustrer cette augmentation de la longeur d'onde en s'imaginant de dessiner une onde sur un ballon et de le gonfler ; la longueur d'onde va augmenter avec le rayon du ballon.

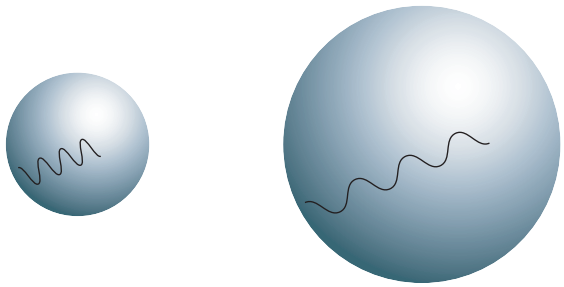


FIG. 2.1 – Augmentation de la longueur d'onde à cause de l'expansion de l'Univers

Considérons une source lumineuse (e.g. étoile) émettant de la lumière de longueur d'onde λ_0 à une distance ℓ de la terre. Calculons la longeur d'onde λ qu'on oberserverait sur la terre. Soit t le temps de réception du signal sur terre et soit $t_0 \simeq t - \frac{\ell}{c}$ le temps d'émission du signal lumineux (cette relation n'est qu'approximative car l'Univers est en expansion). Comme $\lambda \propto a$ on a

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a(t_0)}{a(t)} \Rightarrow \lambda(t) = \lambda_0 \frac{a(t)}{a(t - \frac{\ell}{c})}.$$

Comme $\frac{\ell}{c}$ est petit, on peut développer en série

$$\lambda(t) \simeq \lambda_0 \frac{a(t)}{a(t)(1 - \frac{\dot{a}}{a}\frac{\ell}{c})} \simeq \lambda_0 \left(1 + \frac{\dot{a}}{a}\frac{\ell}{c}\right).$$

On appelle décalage vers le rouge ("redshift"), noté z, le rapport

$$z := \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}. \tag{2.26}$$

D'où finalement (avec $c = 1$)

$$z = \frac{\dot{a}}{a}\ell = H\ell, \tag{2.27}$$

où $H := \frac{\dot{a}}{a}$ est appelé constante de Hubble, même si elle n'est pas vraiment une *constante* vu qu'elle dépend du temps. On note par H_0 la constante de Hubble à notre époque, donc $H_0 = H(t_0)$. La relation entre le décalage vers le rouge et la constante de Hubble est communément appellée la loi de Hubble. Elle montre que, dans un Univers en expansion, les longueurs d'ondes sont déplacées vers le rouge. En 1929, Edwin Hubble a observé en premier cette relation linéaire entre la distance ℓ et le décalage vers le rouge z. C'était une première indication expérimentale pour l'expansion de l'Univers. Ci-après se trouvent deux diagrammes de Hubble. Ils montrent la vitesse de la source en fonction de sa distance. Surtout le diagramme récent de 2005 met bien en évidence une dépendence linéaire. Actuellement, les mesures du paramètre de Hubble donnent :

$$H_0 = 71 \pm 4\ \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}. \tag{2.28}$$

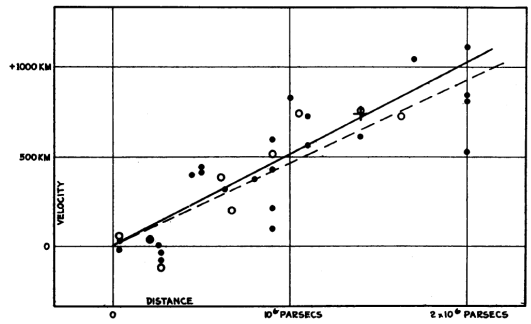


FIG. 2.2 – Diagramme publié par Edwin Hubble dans son article de 1929 [1].

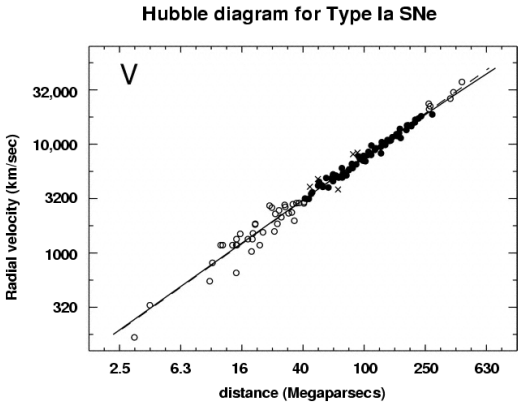


FIG. 2.3 – Diagramme de Hubble (pour les supernovae) de 2005 [2].

On peut constater dans le diagramme de Hubble de 1929 que l'unité pour la vitesse est fausse (km au lieu de km/s). En plus, la valeur pour la constante H_0 déterminée par Hubble lui-même était fausse d'un facteur ~ 10.

Expérimentalement il est relativement aisé de mesurer le décalage vers le rouge des étoiles. Pour cela il suffit de mesurer le déplacement des lignes spectrales dans le spectre de la lumière reçue. La mesure des distances par contre est plus délicate. L'idée est de déduire la distance de l'objet à partir de sa luminosité. Mais pour cela il faut faire usage de ce qu'on appelle des chandelles standards, qui est un objet astrophysique à luminosité connue. Il est alors facile de relier la luminosité de ces chandelles standards et la luminosité observée sur terre à leur distance.

Il existe une interprétation équivalente de la loi de Hubble à l'aide de l'effet Doppler. On considère que l'observateur est au repos, mais que la source s'éloigne de lui à une vitesse v. Alors, par effet Doppler, la longueur d'onde observée sera différente de celle émise, plus particulièrement on aura :

$$z = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} - 1 \overset{v \ll c}{\simeq} v = \dot{\ell} = \frac{\dot{a}}{a}\ell,$$

i.e.

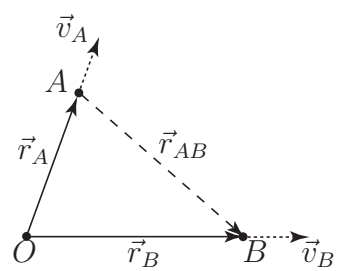
$$\dot{\vec{\ell}} = H\vec{\ell}.$$

Cette relation motive aussi le choix d'unités pour la constante de Hubble :

$$[H] = \frac{[\dot{\ell}]}{[\ell]} = \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}. \tag{2.29}$$

On a vu que l'homogénéité et l'isotropie de l'Univers impliquent la loi de Hubble. Etudions si la réciproque est vraie aussi. Il est clair que la loi de Hubble implique que l'Univers est isotrope, vu que H ne dépend pas de la direction d'observation. Il s'avère que la loi de Hubble implique aussi que l'Univers est homogène. En effet, on a

$$\begin{aligned} \vec{v}_A &= H\vec{r}_A, \\ \vec{v}_B &= H\vec{r}_B, \end{aligned}$$



mais aussi pour la vitesse du point B par rapport au point A

$$\begin{aligned} \vec{v}_B \Big)_A &= H\vec{r}_{AB}, \\ \vec{v}_B \Big)_A &= \vec{v}_B - \vec{v}_A = H(\vec{r}_B - \vec{r}_A). \end{aligned}$$

Les deux dernières relations étant égales, on conclut qu'il y a homogénéité.

2.6 Horizons

L'Univers ayant un âge fini, la lumière dans l'Univers n'a pû parcourir qu'une distance finie. Il s'en suit que très probablement nous ne pouvons observer qu'une partie de notre Univers. De plus, si l'expansion de l'Univers est trop grande, cette partie visible deviens de plus en plus petite, vu que la lumière des régions les plus lointaines ne peut plus nous atteindre. Pour discuter ces phénomènes nous allons maintenant introduire la notion d'horizon.

Horizon d'évènement

Le premier horizon que nous introduisons est l'horizon d'évènement ("event horizon"). Il correspond au rayon de la région de l'Univers dans le passé qui peut nous influencer causalement. Tout événement en-dehors de cet horizon ne peut pas nous influencer vu que seuls les signaux dans notre horizon d'événement peuvent nous atteindre.

Nous voulons calculer la distance qu'un photon peut parcourir s'il est émis à l'instant t. Supposons que le mouvement du photon se situe dans un plan et posons en conséquence dans la métrique de Robertson-Walker $ds^2 = 0$, $d\theta = d\phi = 0$, ce qui donne :

$$\frac{dt}{a} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}.$$

La distance en coordonnées comobiles est alors donnée par

$$D_e(t) = \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}.$$

Pour passer à une distance physique il suffit de multiplier la distance exprimée en coordonnées comobiles par le facteur d'échelle :

$$d_e(t) = a(t) \int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')}.$$

Remarquons encore que toutes ces formules n'ont de sens que si les intégrales convergent. Si tel n'est pas le cas, on dit que l'horizon en question n'existe pas.

Horizon de particule

Le second horizon est appelé horizon de particule ("particle horizon"). Il s'agit de connaître l'étendue de la région à laquelle nous sommes causalement reliés à l'instant t_0. En coordonnés comobiles nous aurons

$$D_p(t_0) = \int_{t_{min}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)},$$

et donc la distance physique est

$$d_p(t_0) = a(t_0) \int_{t_{min}}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}.$$

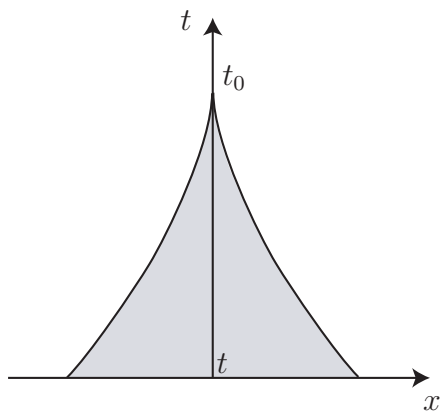


FIG. 2.4 – Horizon d'événement

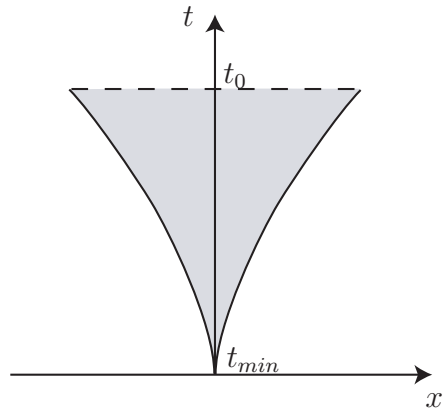


FIG. 2.5 – Horizon de particule

2.7 Densité critique de l'Univers

Jusqu'à présent notre étude s'est limitée au cas particulier $\lambda = 0, p = 0, k = 0$. Afin de pouvoir faire une étude plus générale, commençons par réécrire une des équations de Friedmann :

$$\begin{aligned} H^2 + \frac{k}{a^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho_{tot} \\ \Rightarrow \quad \frac{k}{H^2 a^2} &= \frac{8\pi G \rho_{tot}}{3H^2} - 1 \equiv \frac{\rho_{tot} - \rho_c}{\rho_c}, \end{aligned}$$

où on a introduit la densité critique définie par

$$\rho_c := \frac{3H^2}{8\pi G}. \tag{2.30}$$

La densité critique peut être déduite de la constante de Hubble :

$$\rho_c \approx 1,88 \cdot h^2 \cdot 10^{-29} \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3},$$

où on a écrit la constante de Hubble de la manière suivante

$$H = 100 \cdot h \cdot \frac{\mathrm{km/s}}{\mathrm{Mpc}}.$$

De plus, l'équation de Friedmann implique

$$\mathrm{sign}(k) = \mathrm{sign}(\rho_{tot} - \rho_c), \tag{2.31}$$

ainsi

$$\begin{cases} \rho_{tot} > \rho_c & \Rightarrow \quad k = 1 \quad \text{Univers fermé,} \\ \rho_{tot} = \rho_c & \Rightarrow \quad k = 0 \quad \text{Univers plat,} \\ \rho_{tot} < \rho_c & \Rightarrow \quad k = -1 \quad \text{Univers ouvert.} \end{cases}$$

La densité critique n'est pas forcément constante et peut dépendre du temps. Mais d'après (2.31) le signe de $\rho_{tot} - \rho_c$ est indépendant du temps. Les observations récentes suggèrent que

$$\rho_{tot} \simeq \rho_c \ \pm (2-3)\%,$$

notre Univers est donc extrèmement proche d'un Univers plat.

Il est utile d'introduire encore une autre notation ; les abondances Ω, aussi appellées les fractions critiques :

$$\Omega_{mat} := \frac{\rho_{mat}}{\rho_c}, \quad \Omega_\lambda := \frac{\rho_\lambda}{\rho_c}, \quad \Omega_k := -\frac{k^2}{a_0^2 H_0^2}. \tag{2.32}$$

Dans ces notations, l'équation de Friedmann prend une forme particulièrement simple

$$\Omega_{mat} + \Omega_\lambda + \Omega_k = 1. \tag{2.33}$$

2.8 Le futur de l'Univers

On a vu que notre Univers se trouve dans un état d'expansion. Mais que peut-on dire sur le futur de l'Univers ? Considérons la situation $\lambda = 0, p = 0$. La valeur de k n'étant pas fixée, prenons la forme des équations de Friedmann qui est indépendante de k :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho,$$

et multiplions par $a\dot{a}$

$$\dot{a}\ddot{a} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{a}^2\right) = -\frac{4\pi G}{3}\rho a\dot{a}. \tag{2.34}$$

On aimerait réécrire $\rho a\dot{a}$ comme dérivée totale par rapport au temps. Pour cela, constatons déjà qu'on a trivialement

$$\frac{d}{dt}\left(\rho a^2\right) = \dot{\rho}a^2 + \rho 2a\dot{a}. \tag{2.35}$$

Or la conservation de l'énergie implique

$$\frac{d}{dt}\left(\rho a^3\right) = \dot{\rho}a^3 + 3\rho a^2\dot{a} = 0, \tag{2.36}$$

i.e.

$$\dot{\rho}a^2 = -3\rho a\dot{a}.$$

donc

$$\frac{d}{dt}\left(\rho a^2\right) = -3\rho a\dot{a} + 2\rho a\dot{a} = -\rho a\dot{a}. \tag{2.37}$$

On peut à présent réécrire l'équation (2.34) comme dérivée totale et l'intégrer par rapport au temps :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\dot{a}^2\right) = \frac{4\pi G}{3}\frac{d}{dt}\left(\rho a^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2\right) = 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho a^2 = \text{const} \overset{t=t_0}{=} \frac{1}{2}\dot{a}_0^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho_0 a_0^2.$$

De plus

$$\rho a^3 = \text{const} = \rho_0 a_0^3 \quad \Rightarrow \quad \rho a^2 = \frac{\rho_0 a_0^3}{a}$$
$$H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0} \quad \Rightarrow \quad \dot{a}_0^2 = H_0^2 a_0^2,$$

ce qui, injecté dans l'équation d'avant, donne

$$\Rightarrow \quad \dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0 a_0^3}{a} + H_0^2 a_0^2 - \frac{4\pi G}{3}\rho_0 a_0^2$$
$$\Rightarrow \quad \dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0 a_0^3}{a} - \frac{4\pi G}{3} a_0^2 \left(\rho_0 - \rho_{c,0}\right).$$

L'équation à résoudre est donc :

$$\dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0 a_0^3}{a} = -\frac{4\pi G}{3} a_0^2 \left(\rho_0 - \rho_{c,0}\right) = \text{const}, \tag{2.38}$$

qui est clairement de la forme $E_{cin} + U = E_{tot} = \text{const}$. La solution exacte de cette équation est donnée par :

$$t = \pm \int \frac{da}{\sqrt{\frac{8\pi G}{3}\frac{\rho_0 a_0^3}{a} - \frac{4\pi G}{3} a_0^2 \left(\rho_0 - \rho_{c,0}\right)}}. \tag{2.39}$$

Essayons de comprendre qualitativement les solutions en utilisant l'analogie avec la mécanique classique.

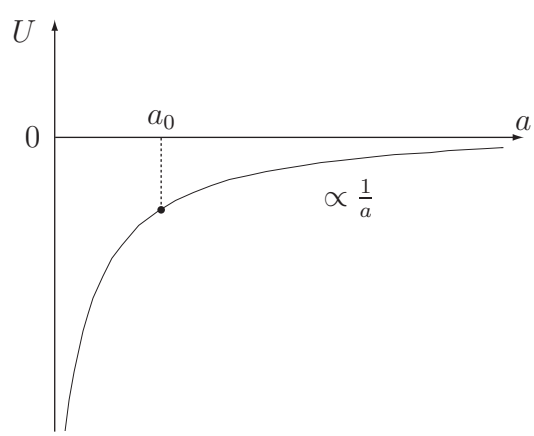
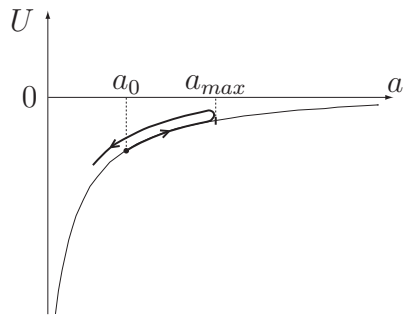


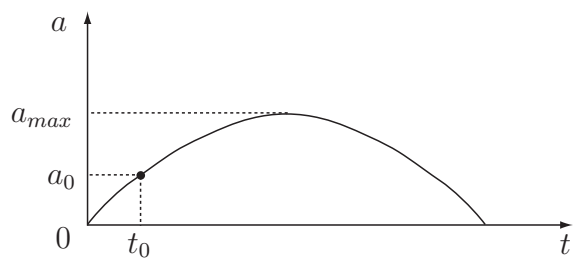
FIG. 2.6 – Le potentiel en fonction de a.

Il faut distinguer les cas suivants :

i) $\rho_0 = \rho_{c,0}$, i.e. $E_{tot} = 0$:
Dans ce cas la solution est simple et on l'a déjà trouvée avant : $a \sim t^{2/3}$,
$\Rightarrow$ expansion infinie.

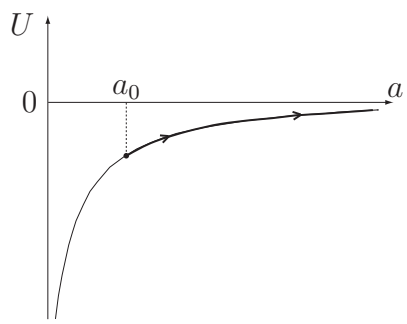
ii) $\rho_0 > \rho_{c,0}$, i.e. $E_{tot} < 0$:
$a_{max} = \frac{2a_0\rho_0}{\rho_0 - \rho_{c,0}}$,

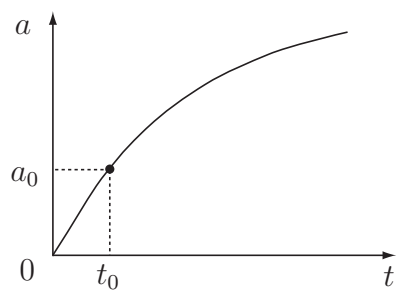




$\Rightarrow$ collapse de l'Univers.

iii) $\rho_0 < \rho_{c,0}$, i.e. $E_{tot} > 0$:
$\Rightarrow$ expansion infinie.





En conclusion, le futur de l'Univers dépend de son contenu. S'il y a beaucoup de matière, l'Univers va s'effondrer ("Big Crunch"), autrement il y aura une expansion infinie. Les observations astronomiques actuelles favorisent une expansion infinie de l'Univers.

Chapitre 3

Théorie du Big Bang

On a vu précédemment que dans le cas $k = \lambda = p = 0$ la densité ρ diverge pour $t \to 0$. Il s'avère que dans le cas plus général où $k \neq 0, \lambda \neq 0$ on retrouve le même comportement quand $t \to 0$, et donc aussi des singularités. Plus précisément, le comportement asympotique du facteur d'échelle et de la densité de matière est

$$a \sim t^{2/3},\ \rho \sim \frac{1}{t^2}, \quad \text{quand } t \to 0. \tag{3.1}$$

Pour le démontrer, on injecte l'Ansatz

$$a \sim t^{\alpha} \ \Rightarrow \frac{\dot{a}}{a} \sim \frac{\alpha}{t},\ \frac{\ddot{a}}{a} \sim \frac{\alpha(\alpha-1)}{t^2}, \tag{3.2}$$

avec α réel dans les équations de Friedmann

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\lambda}{3} &= \frac{8\pi G}{3}\rho, \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} - \lambda &= -8\pi G\, p. \end{aligned}$$

On peut alors voir que

$$\begin{aligned} 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} &\sim \frac{1}{t^2}, \\ \frac{k}{a^2} &\sim \frac{1}{t^{2\alpha}}, \\ \lambda &\sim t^0, \end{aligned}$$

donc pour autant que $2\alpha < 2$, i.e. $\alpha < 1$, on pourra négliger les termes $\frac{k}{a^2}$ et λ dans la limite $t \to 0$. Si $p \simeq 0$ on est ramené au cas $k = \lambda = 0$ et on retrouve donc le comportement asympotique $a \sim t^{2/3}$, $\rho \sim t^{-2}$. En conclusion on a donc $\alpha = 2/3 \overset{!}{<} 1$, ce qui justifie notre hypothèse d'ignorer les termes proportionels à k et λ dans les équations de Friedmann.

On peut constater que le passé de l'Univers (pour $t \to 0$) ne dépend pas des valeurs de k ou λ, alors qu'on a vu que le futur en dépend. Donnons encore quelques chiffres pour illustrer la variation de la densité :

$$\begin{aligned} t = t_0 : \qquad & \rho \simeq 10^{-29} \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}, \\ t \sim 20\mathrm{min} : \qquad & \rho \simeq 1 \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}, \end{aligned}$$

donc pour $t \sim 20$min l'Univers avait environ la densité de l'eau.

On vient de montrer que la densité ρ diverge pour $t \to 0$. Cette singularité nous empêche de comprendre qu'est-ce qui se passe dans l'Univers à l'instant $t = 0$. George Gamow a développé en 1948 l'idée selon laquelle notre Univers serait né dans une explosion promordiale, le Big Bang. De l'hypothèse du Big Bang, Gamow a pû tirer plusieurs prédiction physiques comme l'existance d'un fond de rayonnement cosmique ainsi que les abondances dans l'Univers des éléments légers (Li^7, D, He^3, He^4). Par la suite, ces prédictionts ont été mises en évidence expérimentalement.

