Exercice 1 *Transformations de Lorentz*
Un dipôle électrique $\mathbf{d}$ se déplace avec une vitesse $\mathbf{v}$. Trouver le potentiel $\mathbf{A}$ dans le réferentiel du laboratoire et montrer que à l'ordre lineaire en $\beta = |\hat{v}|/c$ il est generé par un dipôle magnétique.

Exercice 2 *Multipoles. Dipole magnétique dû à charges en mouvement*
On considère une distribution de charges q_i ayant masse m_i et vitesse $\mathbf{v}_i$.

- **i)** Trouver une expression pour le moment de dipôle magnétique total.
- **ii)** Pouvez-vouz deduire une proprieté générale du cas ou les partucules sont du même type, i.e. m_i/q_i =const ?

Exercice 3 *Ondes électromagnetiques*
a) Considerer deux dipôles oscillants séparés par une distance $L \gtrsim \lambda$ (cela signifie que L n'est pas $\ll \lambda$). Quel type de rayonnement donnent-ils ? Est-il un rayonnement de dipòle ? Justifier votre réponse.
b) On considère deux dipôles oscillants:

$$\begin{aligned} d_A &= Re[d_0\hat{x}e^{i\omega t}] \quad \text{placé à } (0,0,0) \\ d_B &= Re[d_0\hat{y}e^{i\omega t}] \quad \text{placé à } (0,0,\lambda/4) \end{aligned}$$

Calculer l'intensité et la polarisation du rayonnement à une grande distance $\mathbf{R} = R\mathbf{n}$, avec:

- **i)** $\mathbf{n} = \hat{x}$
- **ii)** $\mathbf{n} = \hat{y}$
- **ii)** $\mathbf{n} = \hat{z}$

Exercice 4 *Milieu macroscopique*
Soit une charge ponctuelle Q placée à l'origine, entourée du vide. Une couche conductrice sphérique se trouve entre la distance R_0 et $R_1 > R_0$. Une couche diélectrique de permittivité ϵ se trouve entre la distance $R_2 > R_1$ et $R_3 > R_2$. Calculer l'induction électrique $\mathbf{D}$, le champ électrique $\mathbf{E}$ et la polarisation $\mathbf{P}$ en chaque point de l'espace. Trouver les densités de charge libre ρ et microscopique $< \eta >$.

Exercice 5 *Probléme de l'électrostatique*

On considère la région $\{z \geq 0\}$. Le potentiel est nulle dans la région $\{z = 0, \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > a\}$, pendant que $V = V_0 \neq 0$ pour $\{z = 0, \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq a\}$.

i) Avez-vous besoin de la fonction de Green de Neumann ou Dirichlet? En utilisant une bonne fonction de Green pour ce probléme, trouver une expression sous forme intégrale pour le potentiel.

ii) En utilisant le resultat (i), trouver le potentiel sur l'axe z ($\rho = 0$). Quelle est la forme du potentiel à une grande distance $z \gg a$? (montrer que $V \propto a^2/z^2$)

iii) Le resultat (ii) signifie que le terme dominante à une grande distance est un dipole. Montrer que, en toute generalité, le terme de monopole est absent dans le cas où $V \neq 0$ seulement dans une région limitée du plan. Pouvez-vous dire aussi quel est la condition pour avoir un dipôle $\neq 0$?

SIMULATION EXAMEN ELECTRODYNAMIQUE

18/6/2013

1 Transformations de Lorentz

dipôle électrique :

$$\begin{cases} \phi(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} \\ \vec{A} = 0 \end{cases}$$

(référentiel de repos)

Transformée de Lorentz ($\vec{v} = v\hat{z}$) :

$$\begin{cases} A'_x = A'_y = 0 \\ A'_z = +\dfrac{\gamma\beta\phi}{c} \end{cases}$$

En plus : $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = \gamma(z' - \beta c t') \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{A'_z(\vec{r}') = +\frac{\gamma\beta\left(p_x \cdot x' + p_y \cdot y' + p_z \cdot \gamma(z' - \beta c t')\right)}{4\pi\varepsilon_0 c\left((x')^2 + (y')^2 + \gamma^2(z' - \beta c t')^2\right)^{3/2}}}$$

2

Ordre linéaire in β : (si vt n'est pas grand)

$$A'_z(\vec{r}\,') \simeq + \frac{\gamma\beta\,(p_x x' + p_y y' + p_z z')}{4\pi\varepsilon_0 c((x')^2+(y')^2+(z')^2)}$$

