Exercice 1 *Transformations de Lorentz*

i) En utilisant :

$$\mathbf{E'}_\perp = \gamma(\mathbf{E}_\perp + c\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B})$$
$$\mathbf{B'}_\perp = \gamma(\mathbf{B}_\perp - \frac{1}{c}\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E})$$

nous avons $E' = \gamma(E - \beta cB)$. Donc $E' = 0$ si $v = E/B$. Étant donné que $E \ll Bc$, nous pouvons negliger les effets de $O(\beta^2)$.

ii) $B' = \gamma(B - \beta E/c) \approx B - E^2/Bc^2$. La fréquence de larmor est donc :

$$\omega' = \frac{qB'}{m} = \frac{q}{m}\left(B - \frac{E^2}{Bc^2}\right)$$

iii) Oui, il y a un rayonnement parce que la particule en mouvement circulaire produit un dipôle qui oscille. La fréquence du rayonnement en R' est la fréquence de Larmor ω'.

iv) À cause de l'effet Doppler **nonrelativiste** (parce que nous avons négligé β^2) les fréquences sont $\omega_\pm = \omega'(1 \pm \beta)$. Évidemment, on obtient le même résultat en developpant la formule relativiste (série 10, ex 3) :

$$\sqrt{\frac{1 \pm \beta}{1 \mp \beta}} \approx 1 \pm \beta + O(\beta^2)\,.$$

v) Si nous mésurons les fréquences, nous pouvons calculer :

$$\frac{c(\omega_+ - \omega_-)}{(\omega_+ + \omega_-)} = v = \frac{E}{B}\,.$$

Exercice 2 *Multipôles*

i) Monopôle $Q = +q$. Dipôle $\mathbf{q} = q\mathbf{a}$.

ii) Monopôle $Q = +q$. Dipôle $\mathbf{q} = q(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Le monopôle ne change pas, le dipôle change.

iii) Monopôle $Q = 0$, dipôle $\mathbf{q} = q(\mathbf{a} - \mathbf{c})$. Le résultat ne dépend pas du référentiel.

iv) La condition afin qu'un $n-$pôle ne dépende pas de la choix de l'origine est que tous le $m-$pôles avec $m < n$ soient nuls. [Extra : exercice]

Exercice 3 *Antenne*

i) Le rayonnement est dipolaire si $L \ll c/\omega$. En plus, nous sommes dans la zone de radiation si $L, c/\omega \ll R$ où R est la distance de l'observateur.

ii) En utilisant l'équation de continuité :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -\frac{\partial \lambda}{\partial t}$$

où λ est la densité lineaire de charge (charge par unité de longeur). Par conséquent :

$$\lambda(z,t) = \frac{\pi I_0}{L\omega} \sin\left(\frac{\pi z}{L}\right) \sin(\omega t)$$

iii) Pour calculer la puissance totale du rayonnement nous devons d'abord calculer le moment de dipôle, qui peur avoir seulement une composante le long de $\hat{z}$:

$$\begin{aligned} d_z(t) &= \int_{-L/2}^{L/2} z\lambda(z,t)dz = \frac{\pi I_0}{L\omega}\sin(\omega t)\int_{-L/2}^{L/2} z\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)dz \\ &= \frac{I_0 L}{\pi\omega}\sin(\omega t)\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin(x)\,dx = \frac{2I_0 L}{\pi\omega}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

ayant utilisé :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin(x)\,dx = 2\,.$$

La puissance totale du rayonnement est donnée par la formule de Larmor :

$$P = \frac{\overline{|\mathbf{d}''|^2}}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3}\times\left(\frac{2I_0 L\omega}{\pi}\right)^2\times\frac{1}{2}$$

où le facteur $1/2$ est dû à $\overline{\sin^2} = 1/2$.

Exercice 4 *Champs électromagnétiques*

i) À cause de la symétrie cylindrique, $\mathbf{A}$ doit être le long de $\hat{z}$. On a donc :

$$\begin{aligned} A_z(r,t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty} dz'\,\frac{I(t-\sqrt{r^2+z'^2}/c)}{c^2\sqrt{r^2+z'^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-z_0}^{z_0} dz'\,\frac{\alpha(t-\sqrt{r^2+z'^2}/c)}{c^2\sqrt{r^2+z'^2}} \end{aligned}$$

où $z_0 = \sqrt{c^2t^2 - r^2}$ et nous avons utilisé $I(T) = 0$ si $T \leq 0$. En utilisant $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$ nous avons :

$$\begin{aligned} A_z(r,t) &= \frac{2\alpha}{4\pi\epsilon_0 c^3}\int_0^{z_0} dz'\left(\frac{ct}{\sqrt{r^2+z'^2}} - 1\right) \\ &= \frac{2\alpha}{4\pi\epsilon_0 c^3}\left[ct\ln\left(\frac{z_0+ct}{r}\right) - z_0\right] \end{aligned}$$

ii) Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ ont seulement les composantes :

$$E_z = -\partial_t A_z \quad \text{et} \quad B_\phi = (\nabla\times\mathbf{A})_\phi = -\partial_r A_z\,.$$

Après des manipulations élementaires on obtient :

$$\begin{aligned} B_\phi &= \frac{2\alpha}{4\pi\epsilon_0 c^3}\frac{z_0}{r} \\ E_z &= -\frac{2\alpha}{4\pi\epsilon_0 c^2}\ln\left(\frac{z_0+ct}{r}\right) \end{aligned}$$

iii) $E_z/cB_\phi \overset{ct\gg r}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 5 *Problème de l'électrostatique*

i) Dirichlet. Une bonne fonction de Green est donnée par :

$$G_D(\mathbf{x},\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} - \frac{1}{|\mathbf{x}-R(\mathbf{x}')|}\right)$$

où $R(\mathbf{x}') = R((x',y',z')) = (x',y',-z')$.

ii) En utilisant :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_D}{\partial n'}|_S &= -\frac{\partial G_D}{\partial z'}|_{z'=0} \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{z'-z}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} - \frac{z'+z}{|\mathbf{x}-R(\mathbf{x}')|^3}\right)|_{z'=0} \\
&= -\frac{2z}{4\pi\left((x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right)^{3/2}},
\end{aligned}$$

une expression sous forme intégrale pour le potentiel est donnée par :

$$\begin{aligned}
V(\mathbf{x}) &= \frac{2zV_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\left[3\int_0^a - \int_a^b\right] r'dr'\frac{1}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{2zV_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\left[3\int_0^a - \int_a^b\right] r'dr'\frac{1}{\left(r^2+r'^2-2rr'\cos(\phi-\phi')+z^2\right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

où $r' = \sqrt{x'^2+y'^2}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

iii) En utilisant le résultat (ii), à une grande distance $z \gg b$ nous avons :

$$\begin{aligned}
V(r^2+z^2 \gg b^2) &\approx \frac{2zV_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\phi\left[3\int_0^a - \int_a^b\right] r'dr'\frac{1}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} \\
&= \frac{2zV_0}{4\pi}\frac{1}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}2\pi\left[\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}(b^2-a^2)\right] \\
&= \frac{zV_0(4a^2-b^2)}{2\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}
\end{aligned}$$

iv) Le resultat (iii) montre que le terme dominant à une grande distance est un dipôle. Le terme de dipôle est absent si $b = 2a$. En général, dans ce genre de problèmes, la condition pour avoir un terme de dipôle $\neq 0$ est que :

$$\int_S d\sigma' V(x') \neq 0\,.$$