3.1 Univers dominé par la radiation

On aimerait maintenant décrire notre Univers peu après le Big Bang. On vient de démontrer que la densité ρ devient de plus en plus grande pour des temps petits, ce qui veut dire que les particules présentes dans l'Univers deviennent de plus en plus proches. Mais par le principe d'incertitude de Heisenberg, ceci implique que leurs impulsions deviennent de plus en plus grandes. Pour $t \to 0$, les vitesses de particules seront de l'ordre de la vitesse de la lumière. On dira que ces particules sont ultra-relativistes.

Peu après le Big Bang, notre Univers était donc rempli d'un gaz de particules relativistes. On montre que l'équation d'état d'un tel gaz relativiste est donnée par

$$p = \frac{\rho}{3}. \tag{3.3}$$

Considérons un Univers rempli d'un gaz relativiste, avec $k = \lambda = 0$. On dira qu'un tel Univers est dominée par la radiation. Avec l'Ansatz $a \sim t^\alpha$ les équations de Friedmann se réduisent à :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{t^2} &= \frac{8\pi G}{3}\rho, \\ \frac{2\alpha(\alpha-1)}{t^2} + \frac{\alpha^2}{t^2} &= -\frac{8\pi G}{3}\rho, \end{aligned}$$

d'où l'equation pour α

$$4\alpha^2 - 2\alpha = 0 \;\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \overset{!}{<} 1.$$

En conclusion, pour un Univers dominé par la radiation :

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}, \tag{3.4}$$

$$\rho = \frac{3}{32\pi G t^2}. \tag{3.5}$$

Comme $\alpha < 1$, le résultat reste aussi vrai pour $k \neq 0, \lambda \neq 0$. Par ailleurs, en combinant ces deux relations, on trouve que $\rho \propto a^{-4}$. On peut comprendre ce résultat intuitivement de la manière suivante : l'expansion de l'Univers dilue la densité d'un facteur a^{-3}, mais comme la radiation subit de plus un décalage vers le rouge, il y aura un autre facteur a^{-1}, qui fait que la variation de la densité est $\propto a^{-4}$.

3.2 Univers dominé par la matière

Rappelons, pour des raisons de complétude, les résultats obtenus dans le chapitre précédent (voir p.19) pour un Univers dominé par la matière $k = \lambda = p = 0$:

$$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}, \tag{3.6}$$

$$\rho = \frac{1}{6\pi G t^2}. \tag{3.7}$$

3.3 Univers dominé par la const. cosmologique

Considérons les équations de Friedmann pour $k = \rho = p = 0$ en présence d'une constante cosmologique non-nulle $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{\lambda}{3} &= 0, \\ 2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \lambda &= 0. \end{aligned}$$

De la première équation on déduit qu'il existe une solution pour autant que $\lambda > 0$ donnée par

$$a = a_0\, e^{\sqrt{\frac{\lambda}{3}}t}. \tag{3.8}$$

Le facteur d'échelle augmente donc exponentiellement.

3.4 Evolution de l'Univers

L'Univers est passé, lors de son évolution, à travers différents régimes :

dom. radiation	$\longmapsto$	dom. matière	$\longmapsto$	dom. constante cosmologique
$p = \frac{\rho}{3}$		$p = 0$		$p_{tot} = -\rho_\lambda$
$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{1/2}$		$a = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}$		$a = a_0\, e^{\sqrt{\frac{\lambda}{3}}t}$
$\rho = \frac{3}{32\pi G t^2}$		$\rho = \frac{1}{6\pi G t^2}$		$\rho_\lambda = \text{const}$
$\rho \propto a^{-4}$		$\rho \propto a^{-3}$		
$H = \frac{1}{2t}$		$H = \frac{2}{3t}$		$H = \sqrt{\frac{\lambda}{3}} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_\lambda}$

Chapitre 4

Thermodynamique dans l'Univers

Dans ce chapitre nous reverrons et appliquerons les méthodes de thermodynamique à l'Univers. Nous étudierons spécialement les gaz de particules fermioniques ou bosoniques. Nous discuterons de l'histoire thermodynamique de l'Univers et du problème du découplage des espèces.

4.1 Équilibre thermique

Au début de l'Univers, mais aussi en grande partie à notre époque, l'Univers est constitué de gaz de particules. Bien que l'hydrogène est actuellement le gaz le plus rencontré dans l'Univers, la discussion de ce chapitre sera plus générale. En effet, si on inverse le temps et qu'on revient au début de l'Univers, la température augmente. A un certain point, les atomes perdent leurs électrons et forment un plasma. A encore plus haute température, les noyaux d'atomes fusionnent pour donner un plasma de quarks et de gluons. Si la température augmente encore, un grand nombre de particules, telles que des quarks ou leptons lourds, peuvent-être créées.

Bien sûr il n'est pas possible de considérer chaque particule séparément, et nous utiliserons la condition d'équilibre thermique qui permet une simplification énorme des problèmes. Dans ce cas, toutes les observables peuvent être calculées à partir d'un petit nombre de paramètres ; comme la température T, et les potentiels chimiques μ.

Nous sommes toutefois confrontés au problème suivant ; un gaz présent dans l'Univers en expansion change de volume et il n'est pas clair s'il va rester à l'équilibre thermique. En l'absence d'interactions, les particules vont simplement continuer à se déplacer à vitesse constante. Dans ce cas, le gaz peut perdre l'équilibre thermique.

Heureusement, les interactions permettent de réorganiser les vitesses des particules, de manière à ce qu'elles se retrouvent dans une distribution d'équilibre. Il nous faut maintenant caractériser l'efficacité des interactions. Statistiquement, le

temps moyen entre deux interactions est donné par

$$\tau = \frac{1}{\sigma n v} \tag{4.1}$$

où σ est la section efficace, n est la densité de particules et v leur vitesse. La condition pour arriver à l'équilibre thermique est d'attendre un temps $t \gg \tau$. D'un autre point de vue, on peut dire que la distance parcourue entre deux interactions, le libre parcours moyen ℓ, est donnée par $\ell = v\tau = \frac{1}{\sigma n}$.

Lorsque l'Univers est en expansion, il faut que la variation de volume soit moins rapide que le rythme des interactions pour que les conditions d'équilibre thermique soit respectées :

$$t_{\text{expansion}} = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^{-1} = \frac{1}{H} \gg \tau,$$

ou encore

$$H\tau \ll 1.$$

Si cette condition est satisfaite alors l'Univers est approximativement en équilibre thermique (la déviation est d'ordre $H\tau$).

Rappels de physique statistique

L'état d'un système est décrit par la matrice densité

$$\hat{\rho} = \frac{1}{Z} \exp\left(-\frac{\hat{H}}{T} + \mu_i \hat{N}_i\right), \tag{4.2}$$

où $\hat{H}$ est le Hamiltonien, T la température et μ_i les potentiels chimiques associés aux nombres conservés $\hat{N}_i$. Les $\hat{N}_i$ peuvent être par exemple les nombres baryoniques, leptoniques. La fonction de partition, $Z = \mathrm{tr} \exp\left(-\frac{\hat{H}}{T} + \mu_i \hat{N}_i\right)$ permet de normaliser l'état pour que $\mathrm{tr}\hat{\rho} = 1$. En physique quantique $\hat{H}$, $\hat{\rho}$, $\hat{N}$ sont des opérateurs satisfaisant les relations de commutations $[\hat{N}_i, \hat{H}] = 0$, $[\hat{N}_i, \hat{N}_j] = 0$ et la trace s'effectue sur l'espace de Fock. Celui-ci peut être représenté par la base des nombres d'occupation $|n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\rangle$, avec $n_k = 0, 1$ pour les fermions et $n_k = 0, 1, 2, \ldots$ pour les bosons. Dans cette base, la trace d'un opérateur $\hat{A}$ est donnée par

$$\mathrm{tr}[\hat{A}] = \sum_{n_1, n_2, \ldots} \langle n_1, n_2, \ldots | \hat{A} | n_1, n_2, \ldots \rangle.$$

Toutes les grandeurs thermodynamiques peuvent être définies par rapport à la matrice densité, par exemple le nombre de particules n_k, la densité d'énergie ρ_E et l'entropie s sont données par

$$n_k = \mathrm{tr}[\hat{\rho}\hat{N}_k], \tag{4.3}$$

$$\rho_E = \mathrm{tr}[\hat{\rho}\hat{H}], \tag{4.4}$$

$$s = -\mathrm{tr}[\hat{\rho} \ln \hat{\rho}]. \tag{4.5}$$

4.2 Gaz de bosons et de fermions

Si on s'intéresse aux propriétés thermodynamiques d'un gaz de particules, la nature exacte des particules formant le gaz n'est pas importante. Des particules de champ scalaire se comporteront de la même manière que des particules provenant d'un champ vectoriel. La seule information à être conservée est la statistique, les bosons se distinguent des fermions.

Densité, pression et énergie interne

A l'équilibre, les impulsions d'un gaz de fermions respectivement de bosons, respectent les distributions de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein :

$$\begin{aligned} n_k^B &= tr_B[\hat{\rho}\hat{n}_k] = \frac{1}{e^{(E_k-\mu)/T}-1}, \\ n_k^F &= tr_F[\hat{\rho}\hat{n}_k] = \frac{1}{e^{(E_k-\mu)/T}+1}. \end{aligned}$$

Ces distributions nous permettent de calculer l'énergie interne, et la densité ;

$$n^{B,F} = \frac{g}{(2\pi)^3}\int n^{B,F}(k)d^3k, \tag{4.6}$$

$$\rho^{B,F} = \frac{g}{(2\pi)^3}\int E_k n^{B,F}(k)d^3k, \tag{4.7}$$

avec g le nombre de degrés de liberté de chaque particule ($g = 2$ pour les photons, $g = 3$ pour un boson massif, $g = 1$ pour le champ de Higgs et $g = 4$ pour un fermion de Dirac) et $E_k = \sqrt{k^2+m^2}$.

Nous pouvons aussi calculer la pression :

$$p^{B,F} = \frac{g}{(2\pi)^3}\int 2k_1\frac{k_1}{E_k}n^{B,F}(k)d^3k.$$

En effet, le moment échangé lors d'une collision contre le plan (xz) par exemple est $2k_1 = 2k\cos\theta$ et le nombre de collisions $n(k)\frac{k_1}{E}$.

Notez que dans le cas de particules sans masses, $p = \frac{\rho}{3}$, ceci provient de la partie angulaire des intégrales :

$$p = \int \frac{k^2\,dk}{(2\pi)^3}n(k)2k\int d(\cos\theta)\cos^2\theta\int d\phi = \frac{4\pi}{3}\int\frac{k^3\,dk}{(2\pi)^3}n(k) = \frac{1}{3}\rho.$$

Les intégrales précédentes (4.6, 4.7) peuvent être calculées analytiquement dans la limite ultra-relativiste, c'est-à-dire lorsque : $T \gg m$, $T \gg |\mu|$ et $E_k = \sqrt{k^2+m^2} \simeq k$. On utilise les formules suivantes pour effectuer les intégrales $(s > 0,\ a > 0)$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^{ax}-1}dx &= \frac{1}{a^s}\Gamma(s)\zeta(s), \\ \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^{ax}+1}dx &= \frac{1}{a^s}\Gamma(s)(1-2^{1-s})\zeta(s), \end{aligned}$$

avec ζ la fonction zeta de Riemann et pour les entiers naturels n, $\Gamma[n+1] = n!$. Dans le cas des bosons, on trouve

$$n^B = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{4\pi k^2 dk}{e^{k/T} - 1} = \frac{g}{\pi^2} \zeta(3) T^3, \tag{4.8}$$

$$\rho^B = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{4\pi k^3 dk}{e^{k/T} - 1} = \frac{\pi^2 g}{30} T^4, \tag{4.9}$$

$$p^B = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{3} \frac{4\pi k^2 dk}{e^{k/T} - 1} = \frac{\rho}{3} = \frac{\pi^2 g}{90} T^4, \tag{4.10}$$

avec $\zeta(3) \cong 1,202$. Pour les fermions, on obtient :

$$n^F = \frac{3}{4} n^B \quad ; \quad \rho^F = \frac{7}{8} \rho^B \quad ; \quad p^F = \frac{7}{8} p^B. \tag{4.11}$$

On peut également traiter le cas non-relativiste, c'est-à-dire lorsque $T \ll m$. On arrive aux résultats importants suivants :

$$\begin{aligned} n &= \frac{g}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} (mT)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu - m}{T}}, \\ \rho &= mn, \\ p &= nT \ll \rho. \end{aligned}$$

Il est à noter que dans ce cas, il n'y a pas de différence entre les fermions et les bosons. La pression est négligeable, et l'énergie simplement égale à la masse de la particule multipliée par sa densité.

Entropie

L'entropie joue également un rôle important dans la compréhension de l'Univers. On peut donner une formule équivalente à celle donnée pour la densité d'énergie pour la densité d'entropie.

En principe, l'entropie est donnée par la matrice densité selon

$$s = -\mathrm{tr}[\hat{\rho} \log \hat{\rho}]$$

On peut montrer que les densités d'entropie des espèces relativistes sont :

$$\begin{aligned} s^B &= \frac{2\pi^2}{45} g_b T^3, \\ s^F &= \frac{7\pi^2}{180} g_f T^3. \end{aligned}$$

Conservation de l'entropie

L'entropie totale S est conservée dans l'approximation adiabatique. En effet, supposons que l'entropie dépende du facteur d'échelle $a(t)$, $S = S(a)$. Dans ce cas

on peut effectuer un développement limité de l'entropie par rapport aux puissances de a,

$$\frac{dS}{dt} = A + B\frac{da}{dt} + C\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \dots$$

Dans le cas où $\frac{da}{dt} = 0$ il n'y a pas d'évolution temporelle, et on doit avoir $\frac{dS}{dt} = 0$. Cette constation implique $A = 0$. Par ailleurs l'entropie augmente toujours $\frac{dS}{dt} > 0$, pour n'importe quelle évolution de l'Univers. Comme $\frac{da}{dt}$ peut être négatif, alors $B = 0$. Nous obtenons

$$\frac{dS}{dt} = C\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + \dots,$$

et donc $\frac{dS}{da} = C\frac{da}{dt} \sim 0$ dans l'approximation adiabatique.

La conservation de l'entropie est un outil très utile pour construire des quantités conservées lors d'une évolution (suffisemment lente) de l'Univers.

4.3 Application à l'Univers primordial

Dans l'Univers primordial, à une température donnée, certaines espèces peuvent être relativistes ($m \ll T$), alors que d'autres, plus massives ne le sont pas. Comparons les densités d'énergie ρ dans ces deux cas ; dans le cas non-relativiste, si $\mu \ll T$, elle diminue exponentiellement, et donc, à l'équilibre, le nombre de particules non-relativistes est négligeable par rapport au nombre de particules relativistes.

En assemblant les différentes densités d'énergie des bosons (4.9) et des fermions (4.11) relativistes, la densité d'énergie de l'Univers primordial sera la suivante :

$$\rho(T) = \frac{\pi^2}{30} g_*(T) T^4$$

avec

$$g_*(T) = \sum_{i=1}^{N_b} g_i \left(\frac{T_i^b}{T}\right)^4 + \frac{7}{8}\sum_{i=1}^{N_f} g_i \left(\frac{T_i^f}{T}\right)^4.$$

Dans ces formules, on s'est contenté des espèces relativistes, puisque la densité d'énergie des espèces non-relativistes est exponentiellement petite. g_* correspond au nombre efficace de degrés de libertés. A l'équilibre thermique toutes les températures sont égales ($T_1^b = T_2^b = \dots = T_{N_b}^b = T_1^f = \dots = T$). Il est toutefois possible qu'une espèce interagissant trop faiblement (les neutrinos par exemple) quitte l'équilibre thermique, et de ce fait ait une température différente des autre espèces.

Pour l'entropie, on peut aussi écrire une formule regroupant les espèces :

$$s(T) = \frac{2\pi^2}{45} g_{s*} T^3.$$

Notez qu'à l'équilibre, $g_{s*} = g_*$, mais hors équilibre thermique, g_{s*} contient le cube des températures des espèces au lieu de leur quatrième puissance.

Le calcul de la densité d'énergie donne la possibilité de calculer la vitesse d'expansion de l'Univers primordial. Ainsi en l'absence de courbure ou de constante cosmologique, la densité d'énergie

$$\rho(T) = \frac{\pi^2}{30} g_*(t) T^4$$

permet de calculer le taux d'expansion de l'Univers

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(T).$$

En notant $G = 1/M_{\rm Pl}^2$, on obtient :

$$H(T) = 1.66\sqrt{g_*(T)}\frac{T^2}{M_{\rm Pl}}. \tag{4.12}$$

Calcul de g_* dans le Modèle Standard

Le Modèle Standard contient les particules suivantes :
- Les quarks :
  - 6 quarks : u, d, s, c, b, t
  - 6 antiquarks
  - Chaque quark possède deux états de spin et 3 couleurs différentes.

  Ainsi $g_{\rm quark} = 6 \times 2 \times 2 \times 3 = 72$.
- Les leptons :
  - 3 leptons chargés : e^-, μ^-, τ^-
  - 3 anti-leptons chargés
  - Les leptons chargés possèdent 2 états de spin différents
  - 3 neutrinos : ν_e, ν_μ, ν_τ
  - 3 anti-neutrinos
  - Les neutrinos (si on les suppose non-massifs) ne possèdent qu'un état d'hélicité.

  Nous avons donc $g_{\rm leptons} = 3 \times 2 \times 2 + 3 \times 2 = 18$.
- Bosons de jauge :
  - Le photon γ est de spin 1, mais comme il est sans masse, il ne possède que deux états d'hélicité.
  - Les bosons électrofaibles $W^\pm$, Z^0, massifs, de spin 1, possèdent trois états de spin.
  - Les 8 gluons, médiateurs de la force forte, de spin 1 et de masse nulle possèdent deux états d'hélicité.
- Champ scalaire :
  - Le boson de Higgs a un spin 0 et est massif.

  On calcule également $g_{\rm jauge+Higgs} = 1 + 2 + 3 \times 3 + 8 \times 2 = 28$.

Les fermions ont donc $g_f = 18 + 72 = 90$ et les bosons : $g_b = 28$. En considérant que toutes les particules sont à l'équilibre thermique $T_b = T_f = T$, on a :

$$g_* = g_b + \frac{7}{8} g_f = 106.75.$$

4.4 Photons dans l'Univers

Lorsque la température de l'Univers est assez basse, les élecrons et les protons libres se combinent pour former de l'hydrogène. C'est ce qu'on appelle la recombinaison. Lors de la formation d'un atome d'hydrogène, un photon contenant l'énergie de liaison est émis. Lorsque la plupart des électrons et des protons sont combinés, les atomes neutres interagissant que faiblement avec les photons, l'Univers devient "transparent", et les photons émis se propagent sans plus intéragir, c'est le moment du découplage des photons.

Ce fond de rayonnement cosmique (CMB) est encore visible aujourd'hui et contient des quantités d'informations sur l'Univers primordial. C'est en fait la "photo" la plus ancienne de l'Univers. L'existence du CMB est une conséquence de la théorie du Big-Bang. Il fut prédit par Gamow en 1948, et observé par hasard en 1965 par Penzias et Wilson.

Equation de Saha

A l'époque de la recombinaison, l'Univers contient principalement des protons, des électrons, des photons et des atomes d'hydrogènes en équilibre thermique. L'équilibre thermique est maintenu par la réaction

$$pe^- \leftrightarrow H\gamma.$$

Les densités thermiques de ces particules sont :

$$\begin{aligned} n_p &= \left(\frac{m_p T}{2\pi}\right)^{3/2} g_p e^{-\frac{m_p-\mu_p}{T}}, \\ n_H &= \left(\frac{m_H T}{2\pi}\right)^{3/2} g_H e^{-\frac{m_H-\mu_H}{T}}, \\ n_e &= \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} g_e e^{-\frac{m_e-\mu_e}{T}}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

A l'équilibre, les potentiels chimiques sont égaux des deux côtés de l'équation de la réaction $\mu_p + \mu_e = \mu_H$ (rappelons que le potentiel chimique du photon est nul). On a donc :

$$\frac{n_p n_e}{n_H} = \frac{g_e g_p}{g_H}\left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-\frac{m_p+m_e-m_H}{T}},$$

puisque $m_p \sim m_H$. D'autre part, en remarquant que la différence entre la masse de l'atome d'hydrogène et la masse de ses constituants est justement l'énergie d'ionisation $I = m_p + m_e - m_H = 13.6$ eV $= 1.58 \cdot 10^5$ K, on obtient la formule d'équilibre de Saha :

$$\frac{n_p n_e}{n_H} = \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-I/T}. \tag{4.14}$$

Recombinaison

En utilisant la neutralité du plasma, $n_e = n_p$, on trouve

$$n_p = n_e = n_H^{1/2} \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/4} e^{-\frac{I}{2T}}. \tag{4.15}$$

On voit que si $T \ll I$, les densités de protons et d'électrons sont exponentiellement supprimées, il ne reste, à basse température, que des atomes d'hydrogènes. On définit arbitrairement le moment de recombinaison lorsque 90% des protons et des électrons ont été combinés en atomes d'hydrogène. A l'aide de la formule (4.15) on peut calculer que le redshift de la recombinaison est de $z \sim 1300$.

Dans notre Univers, par rapport aux photons, le nombre de baryons n_B, ou celui d'atomes d'hydrogène, est $\frac{n_B}{n_\gamma} = 6 \cdot 10^{-10} = \eta$. C'est à dire qu'un très petit nombre de baryons n'ont pas été annihilés par les anti-baryons correspondants, et forment la matière dont nous sommes constitués. Leur nombre précis ne peut être calculé théoriquement et doit être mesuré. La raison de ce surnombre de particules de matière est toujours une question ouverte.

De cette donnée expérimentale, on obtient le nombre d'atomes d'hydrogènes $n_H \sim \frac{n_B}{n_\gamma} n_\gamma = \eta n_\gamma$.

Découplage des photons

Les atomes d'hydrogènes étant neutres, leurs intéractions avec la lumière sont beaucoup plus faible que celle entre les protons initiaux et la lumière. A un moment donné, la lumière se propage dans l'univers sans plus intéragir avec la matière baryonique, c'est le découplage des photons.

