Mécanique Analytique , Corrigé 6

Assistants : jaap.kroes@epfl.ch & benjamin.audren@epfl.ch

Exercice 1 : Problème de la chaînette

Cet exercice est résolu dans le cours aux pages 41 et 42 en raisonnant sur la conservation de l'équivalent de la fonction hamiltonienne. Nous allons maintenant le résoudre en faisant apparaître une variable cyclique.

Ce problème est typique d'un problème avec contrainte intégrale. Il faut minimiser l'énergie potentielle avec une contrainte sur la longueur de la chaînette.

$$E_{\text{pot}} = \int ds\ \rho g y - \lambda \left(\int ds - L \right) = \int dy \sqrt{1 + x'^2} (\rho g y - \lambda) + \lambda L \equiv \int dy\ F$$

Appliquons l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dy} \frac{\partial F}{\partial x'} = \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{(\rho g y - \lambda) x'}{\sqrt{1 + x'^2}} = \text{const} = a$$

En prenant le carré et en isolant les termes on trouve

$$x' = \sqrt{\frac{a^2}{(\rho g y - \lambda)^2 - a^2}} \qquad \rightarrow \qquad x(y) = \int dy \sqrt{\frac{a^2}{(\rho g y - \lambda)^2 - a^2}} + c$$

Changeons de variables : $\rho g y - \lambda = a \cosh \theta$ donne

$$x(\theta) = \frac{a\theta}{\rho g} + c$$

On trouve donc

$$y(x) = \frac{a}{\rho g} \left[\cosh \left(\frac{\rho g}{a} x + c \right) + \lambda \right]$$

où les constantes a, c et λ sont à fixer à l'aide des conditions initiales et de la requête

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + y'^2} = L$$

Exercice 2 : Problème isopérimétrique dit "de la Reine de Carthage"

Très bientôt. La solution n'est pas aussi terrible qu'a priori, mais elle est astucieuse. Attendez un update autour de lundi.