Équivalent à :

$$\vec{A}(\vec{r}\,') = + \frac{\vec{\beta}\,(\vec{p}\cdot\vec{x}\,')}{4\pi\varepsilon_0 c|\vec{x}\,'|^3}$$

On peut utiliser :

$$\vec{\beta}\,(\vec{p}\cdot\vec{x}\,') = (\vec{\beta}\cdot\vec{x}\,')\vec{p} + \vec{x}\,'\wedge(\vec{\beta}\wedge\vec{p})$$

Et on peut écrire :

$$\boxed{\vec{A} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 c}\left[-\frac{\vec{\beta}(\vec{p}\cdot\vec{x}\,')+\vec{p}(\vec{\beta}\cdot\vec{x}\,')}{|x'|^3} + \frac{(\vec{\beta}\wedge\vec{p})\wedge\vec{x}\,'}{|x'|^3}\right]}$$

(symm. in $\vec{\beta}$ et $\vec{p}$)

(antisymm. in $\vec{\beta}$ et $\vec{p}$)

En regardant le dernière terme on déduit :

$$\boxed{\vec{m} = -\frac{1}{2}c\vec{\beta}\wedge\vec{p}}$$

NB : On pouvait aussi dire que :

$$\vec{m} \overset{(\text{déf})}{=} \frac{1}{2}\sum_i q_i \vec{r}_i\wedge\vec{v}_i = \boxed{\frac{1}{2}\vec{p}\wedge\vec{v}}$$

2 Dipôle magnétique dû à charges en mouvement

Densité de courante :

$$\vec{J}(\vec{r}\,') = \sum_i q_i \vec{v}_i \, \delta(\vec{r}\,' - \vec{r}_i)$$

i) Moment de dipôle total :

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int d^3r' \; \vec{r}\,' \wedge \vec{J}(\vec{r}\,')$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\sum_i q_i \, \vec{r}_i \wedge \vec{v}_i}$$

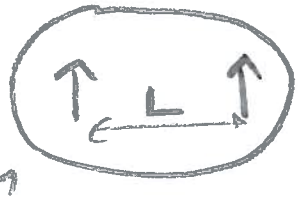
ii) Si $m_i/q_i = \frac{m}{q} = \text{const}$

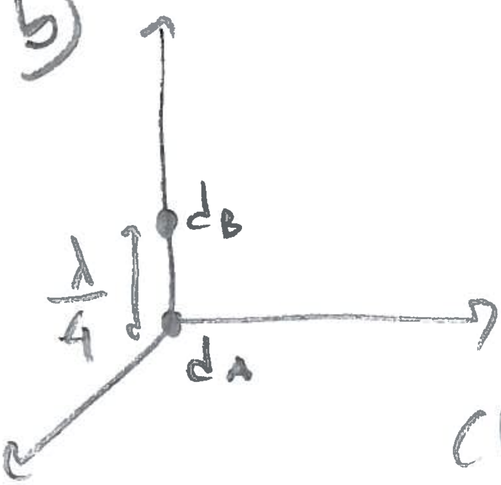
On obtient :

$$\boxed{\vec{m} = \frac{q}{2m} \, \vec{L}}$$

où $\vec{L}$ = moment cinétique (angular momentum)

3 Ondes électromagnetiques

a) Si on considère l'object 
il n'y a pas d'expansion
en multipôles utile, parce que
L n'est pas $\ll \lambda$.
Mais on peut considérer séparément
les deux dipôles oscillants.
En appliquant le principe de
superposition, on deduit que il
s'agit de la superposition de
<u>deux</u> champs de dipôle.

b) 

$$\left.\begin{aligned} d_A &= Re(d_0 \hat{x} e^{i\omega t}) \\ d_B &= Re(d_0 \hat{y} e^{i\omega t}) \end{aligned}\right\}$$

Champ de dipôle (rayonnement)

$$\vec{B}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{\ddot{\vec{d}} \wedge \hat{n}}{r} = \frac{\omega^2 d_0}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \frac{Re\left[e^{i(\omega t - |\vec{k}||\vec{r}|)}\right] \hat{n} \wedge}{r}$$

$$= \boxed{\frac{k^2 d_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\hat{n} \wedge \vec{d}}{r} Re\left[e^{i(\omega t - |\vec{k}||\vec{r}|)}\right]}$$

Polarisation et intensité à une grande distance $\vec{r} = R\hat{n}$:

i) $\hat{n} = \hat{x}$:

$$\vec{B}_A \propto \hat{n} \wedge \hat{d} = \hat{x} \wedge \hat{x} = 0$$

$$\vec{B}_B = \frac{K^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d_0 \hat{z}}{R} \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} R)$$