L'interaction entre les photons et les atomes d'hydrogènes est très faible, nous la négligerons ici. Il reste les électrons et les protons libres, ceux-ci ont une section efficace $\sigma_\gamma = \frac{8\pi}{3} r^2$ où r est le "rayon" de la particule considérée. Pour l'électron, on a $r_e = \frac{\alpha}{m_e}$ et pour le proton $r_p = \frac{\alpha}{m_p}$, ce qui induit $\sigma_{\gamma p} \ll \sigma_{\gamma e}$. Nous pouvons donc aussi négliger les interactions des photons avec les protons, la section efficace étant très petite.

Observons donc les interactions des photons avec les électrons. Le rythme des interactions est

$$\Gamma = \sigma_{\gamma e} n_e v \sim \frac{8\pi\alpha^2}{3m_e^2} \eta^{1/2} \left[\frac{\zeta(3)}{\pi^2} 2T^3\right]^{1/2} \left(\frac{m_e T}{2\pi}\right)^{3/4} e^{-\frac{I}{2T}}.$$

Le découplage a lieu lorsque $\Gamma \sim H = 1.66 g_*^{1/2} \frac{T^2}{M_{Pl}}$, c'est-à-dire lorsque

$$e^{-\frac{I}{2T}} B \frac{T^{9/4}}{m_e^{5/4}} = \frac{T^2}{M_0},$$

avec $M_0 = \frac{M_{Pl}}{1.66 g_*^{1/2}}$ et $B = \frac{8}{3}\pi\alpha^2 (2\pi)^{-3/4} \left(\frac{2\eta\zeta(3)}{\pi^2}\right)^{1/2}$. En notant $x = \frac{I}{2T}$, on obtient

$$x^{-1/4} e^{-x} = B^{-1} \frac{2^{1/4} m_e^{5/4}}{I^{1/4} M_0} = 1.24 \cdot 10^{-12}$$

d'où $x = 26.6$, est finalement, le découplage des photon à lieu à une température de $T = \frac{I}{2x} = 0.25$ eV $= 3000$K.

Discussion

La recombinaison a lieu à une température de $T \cong 3600$K. En dessous de 3000K, les photons n'interagissent plus avec le plasma, ils découplent. L'âge de l'Univers à cette époque est de

$$t = \frac{M_0}{T^2} = 2.7 \cdot 10^{13}\ s \sim 10^6 \text{ ans},$$

et son décalage vers le rouge de $z = 1100$.

La dérivation effectuée ici n'est bien sûr pas exacte, nous avons supposé que l'interaction entre les photons et les atomes d'hydrogène $\sigma_{\gamma H}$ est nulle, et d'autre part, nous avons négligé la présence des états excités de l'atome d'hydrogène. Toutefois, le résultat s'avère étonnamment précis.

Notez encore que la température de la recombinaison est très proche de la température de transition où l'Univers dominé par le rayonnement devient dominé par la matière. En effet, en terme de décalage vers le rouge, le moment d'égalité z_{eq} entre les densités de matière et de rayonnement a lieu avant la recombinaison z_{rec} et le découplage z_{dec}. Pour comparaison, les valeurs précises sont :

$$z_{\rm eq} \simeq 3200, \quad z_{\rm rec} \simeq 1300, \quad z_{\rm dec} \simeq 1100. \tag{4.16}$$

4.5 Neutrinos dans l'Univers

Les neutrinos interagissent très faiblement. Ils ont probablement une très petite masse de l'ordre du dixième ou du centième d'électron-Volt. Nous verrons plus tard que la cosmologie nous permet de mettre une borne supérieure pour leur masse. Il s'agit même actuellement de la borne la plus contraignante.

Il existe trois types de neutrinos ; $\nu_e,\ \nu_\mu,\ \nu_\tau$. Ils ont un nombre leptonique égal à 1 (leurs antiparticules -1). De plus comme le nombre de particules de chaque famille de leptons est conservé séparément, on donne aussi les nombres leptoniques électronique ($\nu_e \to 1,\ \nu_\mu \to 0,\ \nu_\tau \to 0$), muonique ($\nu_e \to 0,\ \nu_\mu \to 1,\ \nu_\tau \to 0$) et tauonique ($\nu_e \to 0,\ \nu_\mu \to 0,\ \nu_\tau \to 1$). Ils possèdent tous un spin 1/2 mais n'ont qu'un seul degré de liberté. En effet il n'existe que des neutrinos gauches, c'est à dire que le spin est de direction opposée à l'impulsion, de même il n'existe que des anti-neutrinos droits.

Découplage des neutrinos

En supposant que les neutrinos sont sans masse, ou que leur masse est suffisamment petite, quelle est la température du gaz de neutrino émis au moment du Big-Bang ?

Pour répondre à cette question, on doit considérer les interactions des neutrinos avec les autres particules présentes dans l'Univers. Il s'avère que les interactions dominantes sont les suivantes :

- Courants chargés : les neutrinos interagissent avec des électrons ou des muons en échangeant un boson $W^{\pm}$, par exemple $\mu + \bar{\nu}_\mu \to W^- \to e^- \bar{\nu}_e$. Notez que la masse du W est $m_W = 80.4$ GeV.
- Courants neutres : l'interaction se fait par l'intermédiaire du boson Z de masse $m_Z = 91.2$ GeV, par exemple $\nu\bar{\nu} \to Z^0 \to e^+e^-$.

La section efficace est $\sigma = G_F^2 E^2$ où E est l'énergie et où $G_F = \frac{g^2}{4\sqrt{2}M_W^2} \cong 1.17 \cdot 10^{-5}\text{GeV}^{-2}$ la constante de couplage de Fermi.

En égalant le rythme des interactions γ à celui de l'expansion de l'Univers H,

$$\Gamma = \sigma n v \sim G_F^2 T^2 T^3 = H = T^2/M_0,$$

on trouve la température de découplage des neutrinos,

$$T^* \sim \frac{1}{(M_0 G_F^2)^{1/3}} = 2 \text{ MeV}.$$

A cette température, seuls les électrons, les positrons et les photons sont encore relativistes ($m_e < T^* \ll m_{autres}$), on a donc un mélange à l'équilibre de $e^{\pm}$, γ, ν_e, ν_μ, ν_τ.

Température des neutrinos

Lorsque la température décroît encore, les électrons et anti-électrons s'annihilent, mais les neutrinos, n'interagissant pas, ne reçoivent pas leur "part" de l'énergie d'annihilation et quittent ainsi l'équilibre thermique. A $T \ll m_e$ il ne reste que γ, ν_e, ν_μ, ν_τ mais les températures des différentes espèces ne sont pas identiques.

En utilisant la conservation de l'entropie pendant l'annihilation des électrons, on trouve pour les photons et les électrons

$$[2 + \frac{7}{8}4]T_{in}^3 a_{in}^3 = 2T_\gamma^3 a_{out}^3,$$

et pour les neutrinos

$$T_{in}^3 a_{in}^3 = T_\nu^3 a_{out}^3.$$

De ces relations, on peut tirer la température des neutrinos :

$$\begin{aligned} T_\nu^3 &= T_\gamma^3 \left[\frac{2 + 4\frac{7}{8}}{2}\right]^{-1}, \\ T_\nu &= \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_\gamma. \end{aligned} \tag{4.17}$$

A notre époque, la température des neutrinos est donc $T \sim 2$K.

Limites cosmologiques sur la masses des neutrinos

Les neutrinos étant présents en grand nombre dans notre Univers, il peuvent influencer son évolution. L'ampleur de cette influence dépend de leur masse. Ainsi, l'observation de notre Univers peut nous procurer directement des informations sur les masses des neutrinos.

Nous n'étudierons ici qu'un critère grossier, mais déjà intéressant pour la physique des particules. Nous allons imposer que la masse formée par tous les neutrinos n'excède pas la densité critique de l'Univers. La densité critique étant

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} = 1.88 \cdot 10^{-29} h^2 \text{ [g/cm}^3] = 10^4 h^2 \text{ [eV/cm}^3],$$

il faut que la somme des masses des neutrinos multipliée par leurs densité n'excède pas ce nombre :

$$\sum_\nu m_\nu n_\nu < 10^4 h^2 \text{ [eV/cm}^3].$$

La densité de neutrinos étant $n \sim 2\frac{3}{4}\frac{\zeta(3)}{\pi^2}T^3 \cong 112 \text{ cm}^{-3}$, on trouve

$$\sum m_\nu < 100 h^2 \text{ [eV]},$$

c'est à dire pour $h = 0.72$,

$$\sum m_\nu < 52 \text{ [eV]}. \tag{4.18}$$

Notez qu'on suppose ici que les neutrinos ne se désintègrent pas, ou très lentement par rapport à l'âge de l'Univers.

En comparaison, les limites provenant de la physique des particules,

$$m_{\nu_e} < 2 \text{ eV}, \quad m_{\nu_\mu} < 0.17 \text{ MeV}, \quad m_{\nu_\tau} < 18.2 \text{ MeV},$$

sont moins restrictives.

Actuellement, des considérations cosmologiques plus précises permettent de contraindre la somme des masses des neutrinos à $\sum m_\nu < 0.7$ eV.

4.6 Résumé : Histoire thermodynamique simplifiée de l'Univers

Nous allons tenter de décrire l'évolution thermodynamique de l'Univers. Bien sûr nos connaissances de la physique des hautes énergies se limite à environ 200 GeV ($\sim$ énergie maximale du LEP). D'autre part, la physique des hautes températures est passablement différente de la physique des hautes énergies, et la première est déduite théoriquement de nos connaissances sur la seconde, sans vérifications expérimentales (excepté le Big-Bang, qui constitue notre unique expérience).

– $T \sim$ GeV : $g_*(T) = 106.75$, phase symétrique de la théorie électrofaible.

- T environ 120 GeV : transition de phase ou cross-over électrofaible, les particules obtiennent leur masses. A partir de là, les quarks t et $\bar{t}$ s'annihilent, $g_*(T) = 96.25$.
- $T < 80$ GeV : annihilation de $W^\pm$, Z^0, H^0, $g_*(T) = 86.25$.
- $T < 4$ GeV : $b\bar{b}$ annihilation, $g_*(T) = 75.75$.
- $T < 1$ GeV : $\tau^-\tau^+$ annihilation, $g_*(T) = 61.75$.
- $T \sim 150$ MeV : époque de la QCD, les quarks perdent leur liberté asymptotique et sont confinés. Les quarks forment des états liés de 3 quarks (baryons) ou d'un quark et de son anti-quark (mésons). Les plus légers qui sont relativistes, les pions, ainsi que les autres particules légères (muons, électrons et les neutrinos) donnent, après le confinement des quarks, $g_*(T) = 17.25$.
- $T < 100$ MeV : les pions $\pi^\pm$, π^0 et les muons $\mu^\pm$ s'annihilent. Ne restent que $e^\pm$, les γ et les ν, donc $g_*(T) = 10.75$.
- $T \sim 1$ MeV découplage des neutrinos. Ceux-ci n'interagissent plus suffisamment et quittent l'état d'équilibre thermique.
- $T < 500$ keV : les paires électrons-positron deviennent des photons, $g_*(T) = 3.36$.

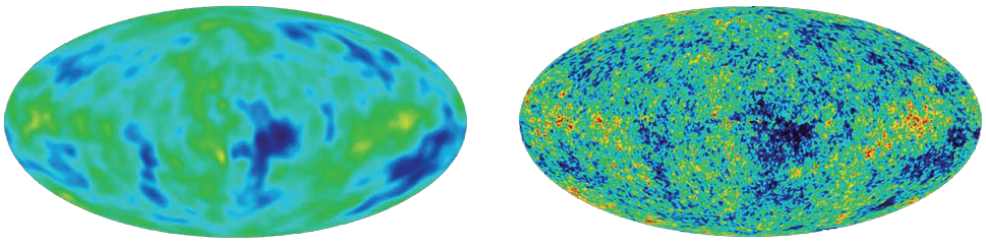
Chapitre 5

Fond de rayonnement cosmique (CMB)

Après le Big Bang, notre Univers se refroidit et s'étend. Au cours de cette évolution différentes particules sortent de l'équilibre thermique. En particulier la théorie du Big Bang prédit que vers 3000 K les photons découplent et forment le fond de rayonnement cosmique. Ces photons fossils ont été observés par accident par Arno Penzias et Robert Wilson en 1964 (prix Nobel, 1978). De nos jours le CMB constitue une source précieuse d'informations sur notre Univers.

5.1 Mesures du CMB

Jusqu'aux années '90, on observait le CMB à l'aide d'antennes terrestres ou de ballons qu'on laissait monter dans l'atmosphère (e.g. Boomerang). En 1990 le satellite COBE (COsmic Background Explorer) fût mis en orbite et donna les premières images du CMB vu de l'espace. Il avait une résolution angulaire d'environ 7°. Le satellite WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) lancé en 2001 a une résolution de 0.23° et PLANCK (lancement prévu pour 2008) aura une résolution de 5′.



COBE WMAP

Fig. 5.1 – Comparaison de la résolution des mesures de COBE et WMAP [4].

Si l'Univers était parfaitement homogène et isotrope, on observerait le CMB avec la même intensité dans toutes les directions. Des mesures très précises ont montré que le CMB présente des anisotropies. D'abord on observe une anisotropie dipolaire : le CMB semble décalé vers le rouge dans une direction et décalé vers le bleu dans l'autre (voir figure 5.2). Cette anisotropie dipolaire provient de la vitesse de la terre relative au fond de rayonnement cosmique. Si on soustrait cette contribution, il reste, parmis les véritables anisotropies du CMB, encore une anisotropie provenant de la radiation émise par notre galaxie (voir figure 5.3).

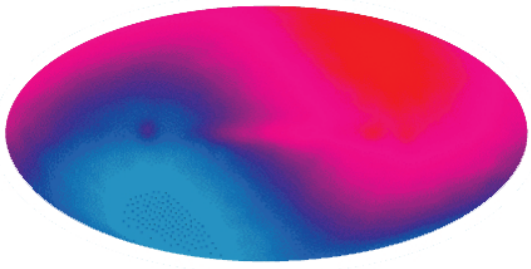


Fig. 5.2 – Anisotropie dipolaire [4].

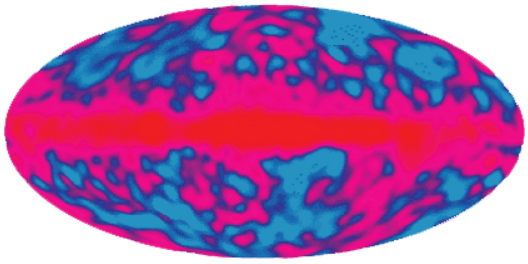


Fig. 5.3 – Anisotropie de la galaxie (principalement la bande rouge au milieu [4].)

Remarquons que sur les figures du CMB on a l'habitude de représenter la sphère céleste par projection de Mollweide qui conserve les surfaces. Le centre de notre galaxie se trouve au centre de l'ovale, et l'équateur galactique correspond à une ligne horizontale au milieu. Par ailleurs, de l'anisotropie dipolaire on peut déduire que notre terre a une vitesse par rapport au CMB d'environ 370 km/s dans la direction de la constellation de la vierge.

Une fois les anisotropies dipolaire et galactique retranchées, on obtient une image des anisotropies du CMB qui sont de l'ordre $\Delta T/T \sim 10^{-5}$.

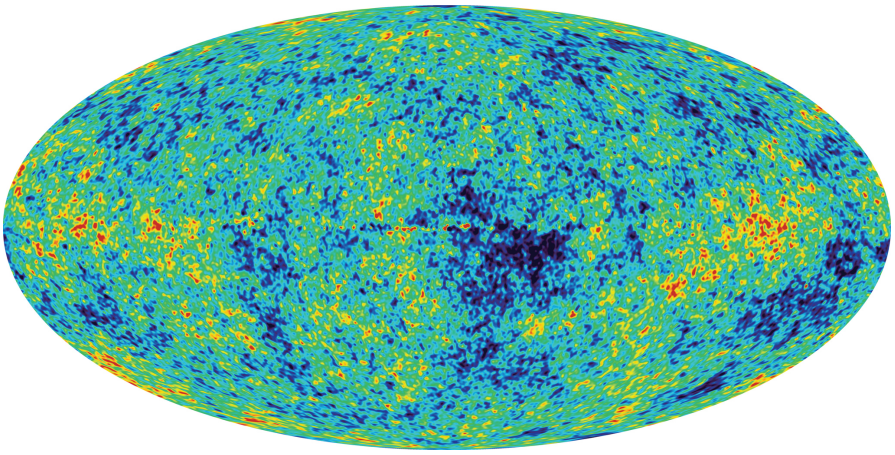


Fig. 5.4 – Anisotropies du CMB mesurées par WMAP (2005) [3].

A part les anisotropies on peut aussi mesurer le spectre du CMB. Comme les photons étaient en équilibre thermique lors du découplage, la théorie prédit le spectre d'un corps noir. Dans ce cas l'intensité en fonction de la fréquence est donnée par

$$I_\nu = \frac{4\pi\hbar\nu^3}{\exp\left(\frac{2\pi\hbar\nu}{k_B T}\right) - 1}.$$

Il s'avère que le CMB est le plus parfait corps noir jamais observé ; jusqu'à aujourd'hui aucune déviation du spectre d'un corps noir n'a pû être mise en évidence.

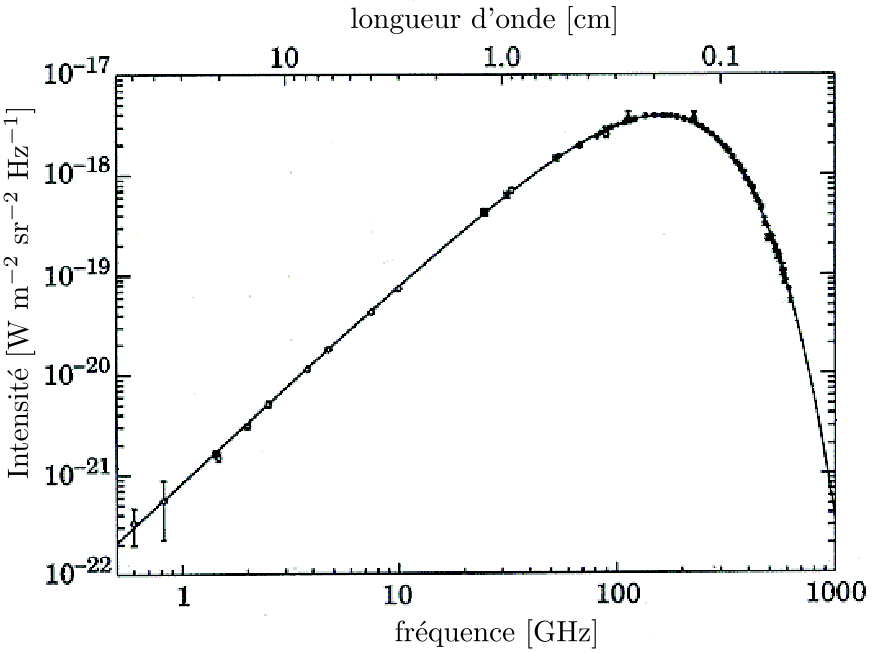


FIG. 5.5 – Spectre du CMB comparé à la prédiction théorique pour un corps noir parfait [4].

La radiation de corps noir a la propriété de ne dépendre que d'un seul paramètre qui est la température. Pour le CMB on trouve

$$T_\gamma = 2.725 \pm 0.001 \text{ K}.$$

5.2 Anisotropies du CMB

Le modèle standard de la cosmologie est basé sur l'hypothèse que l'Univers est homogène et isotrope. Ceci est en effet une très bonne approximation. Mais en réalité on observe aussi des déviations de cette homogénéité. Il est important

de mesurer ces anisotropies très précisément pour essayer d'en extraire un maximum d'information sur la cosmologie. En particulier, on verra que ces anisotropies peuvent être reliées à la formation de structure dans l'Univers.

Les satellites COBE et WMAP ont mesuré les anisotropies du CMB en mesurant sa température dans toutes les directions. Pour avoir une mesure précise des fluctuations de température, on ne mesure pas seulement la température absolue, mais on mesure la différence de température entre deux directions. On en tire la variation de la température dans une certaine direction angulaire (θ, ϕ) par rapport à la température moyenne. On décompose ensuite cette variation sur les harmoniques sphériques :

$$\frac{\Delta T(\theta,\phi)}{T} = \sum_{l,m} a_{lm} Y_{lm}(\theta,\phi).$$

On rappelle que les harmoniques sphériques $Y_{lm}(\theta,\phi)$ sont définies comme les fonctions propres du moment angulaire au carré et de sa projection sur l'axe z :

$$\begin{aligned} L^2 Y_{lm}(\theta,\phi) &= l(l+1) Y_{lm}(\theta,\phi), \\ L_z Y_{lm}(\theta,\phi) &= m Y_{lm}(\theta,\phi), \end{aligned}$$

et satisfont les relations d'orthogonalité

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \; Y_{lm}(\theta,\phi) \; Y^*_{l'm'}(\theta,\phi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'},$$

$$\sum_{m,l} Y_{lm}(\theta,\phi) Y^*_{lm}(\theta',\phi') = \delta(\theta-\theta')\delta(\phi-\phi').$$

La fonction de corrélation peut s'écrire

$$\left\langle \frac{\Delta T(\theta,\phi)}{T} \frac{\Delta T(\theta',\phi')}{T} \right\rangle = \sum_{l,m} \sum_{l',m'} \langle a_{lm} a^*_{l'm'} \rangle Y_{lm}(\theta,\phi) Y^*_{l'm'}(\theta',\phi'),$$

où $\langle . \rangle$ dénote la moyenne d'ensemble. Si on fait l'hypothèse d'un Univers isotrope, $\langle a_{lm} a^*_{l'm'} \rangle$ est indépendant de m :

$$\langle a_{lm} a^*_{l'm'} \rangle = c_l \, \delta_{ll'} \delta_{mm'},$$

où c_l est une constante qui ne dépend pas de m. Ainsi

$$\left\langle \frac{\Delta T(\theta,\phi)}{T} \frac{\Delta T(\theta',\phi')}{T} \right\rangle = \sum_{l,m} c_l Y_{lm}(\theta,\phi) Y^*_{lm}(\theta',\phi').$$

Si on note α l'angle entre les deux directions (θ,ϕ) et (θ',ϕ'), on peut introduire les polynômes de Legendre P_l, reliés aux harmoniques sphériques par la relation

$$P_l(\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\theta,\phi) Y^*_{lm}(\theta',\phi'),$$

pour réécrire la fonction de corrélation comme suit

$$F_{\text{corr}} := \left\langle \frac{\Delta T(\theta,\phi)}{T} \frac{\Delta T(\theta',\phi')}{T} \right\rangle = \sum_l \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\alpha) c_l.$$

On conclut donc que la fonction de corrélation ne dépend pas des deux directions, mais que de l'angle α entre elles ; ce à quoi on s'attend dans un Univers isotrope. En utilisant l'orthogonalité des polynômes de Legendre,

$$\int_{-1}^{1} P_l(\alpha) P_{l'}(\alpha) d\cos(\alpha) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'},$$

on peut déterminer c_l :

$$c_l = 2\pi \int_{-1}^{1} P_l(\alpha) F_{\text{corr}}(\alpha) d\cos(\alpha).$$

Cette formule permet de calculer c_l à partir des mesures de $F_{\text{corr}}(\alpha)$. Physiquement c_l correspond à l'amplitude du multipôle l. On a l'habitude de représenter $\frac{l(l+1)}{2\pi} c_l$ en fonction de l ; c'est ce qu'on appelle le spectre en puissance.

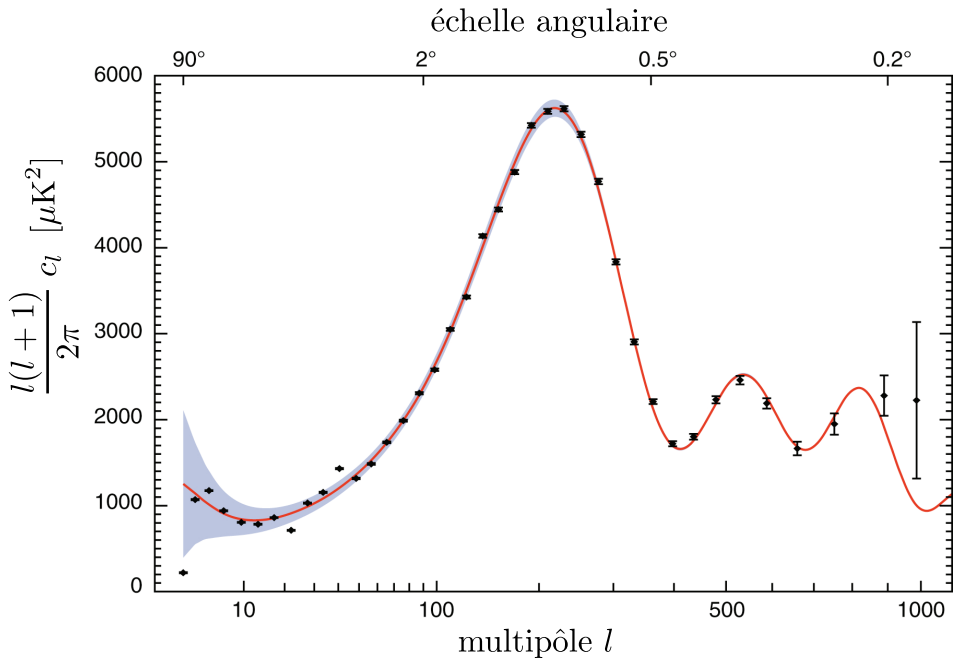


FIG. 5.6 – Spectre en puissance mesuré par WMAP [3].

On voit qu'un premier maximum se situe à $l \sim 220$. Sa position peut être expliquée par la formation des structures dans l'Univers. Notons encore que le multipôle l représente les anisotropies d'angle

$$\alpha \sim \frac{2\pi}{l};$$

plus l est petit, plus l'angle est grand et correspond donc à des grandes distances. On a pour $l \sim 200$, un angle d'environ $\alpha \sim 1°$.

Pour analyser les anisotropies du CMB, on a introduit la moyenne sur l'ensemble statistique. C'est-à-dire qu'il faudrait prendre la moyenne sur différents Univers ! Les corrélations ne dépendant que de l'angle α, on peut considérer dans notre Univers toutes les paires de points séparés par un angle α. La moyenne d'ensemble sur plusieurs Univers se ramène alors à la moyenne arithmétique sur ces paires de points. L'erreur qu'on fait avec cette méthode, appellée la variance cosmique, est importante pour les petits multipôles. La région bleue sur la figure 5.6 représente l'amplitude des fluctuations statistiques par rapport à la moyenne d'ensemble.

De plus, vu les grandes erreurs statistiques sur les c_l, dans la figure 5.6 on a moyenné sur plusieurs valeurs de l pour obtenir une meilleure précision. Ci-dessous on représente les donnés brutes pour tous les multipôles.

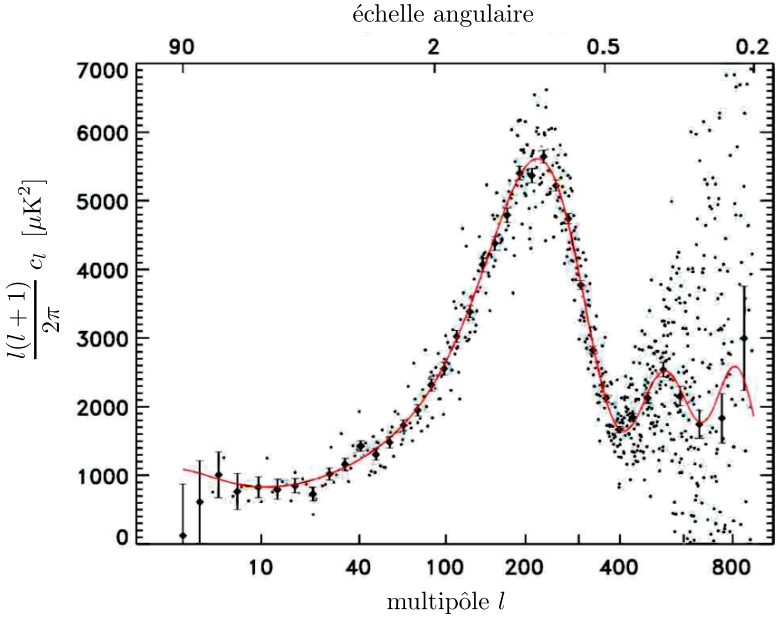


FIG. 5.7 – Spectre en puissance mesuré par WMAP avec les points de mesure et la courbe obtenue en moyennant sur plusieurs multipôles [5].

Les fluctuations de température du CMB sont reliées à la formation de structures entre le temps d'égalité (temps où $\rho_{\text{mat}} = \rho_{\text{rad}}$) et le découplage des photons. Le type de structures formées dépend du contenu de l'Univers et il est possible de relier les c_l aux $\Omega_b, \Omega_m, \Omega_k, \Omega_\lambda$. Ainsi la mesure expérimentale de c_l nous fournit aussi des informations sur les abondances. Inversément on peut dessiner le spectre en puissance prédit par les modèles théoriques en fonction des différents paramètres $\Omega_b, \Omega_m, \Omega_k, \Omega_\lambda$ (voir figures 5.8).

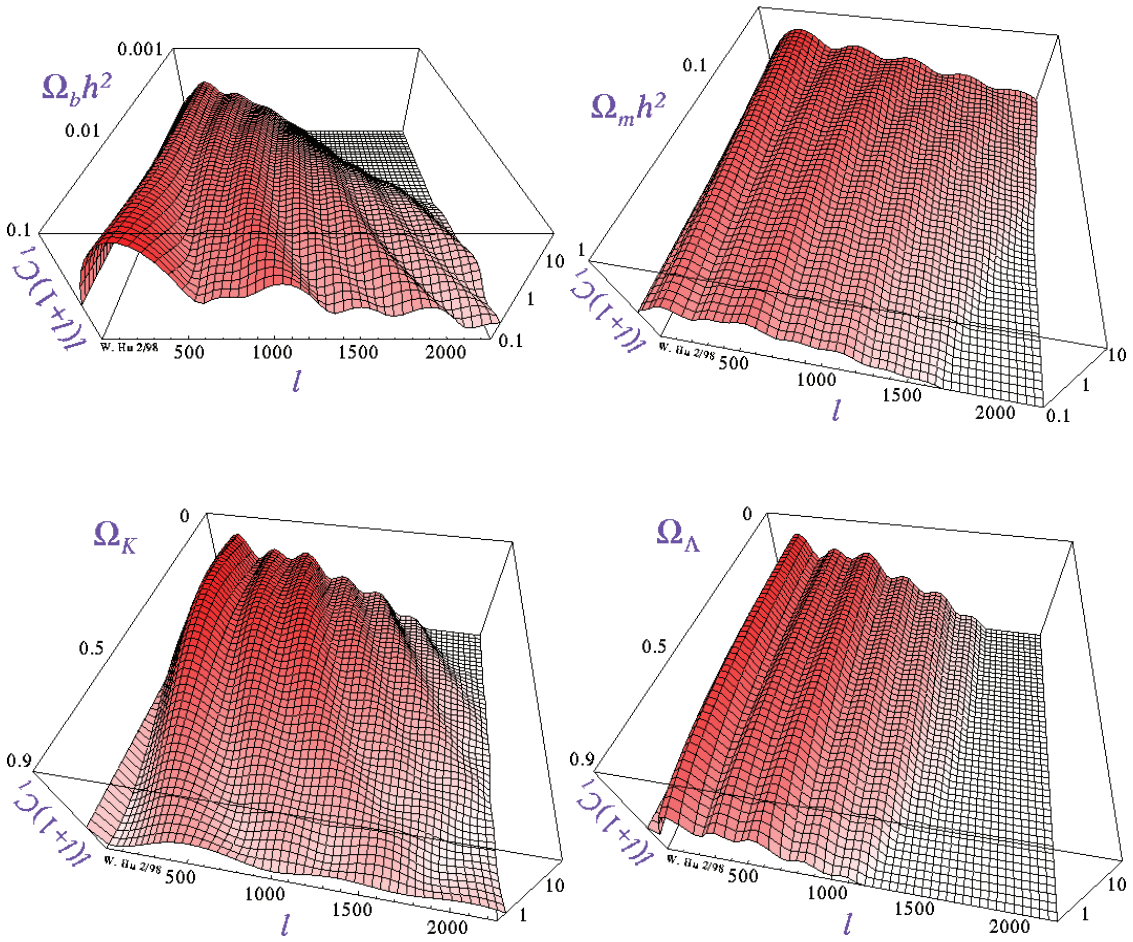


FIG. 5.8 – Simulation numérique du spectre en puissance en fonction des abondances de baryons, de matière, de courbure et de constante cosmologique [6].

En conclusion, comme le CMB nous permet d'observer l'Univers très jeune, il est un élément clé en cosmologie. Il constitue la première image que nous avons de l'Univers. L'existence du fond de rayonnement cosmique est non seulement un argument en faveur de la théorie de Big Bang, mais son observation nous fournit aussi une multitude d'autres informations sur notre Univers.

Chapitre 6

Nucléosynthèse

Nous venons d'étudier la recombinaison, c'est-à-dire la fomation d'atomes par la liaison des noyaux atomiques et des électrons. Ces processus se sont passés environ 380′000 ans après le début de l'Univers. Nous allons remonter encore dans le temps, augmenter la température et étudier la formation des noyaux atomiques. A environ 200 MeV, le plasma de quarks et de gluons commence à former des protons et des neutrons, c'est la transition de phase de l'interaction forte. La température est encore trop élevée pour former des noyaux. L'Univers est donc constitué de $p, n, e^{\pm}, \gamma, \nu, \bar{\nu}$. C'est autour de 1-4 MeV que les noyaux ce forment. En dessous du MeV, le contenu atomique de l'Univers est presque complètement déterminé : nous avons $H, {}^2\mathrm{H}, {}^3\mathrm{H}, {}^3\mathrm{He}, {}^4\mathrm{He}, {}^7\mathrm{Li}, e^{\pm}, \gamma, \nu, \bar{\nu}$.

Les étoiles continuent la nucléosynthèse, mais leur influence sur les quantités est très faible. Notez que les étoiles sont quand-même importantes pour nous, puisque le Big-Bang n'a pas créé d'atomes lourds (i.e. plus lourds que ^{7}Li.)

6.1 Physique nucléaire

Lorsque des protons et des neutrons se lient pour former un noyau, une grande quantité d'énergie de liaison B est émise. Elle peut être calculée par la différence des masses du noyau ${}^A_Z X$ et de ses constituants (Z protons et $A - Z$ neutrons),

$$B_A = Zm_p + (A - Z)m_n - m_X > 0.$$

Nous donnons dans le tableau suivant quelques valeurs, où l'on voit que l'énergie de liaison par nucléon la plus importante (pour les atomes légers ayant $A < 12$) est pour le noyau de ^{4}He.

	B		B/A		g
^{2}H	2.22	MeV	1.1	MeV	3
^{3}H	6.92	MeV	2.3	MeV	2
^{3}He	7.72	MeV	2.57	MeV	2
^{4}He	28.3	MeV	7.07	MeV	1
^{12}C	92.2	MeV	7.6	MeV	1

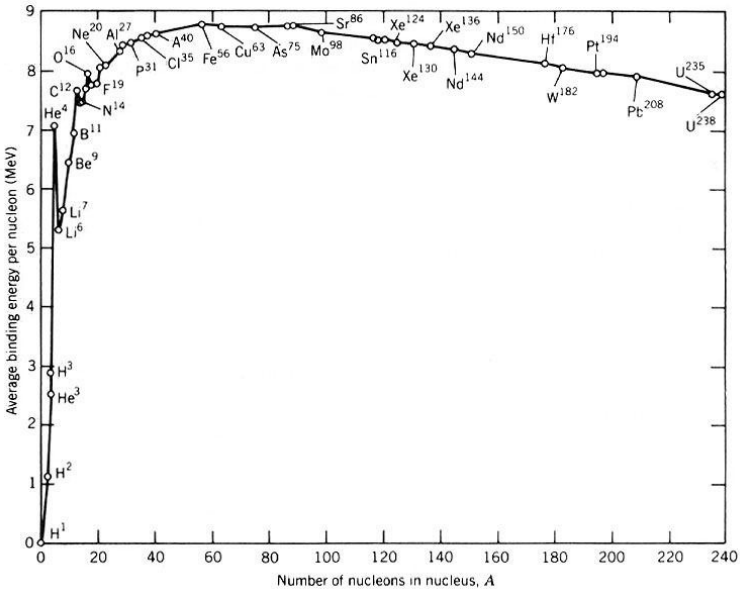


FIG. 6.1 – Énergie de liaison par nucléon pour différents noyaux [7].

Notez que la valeur optimale est pour le fer ^{58}Fe (voir fig. 6.1). Supposons que la réaction synthétisant un atome ${}^{A}_{Z}X$,

$$^{A}X \leftrightarrow Zp + (A - Z)n,$$

soit à l'équilibre. On déduit que les potentiels chimiques satisfont

$$\mu_A = Z\mu_p + (A - Z)\mu_n.$$

De plus, la densité de l'élement X satisfait l'équation de Saha :

$$\frac{n_X}{n_p^Z n_n^{A-Z}} \sim \exp(B/T).$$

A l'équilibre chimique, l'élément ayant la plus grande énergie de liaison devrait être le plus abondant, c'est-à-dire que l'Univers devrait contenir principalement du fer. On constate vite que ce n'est pas le cas, c'est-à-dire que la dynamique est importante et que l'équilibre n'est pas atteint.

6.2 Nucléosynthèse par étape

En partant d'une température de plus de 10 MeV, on va suivre les différentes étapes de la formation de noyaux.

$T \sim 10$ **MeV**

A une température de 10 MeV, l'âge de l'Univers est de $t = 10^{-2}$s. A ce moment aucun noyau ne peut se former, les protons et les neutrons sont libres et

leur nombre approximativement égal. Bien que l'énergie soit inférieure à l'énergie de liaison (7.1 MeV par nucléon pour ^{4}He), les noyaux ne peuvent pas encore se former. Les densités des nucléons (^{2}H, ^{3}H, ...) sont complètement négligeables.

Le point important à ce moment, est l'évolution du rapport entre le nombre de protons et le nombre de neutrons. Ce rapport est déterminé par les réactions électro-faibles

$$\begin{aligned} n\ \nu_e &\rightleftarrows p\ e^-, \\ n\ e^+ &\rightleftarrows p\ \bar{\nu}_e, \end{aligned}$$

qui sont en équilibre thermique jusqu'à $T^* = 0.73$ MeV. A cette température, le rapport entre le nombre de protons et le nombre de neutrons sera fixé. Notez que, comme pour les neutrinos, les intéractions entre les neutrons et le bain thermique sont régies par l'intéraction faible. Toutefois les températures de découplage des neutrinos et des neutrons sont légérement différente. En effet, les vitesses, les densités mais aussi la section efficace sont différentes.

$T \approx 0.73$ MeV : découplage des neutrons

L'âge de l'Univers est d'une seconde. Si le nombre de neutrons est égal au nombre de protons à haute température, ce n'est plus le cas ici. Introduisons les concentrations relatives

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{N_n}{N_n + N_p}, \\ X_p &= \frac{N_p}{N_n + N_p}. \end{aligned}$$

Le neutron est un peu plus lourd que le proton, la différence de masse est :

$$Q = 1.293 \text{ MeV}.$$

Le concentration d'équilibre pour les neutrons est donc :

$$X_n^{eq} \sim \frac{1}{1 + \exp(Q/T)}. \tag{6.1}$$

A la température de découplage, on a approximativement

$$X_n = \frac{1}{7}, \quad X_p = \frac{6}{7}.$$

Le neutron ayant un temps de vie grand par rapport à l'âge de l'Univers à ce moment, peu de neutrons auront le temps de ce désintégrer (la demi-vie du neutron étant de 15 minutes), il finiront pratiquement tous dans les noyaux.

Synthèse des éléments légers

L'âge de l'Univers est de une à trois minutes et la température de 0.3 à 0.1 MeV. Seul un petit nombre de neutrons ont le temps de se désintégrer. Les réactions permettant la création des noyaux légers sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
p + n &\rightarrow {}^2\mathrm{H} + \gamma, \\
{}^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} &\rightarrow {}^3\mathrm{H} + p, \\
{}^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} &\rightarrow {}^3\mathrm{He} + n, \\
{}^2\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} &\rightarrow {}^4\mathrm{He} + \gamma, \\
{}^3\mathrm{He} + {}^2\mathrm{H} &\rightarrow {}^4\mathrm{He} + p, \\
{}^3\mathrm{H} + {}^2\mathrm{H} &\rightarrow {}^4\mathrm{He} + n \quad \ldots
\end{aligned}$$

Ces réactions sont trop lentes pour être à l'équilibre thermique. En effet les concentrations de ${}^2\mathrm{H}, {}^3\mathrm{H}, {}^3\mathrm{He}, {}^4\mathrm{He}$ sont trop petites, et d'autre part, la répulsion électromagnétique entre les noyaux rend la section efficace petite.

Comme l'isotope ${}^4\mathrm{He}$ maximise l'énergie de liaison par nombre de nucléon (si on observe que les éléments légers, les élements plus lourds n'ayant pas le temps de se former), en première approximation on peut dire que tous les neutrons vont finir dans les noyaux de ${}^4\mathrm{He}$. Toutefois, comme le nombre de neutrons est inférieur au nombre de protons, une grande partie des protons resteront seuls, incapable de trouver des neutrons pour former des noyaux plus lourds. Si on note la fraction de ${}^4\mathrm{He}$ $x_4 = \frac{4n_{(^4\mathrm{He})}}{n_n+n_p}$, comme il faut deux neutrons pour former un atome de ${}^4\mathrm{He}$, la densité de neutrons nous permet de former

$$x_4 = \frac{2n_n}{n_n + n_p} = \frac{2}{7} \sim 0.25.$$

Ce chiffre correspond approximativement aux observations, ce qui constitue une confirmation expérimentale de la théorie du Big Bang.

6.3 Résultats de la nucléosynthèse

Lors de la nucléosynthèse, une infime fraction de ${}^7\mathrm{Li}$ est créée. Tous les autres éléments sont produits dans les étoiles. Les quantités observées actuellement d'hydrogène (90%) et d'hélium (10%) proviennent presque exclusivement du Big Bang. L'activité cumulée des étoiles n'a presque pas fait évoluer ces proportions.

Pour des valeurs plus précises il faut un attirail théorique et calculatoire bien plus élaboré. Mais les résultats ainsi obtenus sont en parfait accord avec les valeurs expérimentales, ce qui est une des grandes réussites du modèle standard de cosmologie. L'évolution graphique de ces différentes proportions est montrée dans la figure 6.2. Le resultat précis de la baryogenèse dépendant des abondances, les quantités des différents éléments légers produits permettent aussi de fixer la quantité absolue de matière baryonique (voir fig. 6.3).

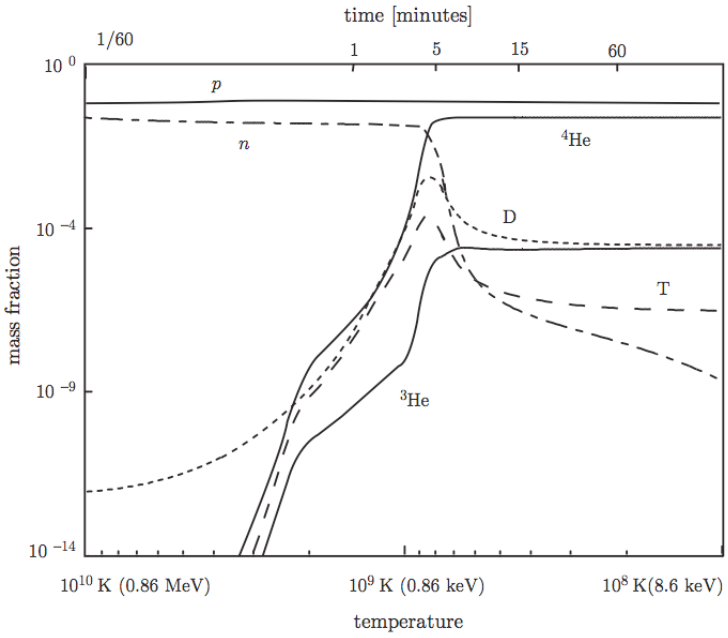


FIG. 6.2 – Évolution de la proportion des différents éléments légers durant les premières minutes de l'Univers [8].