$\Longrightarrow$ Polarization linéaire ($\vec{z}$)

Intensité :

$$\langle |\vec{S}| \rangle = \varepsilon_0 c^2 \langle |\vec{E} \wedge \vec{B}| \rangle$$

$$(\vec{E} = c\vec{B} \wedge \vec{n}) \longrightarrow \quad = \varepsilon_0 c^3 \langle |(\vec{B} \wedge \hat{n}) \wedge \vec{B}| \rangle$$

$$= \varepsilon_0 c^3 \langle |\vec{B}|^2 \rangle = \boxed{\frac{\varepsilon_0 c^3}{2} \cdot \frac{K^4 d_0^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 R^2}}$$

ii) $\hat{n} = \hat{y}$:

$$\vec{B}_A = \frac{K^2 d_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(-\hat{z})}{R} \cos(\omega t - \frac{\omega}{c} R)$$

$$\vec{B}_B = 0$$

$\rightarrow$ Polarisation linéaire ($\vec{z}$)

Intensité comme (i)

iii) $\hat{n} = \hat{z}$

$$\vec{B} = \frac{K^2 d_0}{4\pi\varepsilon_0} \mathrm{Re}\Big[\frac{\overset{\hat{z}\wedge\hat{x}}{\downarrow}}{\hat{y}}{R} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c}R)} - \frac{\overset{\hat{z}\wedge\hat{y}}{\downarrow}}{\hat{x}}{R} e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c}(R-$$

OBS | On peut negliger $\frac{\lambda}{4} \ll R$ au dénominateurs, mais pas dans les exponentielles !

$\left(\frac{\omega}{c}\frac{\lambda}{4} = K \cdot \frac{2\pi}{K} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}\right.$

$$\vec{B} = \frac{K^2 d_0}{4\pi\varepsilon_0} \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i(\omega t - \frac{\omega}{c}R)}}{R} \times \left(\hat{y} - \hat{x} e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\right]$$

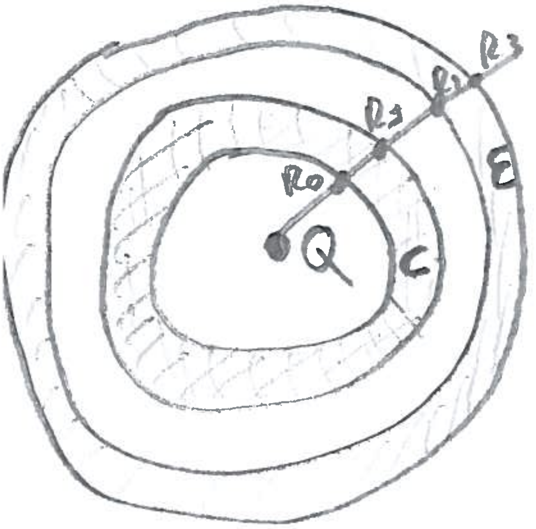
$$= \frac{K^2 d_0}{4\pi\varepsilon_0} \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i(\omega t - KR)}}{R} (\hat{y} - i\hat{x})\right]$$

polarisation circulaire

Intensité : (n.b.: $|\hat{y} - i\hat{x}| = \sqrt{2}$)

$$\boxed{\langle|\vec{S}|\rangle = \frac{\varepsilon_0 c^3}{2} \times \frac{2 K^4 d_0^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 R^2}}$$

$\boxed{4}$ Milieu macroscopique



(Voir aussi corrigé 13)

$$\vec{D}(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{e}_r & r < R_0 \\ 0 & R_0 < r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{e}_r & r > R_1 \end{cases}$$

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r & r < R_0 \\ 0 & R_0 < r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{e}_r & R_2 < r < R_3 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r & r > R_3 \end{cases}$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\dfrac{Q}{4\pi r^2}\hat{e}_r & R_2 < r < R_3 \\ 0 & \text{autre part} \end{cases}$$