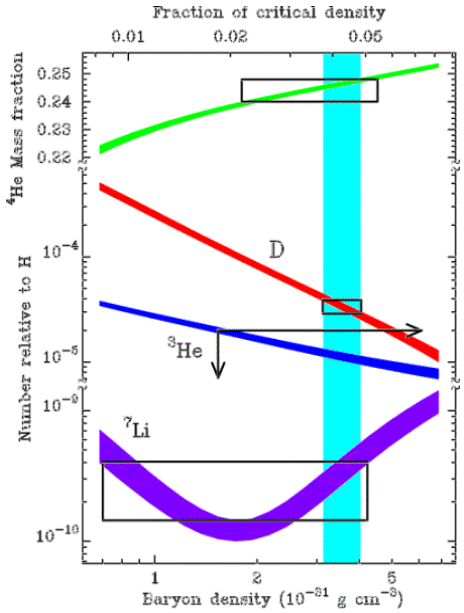


FIG. 6.3 – Abondances relatives des éléments par rapport à l'abondance absolue de baryons [9].

Notez encore que la quantité précise d'hélium dépend (par le nombre de neutrinos légers) du nombre de familles de particules. Trois familles suffisent à assurer une quantité d'hélium suffisante et d'hypothétiques familles supplémentaires augmenteraient cette quantité de manière incompatible avec les observations.

Grâce à la théorie du Big Bang, les astrophysiciens ont de ce fait pu fixer le nombre de familles une dizaine d'années avant les mesures faites au CERN sur la désintégration du Z.

Chapitre 7

Matière sombre

Si on suppose que seule la matière visible peuple l'Univers, les lois de la gravitation ne prédisent pas correctement l'expansion de l'Univers, ni la vitesse de rotation des galaxies. A priori, on peut penser que ce paradoxe est facile à résoudre. En effet, une grande partie de la matière n'est peut-être simplement pas visible parce que froide, ou trop peu lumineuse pour être observée. Nous verrons que ce problème est en fait beaucoup plus complexe. Aucune particule connue à ce jour ne peut être responsable de cette masse supplémentaire. Il y a deux manières de résoudre ce problème :

- Introduire une ou plusieurs nouvelles particules inobservées (matière sombre ou noire). Pour échapper aux tentatives de détection, cette particule doit interagir très faiblement avec la matière connue.
- Modifier la loi de la gravité. Celle-ci étant vérifiée très précisément du centième de millimètre jusqu'à la taille du système solaire, les modèles réalistes ne doivent modifier la loi de la gravité que pour des grandes distances ou des faibles accélérations.

7.1 Mise en évidence de la matière sombre

Le paradoxe de la matière noire n'est pas récent. Il fût déjà observé en 1933 par Zwicky qui étudiait le mouvement de galaxies dans l'amas de Coma. Il remarqua que les vitesses des galaxies étaient beaucoup trop grandes par rapport à ce qu'on attendait de la gravité produite par la matière lumineuse.

Courbes de rotation des galaxies spirales

En observant le mouvement individuel d'étoiles à différents endroits de la galaxie, on peut mesurer la vitesse de rotation du disque de la galaxie en fonction de la distance r au centre de la galaxie.

Supposons premièrement que seule la matière lumineuse crée la gravité. Si on considère un mouvement circulaire, la force de gravité donne la force centripète :

$$m\frac{v^2}{r} = G_N \frac{mM(r)}{r^2}, \tag{7.1}$$

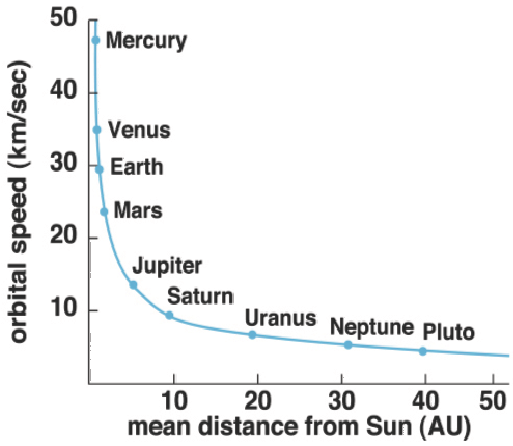


FIG. 7.1 – Vitesse de rotation des planètes autour du soleil [10].

où $M(r)$ est la masse incluse dans une sphère de rayon r.

Appliquons premièrement cette formule dans le cas du système solaire. La masse lumineuse est constituée du soleil, et on a donc $M(r) = M_{soleil}$ et la formule (7.1) donne la loi de Kepler :

$$v = \sqrt{\frac{MG_N}{r}},$$

qui est bien vérifiée (voir figure 7.1).

Appliquons maintenant la formule (7.1) au cas d'une galaxie typique. En observant les galaxies, on remarque que la luminosité $I(r)$ suit la loi empirique suivante :

$$I(r) = I_0 \exp\left(-\frac{r}{r_s}\right),$$

où I_0 et r_s sont des constantes qui dépendent de la galaxie considérée. Si on suppose que la masse est proportionnelle à la luminosité, i.e.

$$M(r) \propto \int dr' I(r') \propto 1 - \exp\left(-\frac{r}{r_s}\right),$$

on s'attend à ce que la vitesse (7.1) des étoiles décroisse à grande distance et suive la loi de Kepler loin du centre de la galaxie :

$$v(r)^2 \propto \frac{1 - \exp\left(-\frac{r}{r_s}\right)}{r} \quad \xrightarrow{r \gg r_s} \quad \frac{1}{r}.$$

Comme le montre les figures 7.2, 7.3, ce n'est pas le cas. La vitesse de rotation des galaxies devient constante à grande distance.

Nous avons montré que la répartition de la matière visible n'explique pas la répartition des vitesses des étoiles tournant loin du centre de la galaxie. De manière plus quantitative, on peut estimer la masse impliquée par luminosité et

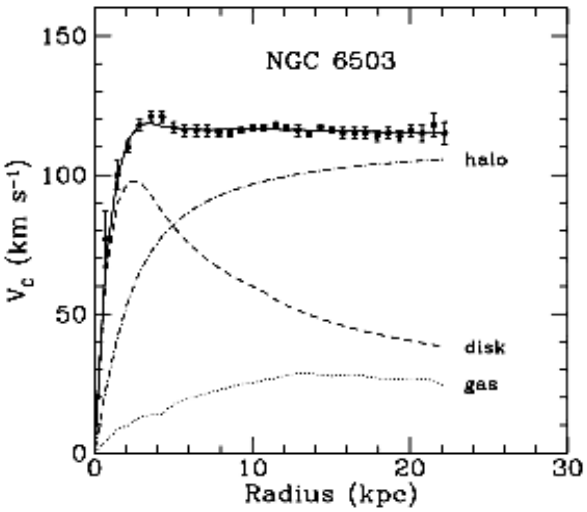


FIG. 7.2 – Courbe de rotation de la galaxie NGC 6503. Notez que la vitesse de rotation devient constante loin du centre de la galaxie [11].

tenir compte du gaz présent à l'intérieur des galaxies. Ceci ne permet pas d'expliquer la grande vitesse des étoiles. Il doit donc exister une grande proportion de matière noire qui doit se situer en moyenne plus loin du centre de la galaxie que la matière visible.

Les observations montrent une vitesse de rotation indépendante de r, c'est à dire que $M(r) \sim r$, et donc que la densité de matière sombre (DM) est $\rho_{DM} \sim r^{-2}$. Plus précisément les mesures sont bien reproduites si on suppose que la densité du halo de matière sombre est :

$$\rho_{DM} = \frac{v_\infty}{4\pi G_N r_c^2} \frac{r_c^2}{r^2 + r_c^2},$$

avec v_∞ la vitesse des étoiles situées loin du centre et r_c un paramètre dépendant de la galaxie.

Données du CMB, des supernovae et de la formation des structures

La présence d'une surabondance de matière a aussi des effets à plus grande échelle sur l'expansion de l'Univers. Ces effets peuvent être observés dans le spectre des fluctuations du fond de rayonnement cosmique, dans la luminosité des supernovae lointaines ou dans la forme des structures (galaxies, amas...).

Nous ne discuterons pas cette analyse ici, mais nous noterons le résultat : L'Univers contient de la matière sombre non-baryonique qui forme des structures (s'amasse dans les galaxies) mais n'émet pas de lumière. L'abondance totale de matière est $\Omega_M = 0.3$ (voir figure 7.4) et le rapport entre la matière baryonique et la matière totale est $\frac{\Omega_B}{\Omega_M} \cong \frac{1}{7}$. Les $\frac{6}{7}$ de la matière dans l'univers sont donc formés de particules invisibles et inconnues !

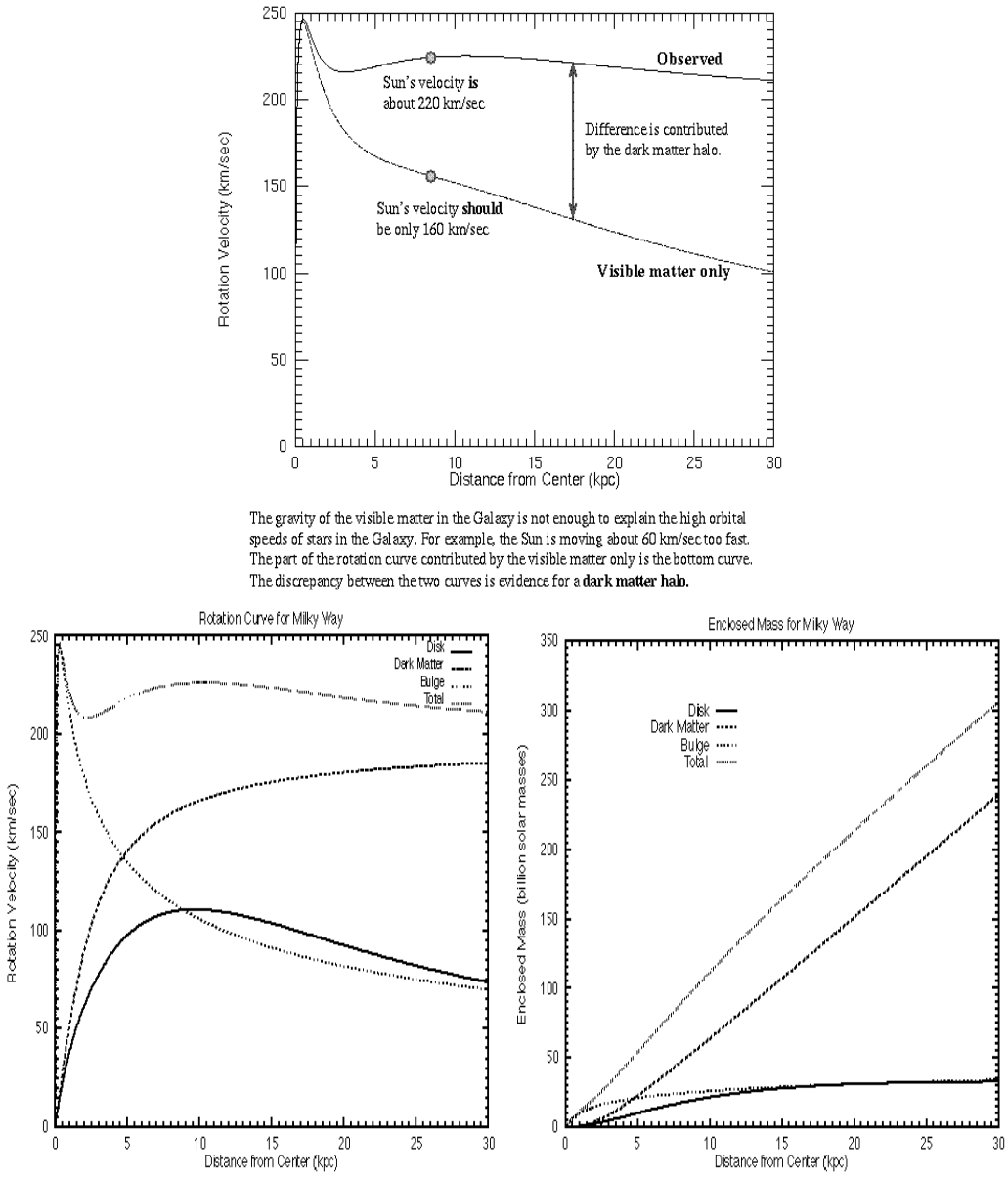


FIG. 7.3 – Courbe de rotation de notre galaxie et contenu en matière [12].

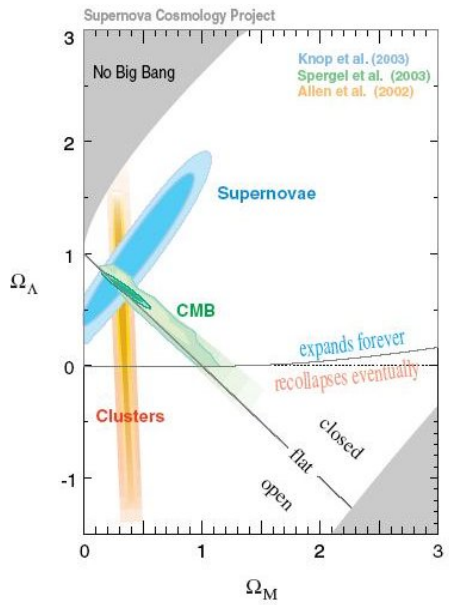


FIG. 7.4 – Abondances de matière et constante cosmologique [13].

7.2 Candidats à la matière sombre

Nous allons voir qu'aucune des particules connue à ce jour peut constituer la matière noire. Nous discuterons ensuite brièvement des modèles contenant une ou plusieurs nouvelles particules de matière sombre.

Baryons

La limite la plus stricte sur la quantité totale de baryons provient de la nucléosynthèse. L'abondance relative d'hydrogène, de deutérium, d'hélium et de lithium dépend de l'abondance absolue de baryons (voir figure 6.3).

Selon les observations, l'abondance de baryons doit être de l'ordre de $\Omega_b \sim 0.04$ et donc les baryons ne peuvent être responsables que d'un septième de la matière totale.

Neutrinos

Les neutrinos peu énergétiques étant presque indétectables, il est possible que l'Univers en contienne beaucoup. Dans le cas où ceux-ci auraient une masse suffisante, ils pourraient constituer la matière noire.

Le problème avec les neutrinos provient de leur masse très petite et du fait qu'ils sont des fermions. En effet, on va voir que le principe d'exclusion de Pauli ne permet pas de mettre assez de neutrinos pour alourdir suffisamment les galaxies.

Considérons une galaxie de rayon r, où la vitesse maximale de rotation du disque est v_{max}. Une estimation du nombre de fermions que l'on peut placer à

l'intérieur de la galaxie est obtenu en calculant le volume de l'espace de phase :

$$N \sim \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p d^3x \sim p_{max}^3 r^3.$$

Si on ne tient compte que de la matière sombre, c'est-à-dire des neutrinos, la masse de cette galaxie sera

$$M < g m_\nu p^3 r^3 \sim 6 m_\nu^4 v^3 r^3.$$

avec m_ν la masse du neutrino le plus lourd, et $g = 6$ le nombre de neutrinos. En même temps, la loi de Kepler $r v_{max}^2 = MG$ donne

$$v^2 < 6 \frac{G}{r} m_\nu^4 v^3 r^3.$$

En inversant cette relation, on obtient une limite sur la masse des neutrinos :

$$m_\nu > \left(\frac{1}{6Gvr^2}\right)^{1/4} \sim 100 \left(\frac{100\text{km/s}}{v}\right)^{1/4} \left(\frac{1\text{kpc}}{r}\right)^{1/2} \text{eV}.$$

où on a introduit les vitesses et rayons typiques pour une galaxie. Un calcul plus précis tenant compte de la forme du potentiel donne,

$$m_\nu > 120 \left(\frac{100\text{km/s}}{v}\right)^{1/4} \left(\frac{1\text{kpc}}{r}\right)^{1/2} \text{eV}.$$

Pour notre galaxie, $r \sim 10$ kpc, $v \sim 220$km/s, on obtient $m_\nu > 30$eV. On est déjà proche de la borne 4.18, mais pour les galaxies naines sphériques ($M \sim 10^6 M_{soleil}$) on trouve $m_\nu > 300$ à 500 eV, ce qui n'est pas possible selon 4.18.

La matière noire, contentant la majorité de la masse, domine la formation des structures. Les neutrinos forment en fait une matière trop légère, qui ne forme pas de petites structures et ne permet pas d'expliquer la présence de petites galaxies.

On peut bien sûr faire des calculs plus précis, et les observations du CMB et des structures donnent $\Omega_\nu \cong 0.004$.

Neutrinos droits ou stériles

Il s'agit du candidat à la matière sombre le moins hypothétique. En effet, les neutrinos (gauches) ayant une petite masse, il doit exister des neutrinos droits. Ceux-ci peuvent par contre avoir une masse très grande, et n'interagissent pas par la force faible. En plus de leur interaction gravitationnelle, ils n'ont qu'un faible couplage au Higgs, ce qui les rends difficilement détectables. Si leurs masses et interactions satisfont certaines contraintes, ils peuvent être responsables de la matière noire.

Superparticules

Les superparticules ont été introduites théoriquement pour des raisons de symétrie. A chaque particule bosonique correspondrait un fermion supersymétrique et vice-versa. La supersymétrie conservant les masses et les charges, on constate qu'aucune particule du Modèle Standard ne peut être le correspondant supersymétrique d'une autre particule. Comme ces superparticules n'ont pas été observées, elles doivent être plus lourdes (au moins 100 GeV) et donc la supersymétrie doit être en fait brisée. La particule supersymétrique la plus légère est stable et peut être responsable de la matière noire.

7.3 Modifications de la gravité

Au lieu d'introduire de nouvelles particules inobservées pour expliquer le mauvais fonctionnement de la gravité appliquée à la matière visible, on peut aussi modifier la gravité elle-même. Beaucoup de modèles existent, mais aucun n'explique pour le moment toutes les observations. Nous donnons ici un exemple.

Modification de la dynamique de Newton (MOND)

L'idée ici est de modifier les lois de Newton, et de remplacer $F = ma$ par

$$F = \begin{cases} ma & ; \quad a \gg a_0, \\ ma\frac{a}{a_0} & ; \quad a < a_0. \end{cases}$$

Avec cette relation et $a_0 \sim 10^{-10} ms^{-2}$, on obtient un bon accord avec de nombreuses courbes de rotation de galaxies tout en conservant les mesures du système solaire. Bien que ce ne soit probablement pas la loi fondamentale de la gravité, il reste quand-même à expliquer pourquoi cette modification marche si bien.

Chapitre 8

Problèmes du modèle standard de cosmologie

Le modèle de la cosmologie présenté jusqu'à maintenant a permis d'expliquer un bon nombre de phénomènes observés : expansion de l'Univers, existence du CMB, nucléosynthèse. Mais comme déjà mentionné au chapitre précédent, le modèle standard de la cosmologie ne permet pas de tout expliquer et nécessite par example l'introduction de matière et d'énergie noire.

Il s'avère qu'il subsiste un certain nombre d'autres problèmes que le modèle standard de cosmologie ne résoud pas. Dans ce chapitre on va exposer ces problèmes l'un après l'autre. Dans le prochain chapitre on va voir comment l'inflation pourrait résoudre ces problèmes.

8.1 Le problème des horizons

Considérons, dans un Univers statique, deux événements séparés par une distance ℓ. Il est clair que ces événements sont indépendants si leur séparation est suffisament grande pour qu'aucun signal n'ait eu le temps d'être transmis :

$$\ell > c|t_2 - t_1|.$$

Posons-nous maintenant la même question de l'indépendance de deux événements dans un Univers en expansion. Supposons, pour simplifier, que la courbure spatiale est nulle, $k = 0$. La métrique peut alors s'écrire

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right],$$

donc pour un signal lumineux

$$\begin{aligned} dr &= \frac{dt}{a(t)} \\ \Rightarrow r(t) &= \int_{t_0}^{t} \frac{1}{a(t')} dt'. \end{aligned}$$

Pour avoir la distance physique dans l'Univers en expansion il faut encore multiplier par le facteur d'échelle, d'où

$$r_H(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{a(t)}{a(t')} dt'. \tag{8.1}$$

Cette distance définit l'horizon de particule ; c'est la distance propre sur laquelle il peut y avoir une connexion causale au temps t.

Notons que l'existence d'un tel horizon résoud le paradoxe pourquoi le ciel n'est pas éclairé pendant la nuit malgré l'existence de toutes les étoiles dans l'Univers (paradoxe d'Olbers).

En dérivant l'horizon par rapport au temps, on obtient l'équation différentielle

$$\frac{dr_H}{dt} = 1 + Hr_H.$$

Le dernier terme tient compte du fait que les distances changent à cause de l'expansion.

On peut calculer la taille d'une région causalement connectée en fonction de l'âge de l'Univers. Pour l'époque dominée par la radiation le facteur d'échelle varie comme $a(t) \propto t^{1/2}$. L'horizon de particule devient alors

$$r_H(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{t^{1/2} a_0}{t'^{1/2} a_0} dt' = 2t,$$

où on a pris $t_0 = 0$. Pour l'époque dominée par la matière on a $a(t) \propto t^{2/3}$ et on obtient $r(t) = 3t$. En résumé le rayon de l'horizon est

$$r_H(t) = \begin{cases} 2t, \text{domination radiation}, \\ 3t, \text{domination matière}. \end{cases}$$

On peut voir qu'au temps de découplage des photons, l'Univers était formé de beaucoup de régions sans contact causal. Néansmoins on observe un fond de rayonnement cosmique très homogène. Le problème auquel on est confronté est donc de comprendre comment les photons de régions causalement non-liées peuvent avoir pratiquement la même température ; c'est le problème de l'isotropie de l'Univers, ou le problème des horizons.

Essayons de comprendre le problème de manière plus quantitative et comptons le nombre de régions sans contact causal au temps de découplage des photons. La taille de l'horizon à cette époque dominée par la radiation est $r_d = 2t_d$. Aujourd'hui la taille de cette région est donnée par

$$2t_d \frac{a(t)}{a(t_d)} = 2t_d \left(\frac{t}{t_d}\right)^{2/3},$$

où t est l'âge de l'Univers aujourd'hui. Notons θ l'angle des régions causalement connectées. On a alors

$$\theta \simeq \frac{2t_d}{3t} \left(\frac{t}{t_d}\right)^{2/3} = \frac{2}{3} \left(\frac{t}{t_d}\right)^{1/3},$$

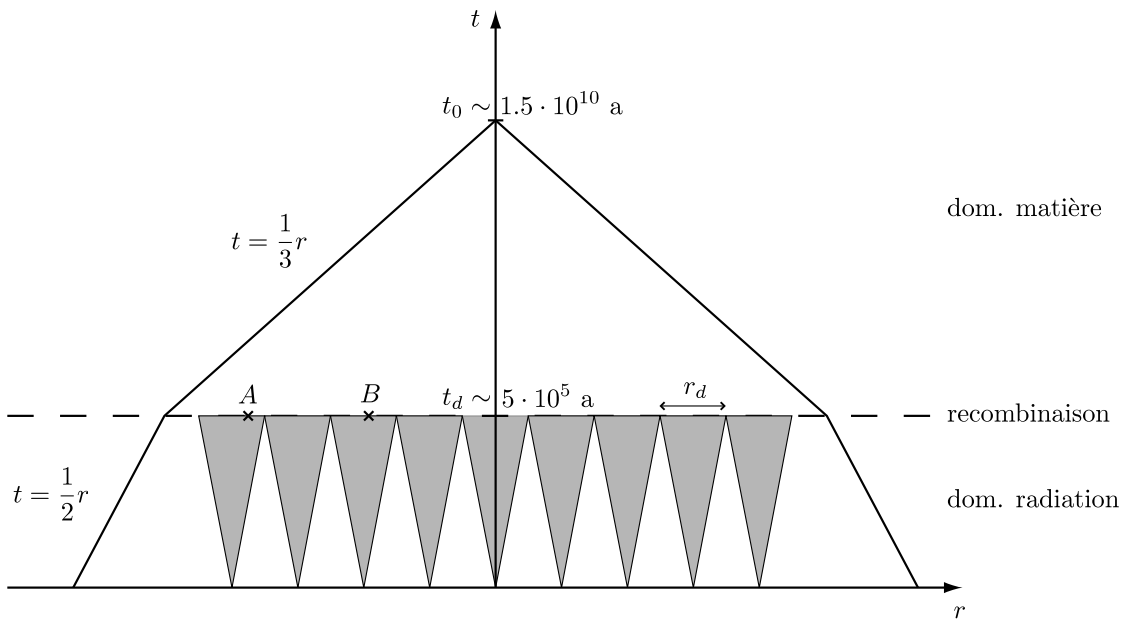


FIG. 8.1 – Taille des horizons en fonction de l'âge de l'Univers. Les régions ombrées sont causalement non-liées. En particulier, les photons émises aux points A et B ne sons pas en contact causal, pourtant on observe qu'ils ont pratiquement la même température.

donc

$$\theta \simeq \frac{2}{3}\left(\frac{5 \cdot 10^5}{1.5 \cdot 10^{10}}\right)^{1/3} \simeq 5 \cdot 10^{-2}.$$

On peut ainsi estimer que notre Univers consistait de $\sim 10^3$ régions causalement déconnectées au temps de recombinaison. Le problème des horizons se résume au fait que les photons provenant de toutes ces régions sans contact causal ont néansmoins pratiquement la même température. L'Univers semble beaucoup plus homogène qu'il ne devrait l'être.

8.2 Le problème de la courbure spatiale

Les observations cosmologiques montrent qu'aujourd'hui l'abondance totale est très proche de l'unité, $\Omega_{tot} = 1.02 \pm 0.02$. L'équation de Friedmann,

$$\Omega_{tot} - 1 = \frac{k}{a^2 H^2}$$

implique alors que notre Univers est pratiquement plat, $k \simeq 0$. Calculons la valeur de Ω_{tot} à un instant t. Pour un Univers dominé par la matière $a(t) \propto t^{2/3}$, $H(t) = \frac{2}{3t}$, impliquant

$$\Omega_{tot} - 1 \propto t^{2/3} \Rightarrow \frac{(\Omega_{tot} - 1)_{t_0}}{(\Omega_{tot} - 1)_t} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3}.$$

Si on suppose qu'aujourd'hui l'Univers est plat avec une précision de l'ordre du pourcent, i.e. $(\Omega_{tot} - 1)_{t_0} \simeq 0.01$, alors au temps de la nucléosynthèse on obtient

$$(\Omega_{tot} - 1)_{t_{\text{nucléosynthèse}}} \simeq 10^{-15}.$$

Donc pour avoir un Univers pratiquement plat maintenant, il faut qu'il soit créé dans un état plat avec une extrème précision ! Le modèle standard de cosmologie ne permet pas d'expliquer ce phénomène ; c'est le problème de la courbure spatiale (flatness problem).

Chapitre 9

Inflation

Dans le chapitre précédent, nous avons évoqué quelques uns des problèmes que pose le modèle standard de cosmologie. Dans ce chapitre nous allons discuter le paradigme inflationnaire comme une solution possible à ces problèmes. L'idée est qu'après le Big Bang l'Univers a subit une phase expansion exponentielle. Nous allons voir comment on peut formuler un modèle pour l'inflation et comment il résoud les problèmes des horizons et de la courbure spatiale. On discutera plus en détail le modèle de l'inflation chaotique.

9.1 Modèle inflationnaire

Le premier modèle d'inflation fût proposé par Alan Guth en 1981 puis de façon indépendante par Andrei Linde et par Andreas Albrecht et Paul Steinhardt.

On a vu que les problèmes des horizons et de la courbure spatiale sont essentiellement dus au fait que les régions en contact causal sont trop petites dans le modèle standard de cosmologie. Pour expliquer ces phénomènes ont pourrait faire l'hypothèse que l'évolution de notre Univers ne correspond pas à celle prédite par le modèle standard. Ses prédictions sur la nucléosynthèse et le CMB sont une évidence pour son bon accord avec les observations ; au moins jusqu'au temps de la nucléosynthèse. On peut quand même se demander si c'est possible de modifier le comportement du facteur d'échelle pour des temps $t < t_{\text{nucl}}$ de telle façon que les problèmes des horizons et de la courbure spatiale sont résolus.

Pour tenter de résoudre ces problèmes, on peut faire l'hypothèse que l'Univers a subit une phase où l'horizon des particules a évolué plus rapidement que dans le modèle standard. Un bon candidat pour cette hypothèse est de supposer que l'énergie du vide a dominé pendant une certaine période avant le temps de la nucléosynthèse. Rappelons que l'évolution du facteur d'échelle pendant une domination de la constante cosmologique est donnée par

$$a(t) = a_0 e^{Ht}, \quad \text{où } H = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_\lambda}.$$

La taille de l'horizon devient alors

$$r(t_f) = \int_{t_i}^{t_f} \frac{a_0 e^{Ht_f}}{a_0 e^{Ht'}} dt' = \frac{1}{H}\left(e^{H(t_f - t_i)} - 1\right).$$

Pour résoudre le problème des horizons, il faut choisir H (donc ρ_λ) et le temps $t_f - t_i$ tels que l'horizon soit plus grand que la taille de l'Univers observable. Pour estimer les ordres de grandeur, prenons l'énergie du vide de l'ordre de l'échelle d'unification des forces électrofaibles et fortes $\rho_\lambda \sim (10^{15})^4 \mathrm{GeV}^4$,

$$H(t_i) \sim \sqrt{\frac{\rho_\lambda}{M_{Pl}^2}} \sim \sqrt{\frac{10^{60}}{10^{38}}} \sim 10^{11}\mathrm{GeV}.$$

Supposons qu'une inflation ait lieu entre les temps t_i et t_f et qu'elle soit immédiatement suivie de la période de domination par la radiation. On peut en plus négliger la phase de domination par la matière et supposer que notre Univers soit dominé par la radiation depuis la fin de l'inflation t_f jusqu'à aujourd'hui t_0.

Le problème des horizons est résolu si une longueur $L(t_i) \sim H^{-1}(t_i)$ au début de l'inflation correspond aujourd'hui à une région au moins aussi grande que notre Univers visible $L(t_0) \gtrsim H_0^{-1}$. On peut relier ces deux longueurs par les facteurs d'échelle comme suit

$$L(t_0) = L(t_i) \cdot \frac{a(t_f)}{a(t_i)} \cdot \frac{a(t_0)}{a(t_f)}.$$

Pour caractériser la phase d'inflation on introduit la notion du nombre de puissances de e (e-folds), N, défini par le rapport du facteur d'échelle à la fin et au début de l'inflation

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^N.$$

En imposant $L(t_0) \gtrsim H_0^{-1}$ on obtient

$$e^N \gtrsim \frac{H(t_i)}{H_0} \cdot \frac{a(t_f)}{a(t_0)}.$$

Sous l'hypothèse que la radiation domine après l'inflation on peut écrire

$$\frac{a(t_f)}{a(t_0)} = \left(\frac{H_0}{H(t_f)}\right)^{1/2} \simeq \left(\frac{H_0}{H(t_i)}\right)^{1/2},$$

où dans la dernière égalité on a supposé que $H(t_f) \simeq H(t_i)$, vu que la constante de Hubble est pratiquement constante pendant l'inflation. On obtient finalement la condition

$$N \gtrsim \frac{1}{2}\ln\left(\frac{H(t_i)}{H_0}\right) \simeq \frac{1}{2}\ln\left(\frac{10^{11}\mathrm{GeV}}{1.28 \cdot 10^{-42}\mathrm{GeV}}\right) \simeq 60.$$

Pour que l'inflation résolve le problème des horizons il faut en particulier avoir un nombre de e-folds $N \gtrsim 60$.

En conclusion, on peut choisir le temps de l'inflation tel que l'horizon de particule soit suffisament grand pour englober tout l'Univers, afin d'expliquer son isotropie à grande échelle. Mais une phase d'inflation pourrait aussi résoudre le problème de la courbure spatiale. Comme

$$\Omega_{tot} - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \overset{\text{infl}}{\simeq} k\, e^{-2H(t_f - t_i)},$$

on voit que $\Omega_{tot} - 1$ n'est pas strictement zéro mais diminue de manière exponentielle. Comme $H(t_f - t_i)$ est choisi suffisamment grand, la courbure spatiale tend très vite vers une valeur proche de 1. Le paradigme inflationnaire peut donc résoudre à la fois le problème des horizons et celui de la courbure spatiale.

9.2 Inflation chaotique

Ayant compris comment on pourrait expliquer les problèmes du modèle standard de cosmologie, on va maintenant essayer d'obtenir un modèle théorique simple avec toutes les propriétés requises. La réalisation la plus simple du paradigme inflationnaire est donnée par l'inflation chaotique. Ceci est un mécanisme d'inflation parmis de nombreux autres (e.g. old inflation, new inflation, hybrid inflation, eternal inflation ...) Pour décrire le mécanisme de l'inflation on introduit un nouveau champ scalaire réel, massif, appelé l'inflaton. L'action décrivant ce champ scalaire couplé de façon minimale à la gravité est

$$S = S_{E-H} + S_\phi = \int d^4x \sqrt{-g}\, R + \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right],$$

où $V(\phi)$ est un potentiel donné, par exemple $V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4} \phi^4$. Dans le cas le plus simple on n'introduit qu'un terme de masse $V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$.

Conditions initiales

Pour pouvoir étudier l'évolution de l'Univers en présence du champ scalaire ϕ on doit fixer les conditions initiales pour ce champ. Si on était dans l'espace plat, on s'attendrait à ce que le champ scalaire oscille autour du minimum du potentiel $\phi = 0$. Dans un espace courbe en expansion ceci n'est plus justifié. De plus, au début de l'inflation, donc en gros

$$\Delta t \sim M_{Pl}^{-1} \simeq 10^{-44} \text{ sec}$$

après le Big Bang, on ne sait pas si on a le droit d'appliquer les lois de la relativité générale ou de la théorie des champs relativistes. Vu que les effets quantiques et la force de gravité sont si grands, il faudrait plutôt utiliser une théorie de gravité quantique. On peut néansmoins estimer que l'énergie totale est

$$\mathcal{E} \sim M_{Pl}^4 \simeq 10^{76} \text{ GeV}^4.$$

Cette énergie énorme est probablement répartie en parties égales entre le terme cinétique et le potentiel. Ceci implique en particulier qu'à l'état initial le champ ϕ n'est pas nul ; une valeur typique serait $m^2\phi^2 \sim M_{Pl}^4$, i.e

$$\phi_{ini} \sim \frac{M_{Pl}^2}{m}. \tag{9.1}$$

Notons qu'on suppose en général que $m \ll M_{Pl}$. Comme l'énergie est si grande les fluctuations du champ sont importantes. On s'attend donc à un comportement "chaotique" des conditions initiales du champ scalaire. C'est pour cette raison que ce modèle est connu sous le nom d'inflation chaotique.

Dynamique

En variant l'action par rapport au champ scalaire on obtient les équations du mouvement :

$$\partial_\mu \left[\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi\right] + \sqrt{-g}\, \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0.$$

Pour la métrique de Robertson-Walker, $ds^2 = dt^2 - a^2(t)dr^2$, on a $\sqrt{-g} = a^3(t)$. Dans une région où le champ scalaire est suffisament uniforme on peut négliger les dérivées spatiales $\partial_i \phi \simeq 0$:

$$\Rightarrow \partial_t \left[a^3(t) \cdot 1 \cdot \partial_t \phi\right] + a^3(t) \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0,$$

ce qui peut être mis sous la forme suivante

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \tag{9.2}$$

En imaginant que ϕ correspond à la coordonnée d'une particule non-relativiste en mécaniqe classique, on peut interprêter le terme $3H\dot{\phi}$ comme l'analogue d'un terme de frottement. Si ce terme était nul, on retrouverait l'équation du mouvement du oscillateur harmonique.

En variant l'action par rapport à la métrique, on obtient les équations d'Einstein avec le tenseur d'énergie-impulsion du champ scalaire comme membre de droite :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right). \tag{9.3}$$

Ces deux équations indépendantes (9.2) et (9.3) déterminent complétement le système. On essayera dans la suite d'analyser ces équations pour en extraire la physique de l'inflation. Pour fixer les idées on supposera dorénavant que le potentiel ne comporte qu'un terme de masse

$$V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2. \tag{9.4}$$

L'équation du mouvement pour ϕ est la même que pour une balle roulant sur le potentiel avec de la friction. Un tel mouvement présente deux régimes qualitativement différents : un premier où la friction domine et la balle descend lentement le potentiel et un deuxième où la balle fait de rapides oscillations autour du minimum. On va maintenant discuter ces deux régimes dans le cas de l'inflation.

Approximation du slow-roll

Nous allons résoudre les équations de mouvement dans l'approximation dite du slow-roll. L'idée est que le potentiel est assez plat ou que le frottement est assez grand, pour que le champ scalaire roule très lentement le long du potentiel (slow-roll). Imposons les deux conditions suivantes :

$$H \gg \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} \tag{9.5}$$

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \ll V(\phi). \tag{9.6}$$

Sous ces hypothèses on peut négliger des termes dans les équations du mouvement et les récrire comme suit

$$3H\dot{\phi} + m^2\phi = 0,$$
$$H^2 = \frac{4\pi G}{3}m^2\phi^2.$$

En injectant la deuxième équation dans la première on obtient

$$\sqrt{12\pi}\frac{m}{M_{Pl}}\phi\dot{\phi} + m^2\phi = 0,$$

qui s'intègre facilement

$$\phi \simeq \phi_0 - \frac{mM_{Pl}}{\sqrt{12\pi}}\,t, \tag{9.7}$$

où ϕ_0 est une constante d'intégration fixée par les conditions initiales. Cette solution est valable tant que les conditions de slow-roll sont satisfaites. En particulier elle ne reste valable que jusqu'à ce que $\dot{\phi}^2 \sim m^2\phi^2$, donc jusqu'au temps

$$t^* \sim \frac{M_{Pl}}{m^2},$$

correspondant à la fin du régime du slow-roll.

Rechauffement

A la fin de la période du slow-roll l'inflation entre dans la phase dite du rechauffement. Le champ scalaire oscille alors de façon cohérente autour du minimum du potentiel. L'inflaton se désintègre alors en radiation qui remplit l'Univers. Après le refroidissement dû à la période d'expansion rapide, l'Univers est rechauffé grâce

à ce transfert d'énergie du champ scalaire. Sous l'hypothèse que toute l'énergie du champ scalaire est transférée en chaleur, on peut estimer la température de l'Univers après l'inflation :

$$m^2\phi^2 \sim m^2 M_{Pl}^2 \sim T^4 \Rightarrow T \sim \sqrt{mM_{Pl}}.$$

La période d'inflation est terminée après le rechauffement et l'Univers entre dans la phase de domination par la radiation.

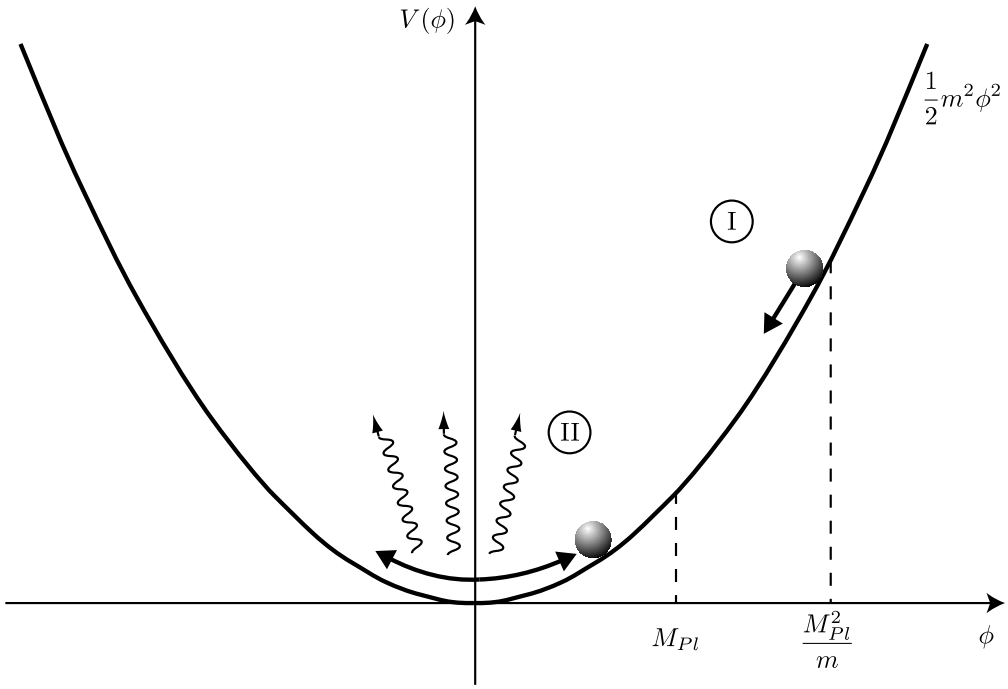


Fig. 9.1 – Potentiel de l'inflaton et les deux régimes de l'inflation : (I) slow-roll, (II) reheating.

9.3 Prédictions observationnelles

Le modèle de l'inflation ne fournit pas seulement une solution aux problèmes du modèle standard de cosmologie mais fait plusieurs prédictions qu'on peut tester par des observations cosmologiques. Ce n'est pas évident de tester toutes les prédictions de l'inflation et certaines dépendent du modèle d'inflation considéré.

Grâce aux mesures extrêmement précises de WMAP on a pu tester avec succès plusieures de ces prédictions. Une est que l'Univers doit être plat à une précision d'environ $\Omega_{tot} = 1 \pm 10^{-4}$. On sait du CMB que $\Omega_{tot} = 1.02 \pm 0.02$, ce qui est en accord avec le modèle d'inflation.

L'inflation "dilue" si bien les inhomogénéités dans l'Univers que l'existence de structures est difficile à comprendre. Comme on discutera dans le prochain

chapitre, la formation des structures a besoin de fluctuations primordiales. Ces fluctuations pourraient venir des fluctuations du champ scalaire de l'inflation. De cette manière l'inflation dicte quelques unes des propriétés des perturbations primordiales qui peuvent aussi être testées expérimentalement.

Chapitre 10

Formation des structures

L'Univers, bien qu'homogène à l'échelle cosmologique, est très inhomogène à plus petite échelle. Ces inhomogénéités (amas stellaires, galaxies, amas de galaxies,...) appelées structures, ont des formes, des tailles et des densités particulières. Par exemple, dans un amas de galaxies, la densité et de 100 à 1000 fois supérieure à la densité moyenne de l'Univers, alors qu'elle est 10^5 fois supérieure dans une galaxie.

Dans ce chapitre, on va essayer de comprendre la dynamique des structures, d'où elle proviennent, quand et comment elles ont été formées. Dans une deuxième étape, on verra que leur forme exacte peut nous renseigner sur le contenu en matière et en énergie de l'Univers.

Dans les scénarios standards de cosmologie, on suppose l'existence d'une période d'inflation. Celle-ci permet d'expliquer pourquoi l'Univers est homogène à large échelle, mais peut en fait aussi expliquer la formation des structures. En effet, les fluctuations quantiques de l'inflaton créent des petites inhomogénéités. A cette époque la taille typique de ces inhomogénéités, la longueur de corrélation, est de $r \sim \frac{1}{m}$, où m est la masse de l'inflaton. Notez que 1 $\mathrm{GeV}^{-1} \sim 10^{-14}$ cm, et donc que ces fluctuations sont ridiculement petites. Toutefois l'inflation va agrandir considérablement les distances et on peut montrer que les fluctuations de l'inflaton permettent d'expliquer les structures observées.

10.1 Instabilités de Jeans

On va premièrement se demander si les inhomogénéités créées au début de l'Univers vont grandir, se concentrer, ou au contraire, disparaître en se diluant.

Pour répondre à cette question, on va premièrement simplifier le problème en supposant que :

- L'Univers est statique (pas d'expansion)
- Gravitation de Newton (les corrections de la relativité générale sont faibles).

Dans ce cas simplifié, on va supposer l'existence de petite fluctuations dans un Univers homogène. On considère donc une distribution initiale de matière caractérisée

par

$$\rho_i(\vec{x}) = \rho + \delta\rho(\vec{x})$$

avec ρ =const. Cette distribution est-elle stable ou instable ? On va voir que cela dépend de la forme de la fonction $\delta\rho$.