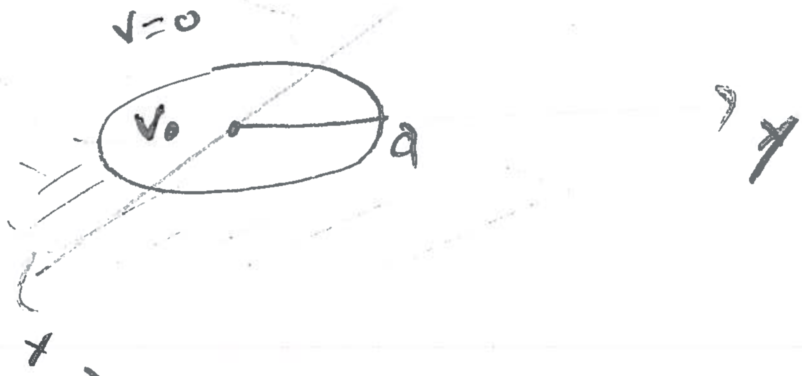
$$\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \boxed{Q\,\delta(\vec{r}) + \frac{Q}{4\pi r^2}\left[\delta(r-R_1) - \delta(r-R_0)\right.}$$

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} =$$

$$= -\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}\left(r^2 \cdot \frac{Q}{4\pi r^2}\, \theta(r-R_1) - \theta(r-R\right.$$

$$= \boxed{\frac{Q}{4\pi r^2}\left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\left[\delta(r-R_3) - \delta(r-R_2)\right]}$$

5 Probléme de l'électrostatique



i) Potentiel électrostatique avec fonctiones de Green :

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \varrho(x')\,G(x,x') + \int_S da'\left[G(x,x')\frac{\partial\phi}{\partial n'} - \phi(x')\frac{\partial G}{\partial n'}\right]$$

En ce cas, on doit utiliser la fonction de Green de Dirichelet : $\boxed{G|_S = 0}$

$$\rightarrow \boxed{\phi(\vec{x}) = -\int_S da'\,\phi(x')\,\frac{\partial G}{\partial n'}(x,x')}$$

Une bonne fonction de Green peut être trouvée en utilisant une charge-image :

$$G(\vec{x},\vec{x}') = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x}-R(\vec{x}')|}\right)$$

Où : $\vec{x}' = (x', y', z')$

$R(\vec{x}') = (x', y', -z')$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n'}\right|_S = -\left.\frac{\partial G}{\partial z'}\right|_S = \left(\frac{+(z'-z)}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} - \frac{(z'+z)}{|\vec{x}-R(\vec{x}')|^3}\right)\frac{1}{4\pi}$$

$$(z'\to 0) = \boxed{-\frac{2z}{4\pi\left((x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right)^{3/2}}}$$

Le potentiel est donc :

$$V(x,y,z) = \frac{2zV_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a \varrho' d\varrho' \frac{1}{[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2]^{3/2}}$$

$$= \boxed{\frac{2zV_0}{4\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a \varrho' d\varrho' \frac{1}{[\varrho^2+\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos(\varphi-\varphi')+z^2]^{3/2}}}$$

ii) Sur l'axe z $(\rho = 0)$

$$V(\rho=0, z) = \frac{z\,2V_0}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot \int_0^a \rho' d\rho' \frac{1}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= z V_0 \left[\frac{-1}{\sqrt{\rho'^2 + z^2}} \right]_0^a = \boxed{V_0 \left[1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right]}$$

À une grande distance $z \gg a$:

$$V(\rho^2 + z^2 \gg a^2) \approx \frac{z V_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^a \rho' d\rho' \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{z V_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \cdot 2\pi \frac{a^2}{2}$$

$$= \boxed{\frac{z V_0 a^2}{2(\rho^2 + z^2)^{3/2}}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

avec dipôle $\boxed{\vec{p} = 2\pi\varepsilon_0 V_0 a^2 \hat{z}}$

iii) On peut faire une expansion en multipoles. Plus en detail:

$$\phi(\vec{x}) = -\int_S da'\, \phi(x') \frac{\partial}{\partial n'} \left[\frac{1}{|x-\vec{x}'|} - \frac{1}{|\vec{x}-R(\vec{x}')|} \right]$$

$$= \boxed{\frac{2z}{4\pi} \int_S da'\, \phi(x') \frac{1}{\left[(x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right]^{3/2}}}$$

Si $V \neq 0$ dans une region limitée, alors:

$$\phi(\vec{x}) < \frac{2z}{4\pi |\vec{x}|^{3/2}} \times \max(V)\Big|_S \times |S|$$

$\Rightarrow$ dipôle, il n'y a pas de monopole

En écrivant :

$$\frac{1}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{|\vec{x}|^{3/2}} + \underbrace{\vec{x}'\cdot\frac{\partial}{\partial \vec{x}'}(\dots) + \dots}_{\text{multipoles}}$$

on deduit :

$$\boxed{\vec{p} = 2\varepsilon_0 \hat{z} \times \int_S da'\, \phi(x')}$$

$\left[\neq 0 \text{ si } \int_S da'\, \phi(x') \neq 0\right]$