Dynamique Newtonienne des fluides

Rappelons premièrement quelques formules de mécanique des fluides. Le potentiel φ de la gravité Newtonienne satisfait l'équation de Poisson

$$\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho. \tag{10.1}$$

La densité de matière satisfait l'équation de continuité

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot(\rho\vec{v}) = 0, \tag{10.2}$$

et l'évolution des pressions et des vitesses est donnée par l'équation d'Euler

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}\varphi. \tag{10.3}$$

L'équation d'Euler peut être dérivée de la manière suivante. On considère un petit volume de fluide. Les forces s'appliquant sur ce volume sont dues à la pression et à la gravité :

$$\vec{F} = -\oint p d\vec{s} - \int dV\rho\vec{\nabla}\phi.$$

L'intégrale de la pression sur le bord du domaine peut-être remplacée par une intégrale sur le volume de la divergence de la pression, d'où

$$\vec{F} = -\int\left(\vec{\nabla}p + \rho\vec{\nabla}\phi\right)dV.$$

D'autre part la deuxième équation de Newton nous permet d'exprimer

$$\vec{F} = \int\rho\frac{d\vec{v}}{dt}\,dV$$

et comme $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$, la dérivée totale de la vitesse est

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}.$$

On obtient

$$\int\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}\right)dV = -\int\left(\vec{\nabla}p + \rho\vec{\nabla}\phi\right)dV,$$

et on peut finalement se débarrasser de l'intégrale en observant que cette relation est valable quelque soit le petit volume de fluide considéré. Cela nous donne bien l'équation d'Euler (10.3).

Perturbations

On onsidère maintenant des petites perturbations $\delta p, \delta\varphi, \delta\vec{v}, \delta\rho$ autour d'un fond statique homogène :

$$\begin{aligned} p(x) &= p_0 + \delta p, \\ \varphi(x) &= \varphi_0 + \delta\varphi, \\ v(x) &= \delta v, \\ \rho(x) &= \rho_0 + \delta\rho. \end{aligned}$$

Les perturbations satisfont les équations suivantes :

$$\nabla^2 \delta\varphi = 4\pi G \delta\rho, \tag{10.4}$$

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}(\rho_0 \delta\vec{v}), \tag{10.5}$$

$$-\frac{\partial \delta\vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}\delta p + \vec{\nabla}\delta\varphi. \tag{10.6}$$

Dans le cas où l'entropie est conservée, la propagation d'une onde acoustique est décrite par

$$\frac{\delta p}{\delta\rho} = v_s^2, \tag{10.7}$$

où v_s est la vitesse du son dans le milieu.

En introduisant cette dernière relation dans l'équation d'Euler pour les perturbations (10.6), on obtient

$$\frac{\partial \delta\vec{v}}{\partial t} + \frac{v_s^2}{\rho_0}\vec{\nabla}\delta\rho + \vec{\nabla}\delta\phi = 0. \tag{10.8}$$

On dérive ensuite l'équation (10.5) par rapport au temps :

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} + \rho_0 \vec{\nabla}\left(\frac{\partial \delta\vec{v}}{\partial t}\right) = 0,$$

et on introduit l'équation d'Euler (10.8) :

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} + \rho_0 \vec{\nabla}\left(-\frac{v_s^2}{\rho_0}\vec{\nabla}\delta\rho - \vec{\nabla}\delta\phi\right) = 0.$$

En utilisant l'équation de Poisson (10.4), on obtient une équation d'onde pour $\delta\rho$:

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t^2} - v_s^2 \nabla^2 \delta\rho - 4\pi G \rho_0 \delta\rho = 0.$$

Considérons les solutions de la forme $\delta\rho = Ae^{i\vec{k}\vec{x} - i\omega t}$. Elles sont solution pour autant que la contrainte

$$-\omega^2 + v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0 = 0$$

soit satisfaite, c'est-à-dire si

$$\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0.$$

Pour $k^2 \geq \frac{4\pi G\rho_0}{v_s^2} = k_J^2$, la fréquence est positive ($\omega^2 > 0$) et les perturbations sont stables. Par contre si $k^2 < \frac{4\pi G\rho_0}{v_s^2}$, la fréquence est imaginaire ($\omega^2 < 0$), le système est instable et les perturbations grandissent. Dans ce cas, les structures peuvent se former. Comme le système est instable pour k petit, seule les perturbations suffisamment grandes peuvent croître.

Que se passe-t-il dans un Univers en expansion si on tient compte des effets relativistes ? Nous ne ferons ici qu'une analyse qualitative. L'expansion peut être négligée si le rythme de croissance des perturbations est beaucoup plus rapide que l'expansion de l'Univers :

$$\omega \gg H \sim \sqrt{G\rho}.$$

Donc aucune instabilité ne peut apparaître si $k \gg k_J$, même si l'Univers s'étend.

Notez que l'argument donné ici n'est pas tout à fait correct. On ne peut pas réellement trouver une solution à l'équation de Poisson $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ pour une distribution homogène de la densité ρ qui donne un champ ϕ homogène en physique Newtonienne. En effet, si $\rho =$const, la solution générale pour ϕ est

$$\phi = \sum_{ij} \frac{1}{2} A_{ij} x_i x_j + \sum_i B_i x_i,$$

ce qui donne une force gravitationelle non nulle. De ce fait ρ ne peut rester constant que si l'on introduit une pression qui compense. Comme la solution pour ϕ diverge lorsque $x \to \infty$, on va considérer premièrement une sphère de rayon R, et prendre ensuite la limite $R \to \infty$. La solution statique au centre est

$$\phi \sim 4\pi G\rho_0 r^2,$$

ce qui force à poser

$$p \sim p_0 + 4\pi G\rho_0 r^2.$$

Notez toutefois que ces considérations ne sont valables que pour

$$r \ll \sqrt{\frac{p_0}{4\pi G\rho_0^2}},$$

au delà, la relativité générale doit être considérée.

Masse et longueur de Jeans

On définit encore la longueur de Jeans

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J},$$

qui représente la taille des plus petites structures qui peuvent se former. On définit aussi la masse de Jeans, qui représente la quantité de matière à l'intérieur d'une sphère de rayon λ_J :

$$M_J = \frac{4\pi}{3}\rho_0 \left(\frac{2\pi v_s}{\sqrt{4\pi G\rho_0}}\right)^3 = \frac{4\pi}{3}\rho_0 \left(\frac{\pi v_s^2}{G\rho_0}\right)^{3/2}.$$

Dans un Univers dominé par la radiation, de $p = \frac{\rho}{3}$, on a $v_s^2 = \frac{1}{3}$, d'où

$$M_J \sim \frac{M_{Pl}^3}{\sqrt{\rho_0}} \sim \frac{M_{Pl}^3}{T^2} \sim 10^{17} M_{\text{soleil}}.$$

Après la recombinaison, la vitesse du son pour la matière baryonique est de

$$v_s^2 = \frac{5}{3}\frac{T}{m_p} = 4 \cdot 10^{-10}$$

et donc la masse de Jeans de

$$M_J = 3 \cdot 10^3 M_{\text{soleil}}.$$

Considérons notre galaxie comme exemple. Elle contient $10^{11} M_{\text{soleil}}$, elle peut donc être formée au début de l'époque dominée par la radiation ou après la recombinaison (voir figure 10.1). En fait, pendant l'époque de domination par la radiation, les perturbations n'ont pas le temps de croître. Elles redeviennent ensuite stables (au temps t_g pour notre galaxie, figure 10.1) et se propagent comme des ondes acoustiques. Après la recombinaison seulement, les structures de la taille de notre galaxie ou plus petites ont le temps de se former.

Nous avons vu comment et à quel moment les fluctuations peuvent grandir, mais il reste à comprendre d'où ces fluctuations proviennent. L'inflation permet de résoudre ce problème. Nous ne discuterons pas cela ici, mais on peut montrer que les fluctuations quantique de l'inflation nous donne des perturbations initiales compatibles avec celle nécessaire à la formation des structures.

10.2 Caractéristiques de la matière sombre

La matière noire a une influence sur l'évolution de l'Univers, plus particulièrement sur la formation des structures. En effet, différentes particules, en fonction de leur masse et leurs interactions, vont aider ou retarder la formation des structures, et en déterminer l'échelle.

Les candidats à la matière noire étant nombreux et très variés, on va les classer en fonction de leur influence sur la formation des structures. On distingue généralement trois catégories ; la matière sombre froide (CDM), tiède (WDM) et chaude (HDM).

Grossièrement, on peut dire que la matière sombre froide est formée de particules lourdes de faible vitesse. Ces particules vont rapidement former des structures

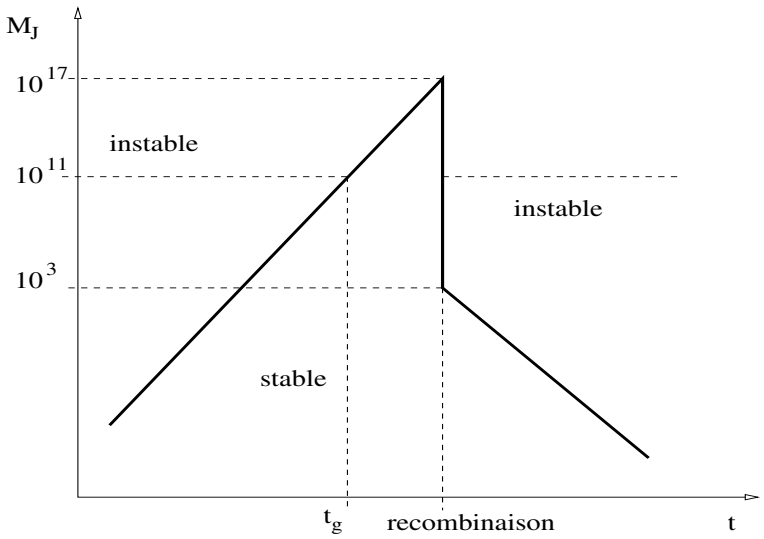


FIG. 10.1 – Masse minimale (en unités de masses solaire) des structures instables au début de l'Univers. Une instabilité de la taille de notre galaxie ($M \sim 10^{11}$) pourrait en principe se former tout au début, mais le temps est trop court et la formation des galaxies puis des étoiles commence après le découplage.

petites. Au contraire la matière sombre chaude est formée de particules peu massives se déplaçant rapidement qui ont tendance à étaler les structures et empêcher leur formation à petite échelle.

Nous allons maintenant préciser cette discussion. Avant l'égalité entre les densités de matière et de radiation t_{eg}, les photons diffusent efficacement l'énergie et empêchent toute formation de structure. Peu après, la matière sombre domine l'évolution de l'Univers. On sait que la matière sombre n'interagit que très faiblement avec la matière baryonique et avec elle-même (sinon elle aurai déjà été observée). Les particules de matière sombre se déplacent librement et nous pouvons définir sa longueur de diffusion simplement :

$$\lambda(t) = vt,$$

où v est la vitesse de la particule et t l'âge de l'Univers. Les structures les plus petites seront de taille λ, puisque les particules de matière sombre auraient le temps de s'échapper d'une structure plus petite. Caractérisons maintenant la matière sombre. Si on note M_λ la masse contenue dans une sphère de rayon $\lambda(t_{eg})$, par définition,

- Si $M_\lambda > 10^{14} M_{soleil}$ $\longrightarrow$ matière sombre chaude
- Si $10^{14} M_{soleil} > M_\lambda > 10^5 M_{soleil}$ $\longrightarrow$ matière sombre tiède
- Si $10^5 M_{soleil} > M_\lambda$ $\longrightarrow$ matière sombre froide.

On pense actuellement que l'Univers contient de la matière sombre froide ou tiède.

Prenons l'exemple du neutrino stérile. On suppose que sa masse est de l'ordre du keV et qu'il découple à une température beaucoup plus élevée, de l'ordre du

MeV. On peut alors montrer que

$$M_\lambda = 2.6 \cdot 10^{11} M_{\text{soleil}} \Omega_m h^2 \left(\frac{1\text{keV}}{m_\nu}\right)^3 \left(\frac{p/T}{3.15}\right)^3 .$$

Ce neutrino est donc de la matière sombre tiède. Notez que si un gaz de particules satisfait une distribution relativiste, $p/T = 3.15$.

Chapitre 11

Baryogenèse

Bien qu'il existe une symétrie presque parfaite entre particules et antiparticules dans le Modèle Standard, on n'observe pas (ou presque pas) d'antimatière dans l'Univers. Bien que quelques antiparticules sont crées lors de collisions de rayons cosmiques à haute énergie, on n'observe pas de grandes quantités d'antimatière même à grande distance dans l'Univers [14]. Il est très difficile d'expliquer pourquoi il existe une asymétrie baryonique, ni pourquoi elle est de l'ordre de

$$\frac{n_B - n_{\bar{B}}}{n_\gamma} \cong (6.1 \pm 0.2) \cdot 10^{-10}. \tag{11.1}$$

Dans cette brève introduction à la baryogenèse, on va voir comment on peut construire un modèle permettant d'obtenir un surplus de matière (baryons) dans l'Univers.

11.1 Les trois critères de Sakharov

Il s'avère que plusieurs symétries empêchent la création d'une asymétrie baryonique. Ainsi les théories qui veulent expliquer le surplus de matière doivent satisfaire les trois critères de Sakharov [15] :

- Non-conservation du nombre baryonique. Cette condition est évidente, toutefois, la stabilité de la matière (la durée de vie du proton est plus grande que 10^{31} années) contraint fortement les modèles possibles.
- Déviation par rapport à l'équilibre thermique. En partant d'un Univers sans asymétrie baryonique, si l'equilibre thermique est respecté, aucune évolution des nombres de particules est possible. Notez qu'aucun potentiel chimique peut être associé au nombre baryonique, puisque celui-ci n'est pas conservé.
- Violation des symétries C et CP. Il faut un moyen de distinguer les particules des antiparticules. La violation du nombre baryonique n'est pas suffisante, elle permet de créer des particules, mais aussi des antiparticules. il faut encore favoriser la création de particules.

Le Modèle Standard satisfait en principe à ces critères. Les intéractions faibles contiennent une asymétrie C et CP, et il existe à haute température des transitions qui ne conservent pas le nombre baryonique. Toutefois la déviation par

rapport à l'équilibre thermique est trop faible pour expliquer l'asymétrie (11.1). Tous les modèles qui expliquent la baryogenèse supposent l'existence de particules supplémentaires non contenues dans le Modèle Standard.

11.2 Exemple de modèle pour expliquer la baryogenèse

Le premier modèle pour expliquer la baryogenèse est dû à Sakharov, c'est le seul modèle que nous discuterons ici, bien que beaucoup d'autres existent. Ce modèle suppose l'existence du leptoquark X, une particule très massive $M_L \sim M_{Pl}$. Cette particule peut se désintégrer soit en deux quarks, avec la largeur Γ_{qq} soit en un antiquark et un antilepton avec $\Gamma_{\bar{q}\bar{l}}$. L'antiparticule $\bar{X}$ se désintègre en une paire d'antiquarks avec $\bar{\Gamma}_{\bar{q}\bar{q}}$ ou en quark et lepton avec $\bar{\Gamma}_{ql}$.

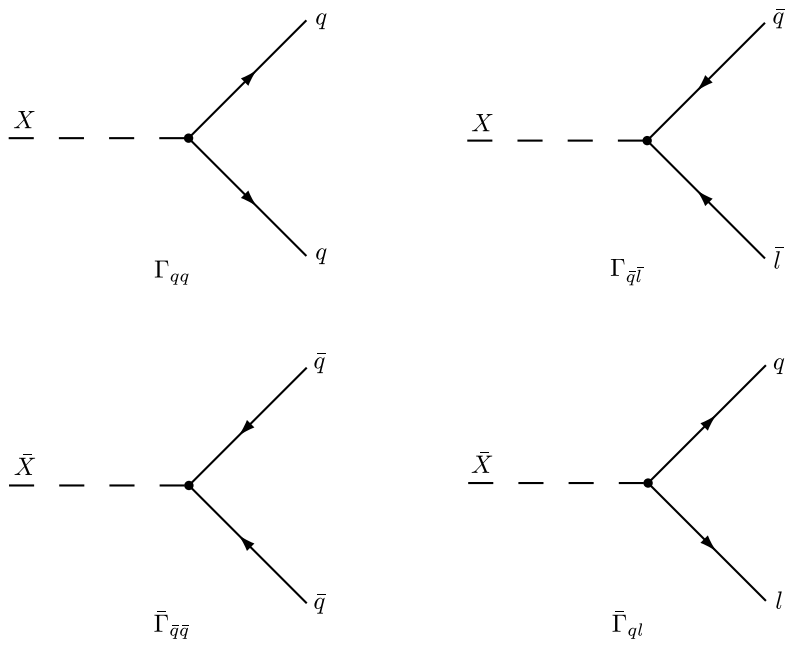


FIG. 11.1 – Diagrammes de Feynman et temps de vie pour les différentes désintégrations du leptoquark X.

Le nombre baryonique crée lors de la désintégration des particules X hors équilibre est

$$n_B \propto n_X \left[2(\Gamma_{qq} - \bar{\Gamma}_{\bar{q}\bar{q}}) - (\Gamma_{\bar{q}\bar{l}} - \bar{\Gamma}_{ql})\right]. \tag{11.2}$$

En cas de violation CP, les largeurs Γ et $\bar{\Gamma}$ peuvent être différentes et donc le nombre baryonique n_B non nul.

Notez que la condition de déséquilibre thermique est bien respectée. En effet l'évolution de l'Univers est très rapide, $H \sim M_{Pl}$ alors que le taux de désintégration

du leptoquark est $\Gamma \sim f^2 M_{Pl}$ où f est la constante de couplage typique de la particule X. Si on considère $f \ll 1$, on a bien une désintégration hors équilibre.

On doit en fait considérer au minimum deux désintégrations différentes, puisque la symétrie CPT impose que le temps de vie des particules et des antiparticules soit égaux. En considérant deux désintégrations possibles, on peut faire en sorte que

$$\Gamma_{qq} + \Gamma_{\bar{q}\bar{l}} = \bar{\Gamma}_{\bar{q}\bar{q}} + \bar{\Gamma}_{ql}, \tag{11.3}$$

c'est-à-dire respecter la symétrie CPT, tout en gardant $\Gamma_{qq} \neq \bar{\Gamma}_{\bar{q}\bar{q}}$ et $\Gamma_{\bar{q}\bar{l}} \neq \bar{\Gamma}_{ql}$. En introduisant la contrainte (11.3) dans l'équation (11.2), on trouve

$$n_B \propto n_X(\Gamma_{qq} - \bar{\Gamma}_{\bar{q}\bar{q}}).$$

Ce modèle prédit le rapport densité de baryons sur entropie suivant :

$$\frac{n_B}{s} \sim \frac{1}{g^*} \frac{\Gamma_{qq} - \bar{\Gamma}_{\bar{q}\bar{q}}}{\Gamma_{qq} + \bar{\Gamma}_{\bar{q}\bar{q}}}.$$

Pour satisfaire les observations, $\frac{n_B}{s} \sim 10^{-10}$, en tenant compte de $g^* \sim 100$, on doit fixer

$$\frac{\Gamma_{qq} - \bar{\Gamma}_{\bar{q}\bar{q}}}{\Gamma_{qq} + \bar{\Gamma}_{\bar{q}\bar{q}}} \sim 10^{-8}.$$

On constate donc que même une très petite violation CP est suffisante dans ce modèle pour obtenir l'asymétrie baryonique observée.

Annexe A

Exercices

Chapitre 1

• **Exercice 1.1** : Métrique de Robertson-Walker

Un Univers homogène et isotrope peut être représenté par la métrique de Robertson-Walker $ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\Omega^2$. Dans le cas où l'espace est plat :

$$d\Omega^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{A.1}$$

et dans le cas où il est courbé,

$$d\Omega^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \tag{A.2}$$

Noter que $k = \pm 1$, si $k = 1$ l'espace est fini et sphérique alors que pour $k = -1$ l'espace est infini et hyperbolique. Pour les parties spatiales (A.1) et (A.2), effectuer les points suivants :

1) Ecrire $g_{\mu\nu}$ et déterminer $g^{\mu\nu}$.

2) Dériver les équations des géodésiques d'une particule de masse m plongée dans cet espace. Observer que la méthode de dérivation utilisée au cours est équivalente aux équations de Lagrange.

3) En déduire la valeur des symboles de Christoffel $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}$ en mettant les équations du mouvement sous la forme $\ddot{x}^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\dot{x}^{\nu}\dot{x}^{\rho}$. Vérifier quelques résultats avec la formule habituelle :

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\alpha\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\alpha}} \right).$$

4) Calculer le tenseur de Riemann $R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa}$ avec la relation :

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\eta\nu}.$$

5) Calculer le tenseur de Ricci $R_{\mu\kappa} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\kappa}$.

6) Déterminer la courbure $R = g^{\mu\kappa} R_{\mu\kappa}$.

7) Calculer le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$.
8) On considère maintenant $a(t) = 1$ et on élimine le temps. Il reste donc la métrique trois dimensionnelle (A.2). Déduire des calculs précédents que valent les tenseurs $R,\ R_{ij},\ R^i_{jkl}$. Calculer aussi R_{ijkl} et observer les symétries des résultats en paramétrisant les éléments non nuls de $R_{ij},\ R_{ijkl}$.

• **Exercice 1.2** : Rappel de théorie des champs
Trouver les équations du mouvement provenant des actions suivantes :

$$\begin{aligned} S &= \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right], \\ S &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right], \end{aligned}$$

où ϕ est un champ scalaire, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ est le tenseur du champ électromagnétique et A_μ le potentiel vecteur.

• **Exercice 1.3** : Conservation du tenseur énergie-impulsion
Pour les cas suivants, vérifier que le tenseur énergie-impulsion est conservé, c'est-à-dire que $T^{;\nu}_{\mu\nu} = 0$.
1) Pour le champ scalaire réel,

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}\frac{\partial\phi}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{L},$$

avec

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}\frac{\partial\phi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\phi}{\partial x^\beta} - \frac{1}{2}m^2\phi^2.$$

Indication : utiliser les équations du mouvement pour le champ scalaire.

2) Pour le fluide parfait, le tenseur énergie-impulsion est

$$T_{\mu\nu} = (p+\rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}.$$

Pour simplifier le calcul, supposer que $u_i = 0,\ i = 1,2,3$ et voir que le tenseur énergie-impulsion devient : $T^\mu_{\ \nu} = \mathrm{diag}(\rho, -p, -p, -p)$. De la conservation de ce-dernier, retrouver le premier principe de la thermodynamique.

• **Exercice 1.4** : Volume de l'espace courbé
Pour la métrique de Robertson-Walker, dans le cas d'une courbure positive, trouver le volume de l'espace.

Indication : Le volume est donné par la formule suivante : $V = \int d^3x\sqrt{\gamma}$ avec $ds^2 = \gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \frac{dr^2}{1-r^2/R^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ la partie spatiale de la métrique.

• **Exercice 1.5** : Sphère dans un espace courbé
On considère toujours la partie spatiale de la métrique de Robertson-Walker

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2.$$

Pour les cas $k = 0,\ k < 0,\ k > 0$:
1) Ecrire les équations des géodésiques et trouver les solutions avec $\theta =$ const et $\phi =$ const. Les courbes données par ces solutions sont appelées "rayons".
2) Calculer le rayon propre de la r-sphère $\rho(r)$.
3) Calculer l'aire $\sigma = \sigma(\rho)$ de la r-sphère de rayon ρ.
4) Calculer le volume $V = V(\rho)$ de la r-sphère de rayon propre ρ.

• **Exercice 1.6** : Tenseur énergie-impulsion d'un gaz de bosons
On considère un gaz de bosons neutres de spin nul à température T. Ces particules sont représentées par un champ scalaire réél. En utilisant l'action et l'expression pour l'opérateur tenseur énergie-impulsion du champ scalaire vue au cours, montrer que le tenseur énergie-impulsion d'un gaz de ces bosons à température T se ramène à l'expression d'un fluide parfait :

$$(T^\mu_{\ \nu}) = \mathrm{diag}(\rho, -p, -p, -p).$$

Que valent $\rho,\ p$ et le rapport $\frac{p}{\rho}$ dans le cas ultra-relativiste $m \ll T$ et dans le cas non-relativiste $m \gg T$.

Indications :

1) Constater que le tenseur énergie-impulsion contient seulement des termes du type $\hat{\phi}^2$ ou du type $\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x^\mu}\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial x^\nu}$.

2) Considérer que le système se trouve dans une boîte de côté L. Transformer de Fourier et développer les opérateurs précédents sur la base des opérateurs de création et d'annihilation

$$\hat{\phi}(x^\mu) = \sum_{k_i} \frac{1}{L^{3/2}\sqrt{2\varepsilon_k}} \left[a_k e^{-ik_\mu x^\mu} + a_k^\dagger e^{ik_\mu x^\mu}\right]$$

et exprimer le résultat à l'aide de l'opérateur nombre de particules $\hat{n}_k$.

3) Calculer la moyenne thermique des opérateurs obtenus. Rappelons que la valeur moyenne d'un opérateur $\hat{O}$ est donnée par $\langle \hat{O} \rangle = \mathrm{tr}(\hat{\rho}\hat{O}))$ où la trace s'effectue sur tout l'espace de Fock qu'on représentera par la base des nombres d'occupation $\langle n_1, n_2, ...|$, et où $\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta \hat{H}}}{\mathrm{tr}[e^{-\beta \hat{H}}]}$ dans le cas d'un gaz à température $T = 1/\beta$.

4) A l'aide des calculs obtenus, déduire $\langle T^{\mu}_{\ \nu} \rangle$. Transformer la somme résiduelle sur p_i en intégrale en effectuant la limite du continuum $\sum_{p_i} \to \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 \int d^3p$. Pour calculer cette intégrale dans les deux cas limites $m \ll T$ et $T \ll m$, on utilise :

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^{ax} - 1} = \frac{\pi^4}{15a^4}, \quad \int_0^\infty \frac{x^2}{e^{a+bx^2}} = \frac{e^{-a}\sqrt{\pi}}{4b^{3/2}}.$$

Chapitre 2

• **Exercice 2.1** : Univers d'Einstein

On considère le modèle statique d'Einstein avec la constante cosmologique. En connaissant la rayon de l'Univers $R \sim 1.8\ 10^{10}\ a.l$, trouver la densité de matière ρ et la constante cosmologique λ nécessaire à maintenir l'Univers statique. Donner les réponses en unités MKSA et en GEV.

• **Exercice 2.2** : Distance et décalage vers le rouge

Trouver la distance d'un supernova de décalage vers le rouge $z = 0.2$.

• **Exercice 2.3** : Age de l'Univers

Trouver l'âge de l'Univers dans le cas où l'Univers est plat et dominé par la matière durant toute son évolution.

• **Exercice 2.4** : Evolution de l'Univers

Trouver l'évolution des Univers plats paramétrés par les constantes suivantes :

a) Univers dominé par le rayonnement, $p = \rho/3$, $k = \lambda = 0$.
b) Univers dominé par la constante cosmologique, $k = p = \rho = 0$.

Chapitre 3

• **Exercice 3.1** : Le sort de l'Univers

Le but de cet exercice est de reproduire les différents domaines et limites contenus dans le graphique ($\Omega_m,\ \Omega_\lambda$) vu au cours. Pour ce faire, on commence par étudier les cas limites :

a) Univers dominé par la constante cosmologique λ, $p = \rho = 0$.
Indication : considérer les cas où $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$ séparément.

b) Univers dominé par la matière, $p = \lambda = 0$.
Indication : considérer les cas où $\rho_0 > \rho_c$ et $\rho_0 < \rho_c$ séparément. Reporter ces résultats sur les bords du graphique.

On considère maintenant le cas du graphique ($\rho \neq 0,\ \lambda \neq 0,\ k \neq 0,\ p = 0$).

c) Déterminer les domaines où l'Univers est ouvert ou fermé et ceux où il accélère ou décélère.

d) Déterminer enfin les domaines où le Big Bang n'existe pas et où l'Univers s'étand ou se recontracte dans le futur.
Indication : Considérer l'équation de Friedmann contenant la dérivée première de a seulement. Ecrire les paramètres de cette équation à l'aide des abondances, et mettre cette équation sous la forme d'une intégrale.

$$t - t_0 \propto \pm \int_1^r \frac{dr'}{\sqrt{F(r')}},\ r = a/a_0$$

Notez que $F(1) = 1$ et esquisser les différentes formes possibles de la fonction F. Discuter les zéros et le signe de la fonction $F(r)$. Pour ceci considérer séparément les cas $\Omega_\lambda < 0$, $\Omega_\lambda > 0$ et $\Omega_\lambda = 0$. De l'étude de la fonction $F(r)$, déduire le comportement de l'intégrale et celui de l'Univers.

• **Exercice 3.2** : Evolution de l'Univers

On suppose que les abondances actuelles sont $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\lambda = 0.7$, la température du rayonnement cosmique actuelle de $T = 2.73$K, l'age de l'Univers $t = 14 \cdot 10^9$a et la constante de Hubble 70 km s^{-1}Mpc^{-1}. Trouver à quelle époque $\rho_m = \rho_\lambda$ et $\rho_m = \rho_\gamma$.
a) Approximer les équations de Friedmann en supposant que seule la composante dominante intervient.
***b)** Résoudre les équations de Friedmann numériquement.

• **Exercice 3.3** : Rayonnement cosmique

Estimer l'ordre de grandeur de la température actuelle du fond de rayonnement cosmique en supposant que l'Univers est dominé par le rayonnement ($p = \rho/3$,

$\lambda = k = 0$) et que son age est de $14 \cdot 10^9$ années. En déduire sa fréquence typique et son décalage vers le rouge.

Chapitre 4

• **Exercice 4.1** : Gaz de protons

On considère un Univers dominé par le rayonnement contenant des photons (γ), des protons (p) et des antiprotons ($\bar{p}$). On considère la réaction $p\bar{p} \leftrightarrow \gamma\gamma$ dont la section efficace est $\sigma = m_p^{-2}$, où m_p est la masse du proton. On fait l'approximation suivante : le gaz est à l'équilibre thermodynamique jusqu'à ce que le taux de réaction soit moins rapide que l'expansion de l'Univers. Après cet instant t_d, on considère que la réaction d'annihilation n'a plus lieu. Considérer premièrement le cas d'un gaz neutre $n_p = n_{\bar{p}}$.

a) Trouver la température T_d à l'instant t_d en supposant que les protons sont non-relativistes.
b) Trouver le rapport entre la densité de protons et la densité de photons à l'instant t_d.
c) Calculer la densité de photons actuelle et utiliser le rapport trouvé au point précédent pour trouver la densité de protons résiduelle à notre époque.
d) En supposant que l'Univers possède un excès de protons $\frac{n_p - n_{\bar{p}}}{n_p + n_{\bar{p}}} = 10^{-10}$ pour $T \gg m_p$, trouver le rapport actuel ($T \ll m_p$) entre le nombre de protons et le nombre de photons.

• **Exercice 4.2** : Fonctions de distributions

Calculer la densité d'énergie ρ à partir de la fonction de distribution n. Considérer le cas des bosons n_B et des fermions n_F relativistes ($\varepsilon = p$).

Indication : les fonctions de partition sont

$$n_B = \frac{1}{e^{\varepsilon/T} - 1}, \quad n_F = \frac{1}{e^{\varepsilon/T} + 1},$$

et la densité d'énergie est : $\rho = \int pn(p) \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$. Se ramener à une intégrale du type

$$\int \frac{z^{(x-1)}}{e^z \pm 1} dz,$$

et écrire $\frac{1}{e^z \pm 1}$ comme série d'exponentielles. Intégrer tous les termes en observant que $\int dz e^z z^n = \Gamma(n+1)$ où $\Gamma(n+1) = n!$ si n est entier. Retrouver dans ce résultat la fonction ζ de Riemann $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$. Par exemple, on a $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$.

•**Exercice 4.3** : Evolution des densités
Supposons que la densité d'un gaz de particules $n_0(\mathbf{k})$ est connue au temps t_0.

a) En supposant que le gaz n'interagit pas, et que l'Univers s'étand avec un facteur d'échelle $a(t)$, trouver la densité de particules pour tout les temps $n(\mathbf{k}, t)$.

b) A l'aide de la solution obtenue, écrire une équation différentielle pour laquelle $n(\mathbf{k}, t)$ est solution (équation de Boltzmann).

•**Exercice 4.4** : Entropie
En reprenant les hypothèses de l'exercice 1.6, démontrer que l'entropie d'un gaz de bosons relativistes respectant la distribution de Boltzmann $\hat{\rho} = e^{-\beta \hat{H}}$, est donnée par

$$S = \frac{2\pi^2}{45} T^3.$$

•**Exercice 4.5** : $g_*(t)$
Discuter la valeur de g_* dans l'histoire de l'Univers.

Chapitre 5

•**Exercice 5.1** : Rayonnement du corps noir
Monter que la distribution du corps noir

$$dE_\omega = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

conserve sa forme lorsque l'Univers s'étend. En déduire la dépendance de la température en fonction du facteur d'échelle et vérifier que l'entropie $S = \frac{2\pi^2}{45} T^3$ est conservée.

Chapitre 6

•**Exercice 6.1** : Degrés de libertés à la nucléosynthèse
Trouver la variation de la concentration de ^{4}He si on change le nombre de degrés de libertés relativistes au moment de la nucléosynthèse.

Chapitre 7

• **Exercice 7.1** : Puits de potentiel.
On considère un potentiel $V(x)$ tel que $V(x) = -V_0$ à l'intérieur d'un cube de côté R et $V(x) = \infty$ à l'extérieur. Trouver le nombre de niveaux d'énergie $E \leq 0$ pour une particule quantique de masse m. Combien de neutrinos des 3 types peut-on mettre dans ces niveaux. Comparer le résultat obtenu avec la méthode approximative du cours.

• **Exercice 7.2** : Découplage et concentration
On considère une particule scalaire s neutre à l'équilibre thermique dans l'Univers. Cette particule découple à une température $T_d = 150$ MeV et possède une masse $m_s = 100$ eV.

a) Estimer le rapport entre la température T_s du gaz de ces particules et la température des photons T_γ après la disparition des positrons.

b) Estimer la concentration n_s du gaz de ces particules aujourd'hui.

c) Une telle particule peut-elle exister dans notre Univers ? Comparer avec le cas des neutrinos et discuter.

• **Exercice 7.3** : Matière noire
On considère le neutralino N, une particule supersymétrique candidate à la matière sombre. On suppose que sa masse est de $m_N = 100$ GeV, et qu'elle est actuellement responsable de la totalité de la matière sombre : $\Omega_N = 0.22$.
Cette particule est maintenue à l'équilibre thermique par la réaction $NN \to \gamma\gamma$. Trouver sa température de découplage T_N^* et la section efficace de la réaction précédente.

Indication : Supposer que $T_N^* \ll m_N$.

• **Exercice 7.4** : Quatrième neutrino
On considère qu'il existe un quatrième neutrino massif, qui intéragit avec l'intéraction faible comme les autres. En utilisant les contraintes provenant de la cosmologie, quelles sont les fenêtres possibles pour sa masse ?

Indication : Supposer que les autres neutrinos sont sans masse.

Chapitre 8

• **Exercice 8.1** : Problème des monopôles
Une prédiction standard des théories unificatrices est l'existence de monopôles magnétiques de masse $m \simeq 10^{16}$GeV.

a) Supposons que l'Univers est dominé par le rayonnement et ne subit pas d'inflation. A la temperature de $T_m = 10^{16}$GeV on suppose l'existence d'un monopôle "par horizon". Calculer la densité de monopôles actuelle.

b) Supposons qu'à $T_i = 10^{10}$GeV une période d'inflation s'insère dans l'Univers dominé par la radiation. Après cette période, l'Univers est réchauffé à $T_r = 10^{10}$GeV, et continue à être dominé par la radiation jusqu'au moment d'égalité

$$t_e = 1400\ (\Omega_m h^2)^{-2}[\mathrm{a}], \quad T_e = 5.5\ \Omega_m h^2[\mathrm{eV}],$$

après lequel il est dominé par la matière. Combien de temps doit durer la période d'inflation pour avoir une densité de monopôles plus petite que la densité critique ?

Chapitre 9

• **Exercice 9.1** : Equations du mouvement pour l'inflaton
On considère un champ scalaire φ décrit par l'action

$$S(\varphi) = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\varphi\partial_\nu\varphi - V(\varphi)\right]$$

qui évolue dans un Univers homogène de métrique $ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2+dy^2+dz^2)$. Dériver les équations dynamiques utilisées au cours :

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0 \tag{A.3}$$

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right). \tag{A.4}$$

Indication :
L'équation (A.3) provient de la variation de S par rapport à φ, alors que (A.4) provient de l'équation d'Einstein $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}$. Le terme $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ à été calculé dans l'exercice 1.1, et $T_{\mu\nu}$ peut-être obtenu avec :

$$\frac{1}{2}T_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S(\varphi)}{\delta g^{\mu\nu}}$$

• **Exercice 9.2** : Comportement de l'inflaton

Au cours, on a étudié la dynamique du champ φ dans la limite $H \gg m$. On s'intéresse ici à la limite inverse qui est réalisée vers la fin de l'inflation quand le champ φ approche le minimum du potentiel. On suppose que le couplage entre l'inflaton et la matière est faible et donc la dynamique du champ φ est donnée par les équations (A.3, A.4).

a) Trouver l'évolution approximative du champ φ et de la constante de Hubble.

b*) Sans faire d'approximation, résoudre des équations (A.3, A.4) numériquement pour différentes conditions initiales $\varphi, \dot{\varphi}$.

Chapitre 10

• **Exercice 10.1** : Perturbations et fond de rayonnement cosmique

Supposons qu'au moment de la recombinaison, des structures de la taille de la longeur de Jeans sont formées. Dans l'analyse spectrale du fond de rayonnement cosmique, à quels multipôles contribuent-elles approximativement ?

Indication : On suppose que l'Univers est dominé par la matière, que le découplage a lieu à $t_d = 5 \cdot 10^5$[a] et que l'Univers actuel a un age de $t_0 = 14 \cdot 10^9$[a].

• **Exercice 10.2** : Caractérisation de la matière noire

a) On s'intéresse à la masse M_λ contenue dans une sphère de rayon λ, où λ est la distance que peuvent parcourir les particules de matière noire (de vitesse v) jusqu'au temps d'égalité t_e. Dériver la formule vue au cours :

$$M_\lambda = 2.6 \cdot 10^{11} M_{\text{soleil}} \Omega_m h^2 \left(\frac{1\text{keV}}{m_\nu}\right)^3 \left(\frac{p/T}{3.15}\right)^3 .$$

Pour ce faire, calculer la masse contenue dans une sphère de rayon $(t_e v)$ au moment de l'égalité en supposant que la particule a découplée à 1 MeV.
Indication : $T_e = 5.5\Omega_m h^2$ [eV].

b) On considère à nouveau le neutralino N, une particule supersymétrique candidate à la matière sombre. On suppose que sa masse est de $m_N = 100$ GeV, et qu'elle découple à une température de $T_d = 1$MeV.

Au moment d'égalité entre la matière et la radiation ($T_{eg} = 5.5\ \Omega_m h^2$[eV], $t_{eg} = 1400\ (\Omega_m h^2)^{-2}$[a]), trouver sa longueur de diffusion et montrer que le gaz de particules N forme de la matière sombre froide.

Annexe B

Formulaire

1) *Constantes fondamentales*

$$\begin{aligned}
\hbar &= 1.05 \cdot 10^{-34}\,[\mathrm{Js}],\\
k_b &= 1.38 \cdot 10^{-23}\,[\mathrm{J/K}],\\
c &= 3 \cdot 10^{8}\,[\mathrm{m/s}],\\
G &= 6.67 \cdot 10^{-11}\,[\mathrm{Nm^2/kg^2}],\\
e &= 1.6 \cdot 10^{-19}\,[\mathrm{C}],\\
M_{Pl} &= 2.18 \cdot 10^{-8}\,[\mathrm{kg}] = 1.2 \cdot 10^{19}\,[\mathrm{GeV}].
\end{aligned}$$

2) *Changement d'unités*

$$\begin{aligned}
1\,[\mathrm{GeV}] &= 1.6 \cdot 10^{-10}\,[\mathrm{J}] = 0.51 \cdot 10^{14}\,[\mathrm{cm^{-1}}]\\
&= 1.5 \cdot 10^{24}\,[\mathrm{s^{-1}}] = 1.2 \cdot 10^{13}\,[\mathrm{K}]\\
&= 1.8 \cdot 10^{-24}\,[\mathrm{g}],\\
1\,[\mathrm{g\ cm^{-3}}] &= 4.3 \cdot 10^{18}\,[\mathrm{eV^4}],\\
1\,[\mathrm{pc}] &= 3 \cdot 10^{16}\,[\mathrm{m}].
\end{aligned}$$

3) *Constantes cosmologiques*

$$\begin{aligned}
H_0 &= 70\,[\mathrm{km\ s^{-1}\ Mpc^{-1}}],\\
\rho_c &= 0.9 \cdot 10^{-26}\,[\mathrm{kg/m^3}] = 4 \cdot 10^{-47}\,[\mathrm{GeV^4}],\\
M_\odot &= 2 \cdot 10^{30}\,[\mathrm{kg}] = 1.1 \cdot 10^{57}\,[\mathrm{GeV}].
\end{aligned}$$

Age et température actuelle de l'Univers :

$$t_0 = 14 \cdot 10^9\,[\mathrm{a}],\ T = 2.73\,[\mathrm{K}].$$

Age et température de l'Univers au moment d'égalité entre les densités de matière et de rayonnement :

$$t_{eg} = 1400(\Omega_m h^2)^{-2}\,[\mathrm{a}],\ T_{eg} = 5.5\,\Omega_m h^2\,[\mathrm{eV}],$$
$$\Omega_m = 0.3,\ h = 0.7.$$

4) *Thermodynamique*

Cas non-relativiste :

$$n = g\left(\frac{mT}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m-\mu}{T}\right).$$

Cas ultra-relativiste :

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{\pi^2}{30} g^* T^4,\\
n_b &= \frac{\zeta(3)}{\pi^2} g T^3 (\text{bosons}),\\
n_f &= \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} g T^3 (\text{fermions}),\\
s &= \frac{2\pi^2}{45} g^* T^3.
\end{aligned}$$

5) *Equations de Friedmann*

$$\begin{aligned}
\frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} - \frac{\lambda}{3} &= \frac{8\pi G}{3}\rho,\\
2\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{\dot{R}^2}{R^2} + \frac{k}{R^2} - \lambda &= -8\pi G p.
\end{aligned}$$

6) *Inflation*

Equations dynamiques du champ scalaire :

$$\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi} + V'(\varphi) = 0,$$
$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V(\varphi)\right).$$

7) *Formation des structures*

Masse et longueur de Jeans :

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\rho_0 \left[\frac{\pi v_s^2}{G\rho_0}\right]^{3/2},$$
$$K_J = \frac{\sqrt{4\pi G\rho_0}}{v_s},$$
$$\lambda_J = \frac{2\pi}{K_J}.$$

Bibliographie

Sources des figures

[1] E. Hubble. *"A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae"*. Proceedings of the National Academy of Sciences, Volume 15, Number 3 (1929).

[2] B. Reindl, G.A. Tammann. *"Reddening, absorption, and decline rate corrections for a complete sample of type Ia supernovae leading to a fully corrected Hubble diagram to* $v < 30000$ *km* s^{-1}*"*. The Astrophysical Journal, 624 :532–554 (2005).

[3] http ://wmap.gsfc.nasa.gov

[4] http ://www.phy.duke.edu/∼kolena/cmb.htm

[5] D.N. Spergel et al. *"First year WMAP observations : determination of cosmological parameters"*. The Astrophysical Journal Supplement Series, 148 :175–194 (2003).

[6] http ://background.uchicago.edu/∼whu

[7] http ://www.alaskajohn.com/physics/charts

[8] V. Mukhanov. *"Physical foundations of cosmology"*. Cambridge University Press (2005).

[9] http ://www.astro.rug.nl/∼weygaert/InleidingStk2/images/cosmology/abundances.gif

[10] http ://cse.ssl.berkeley.edu/bmendez/ay10/2002/notes/lec16.html

[11] http ://www.ph.ed.ac.uk/nuclear/nus_and_dm

[12] http ://www.astronomynotes.com/ismnotes/s7.htm

[13] http ://cosmicvariance.com/wp-images/knop03omegas.jpg

[14] G. Steigman, Ann. Rev. Astron. Astrophys. **14** (1976) 339.

[15] A. D. Sakharov, Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz. **5** (1967) 32.