Considérer le modèle classique d'un laser. L'amplitude complexe du champ électrique obéit l'équation de Langevin

$$\frac{\partial}{\partial t}E = (a-c)E - b|E|^2E + f(t) = h(E) + f(t) \tag{1}$$

où a est le coéfficient de pompage, b est le coéfficient d'amortissement et c est le coéfficient d'interaction. $h(E)$ represente donc la partie déterministe du modèle, tandis que $f(t)$ est un bruit blanc complexe avec corrélations

$$\langle f(t_1)f^*(t_2)\rangle = D\delta(t_1-t_2)$$

et

$$\langle f(t_1)f(t_2)\rangle = 0.$$

(i) Chercher la solution stationnaire I_0 pour l'intensité $I = |E|^2$ en fonction des paramètres.

Suivant la méthode vue au cours, le système obéit à l'equation de Fokker-Planck pour la probabilité $P(E, E^*, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}P = -\frac{\partial}{\partial E}[h(E)P] - \frac{\partial}{\partial E^*}[h^*(E)P] + D\frac{\partial^2}{\partial E\partial E^*}P. \tag{2}$$

Solution

Pour trouver la solution stationnaire, on peut moyenner l'équation (1) et sa complexe conjuguée. En cette manière, seulement la partie déterministe survit, et on obtient pour l'intensité

$$\frac{\partial}{\partial t}I(t) = 2[(a-c) - bI(t)]I(t).$$

Les solutions stationnaires sont $I_0 = 0$ et $I_0 = (a-c)/b$. Tandis que pour $a < c$, seulememnt la solution nulle est physique, pour $a > c$, c'est à dire dans le régime d'inversion de population, une solution positive finie est aussi possible. Or, a cause du bruit stochastique, le système dans ce régime "choit" cette solution finie, comme on verra, et devient un laser.

Puisque le champ E est une variable complexe, et ses parties réelle et immaginaire sont variables indépendantes, la probabilité d'avoir un champ E au temps t est égale a $P(\Re[E], \Im[E], t) = P(E, E^*, t)$, c'est à dire qu'on peut choisir comme variables indépendantes E et E^*, au lieu de $\Re[E]$, $\Im[E]$. Les equation dynamiques pour E et E^* sont équations de Langevin. On a vue dans le cours que un système d'equations de Langevin pour les variables $\{x_i\}$, est associé à une équation de Fokker-Planck pour la probabilité conjointe des variables $P(\{x_i\}, t)$. Dans ce cas l'equation de Fokker-Planck correspondante est

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} P(E, E^*, t) &= -\frac{\partial}{\partial E}[a_E P] - \frac{\partial}{\partial E^*}[a_{E^*} P] \\ &+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial E^2}[b_E P] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial (E^*)^2}[b_{E^*} P] + \frac{\partial^2}{\partial E \partial E^*}[b_{EE^*} P]. \end{aligned}$$

Les composantes des vecteurs de dérive et de la matrice de diffusion sont données par

$$\begin{aligned} \langle (E(\tau) - E_0) \rangle_f &= \int_0^\tau ds \langle h(E) + f(s) \rangle_f \simeq h(E_0)\tau + O(\tau^\alpha) \\ &= a_E \tau + O(\tau^\alpha), \alpha > 1, \end{aligned}$$

et donc $a_E = h(E)$, et

$$\begin{aligned} \langle (E(\tau) - E_0)^2 \rangle_f &= \int_0^\tau ds \int_0^\tau dr \langle (h(E) + f(s))(h(E) + f(r)) \rangle_f \\ &\simeq h^2(E_0)\tau^2 = b_E \tau + O(\tau^\alpha), \alpha > 1, \end{aligned}$$

parce que $\langle f(t_1) f(t_2) \rangle = 0$, et donc $b_E = 0$. Similairement on trouve $a_{E^*} = h^*(E)$ et $b_{E^*} = 0$. Enfin

$$\begin{aligned} \langle (E(\tau) - E_0)(E(\tau) - E_0)^* \rangle_f &= \int_0^\tau ds \int_0^\tau dr \langle (h(E) + f(s))(h(E) + f(r))^* \rangle_f \\ &\simeq D\tau + O(\tau^\alpha) = b_{EE^*}\tau + O(\tau^\alpha), \alpha > 1, \qquad (3) \end{aligned}$$

et donc $b_{EE^*} = D$. On trouve donc l'équation (2).

(ii) Ecrire l'equation de Fokker-Planck pour les variables I, ϕ, où $E = E(I,\phi) = \sqrt{I}e^{i\phi}$.

Solution

Il faut simplement changer les variables de l'équation (2), à l'aide de la rélation

$$\frac{\partial}{\partial E} = \frac{\partial I}{\partial E}\frac{\partial}{\partial I} + \frac{\partial \phi}{\partial E}\frac{\partial}{\partial \phi} = E^*\frac{\partial}{\partial I} - \frac{i}{2E}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

et de sa complexe conjuguée. On trouve

$$\frac{\partial}{\partial t}P(I,\phi,t) = -2\frac{\partial}{\partial I}\{[(a-c)I - bI^2]P\} + D\frac{\partial}{\partial I}(I\frac{\partial}{\partial I}P) + \frac{D}{4I}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}P. \quad (4)$$

(iii) Etudier la distribution de l'intensité $\bar{P}(I,t) = \int_0^{2\pi} d\phi P(I,\phi,t)$ et sa solution stationnaire $\bar{P}_s(I)$.

Solution

En integrant sur ϕ l'équation (4), on obtient l'équation

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{P}(I,t) = \frac{\partial}{\partial I}\left\{-2[(a-c)I - bI^2]\bar{P} + DI\frac{\partial}{\partial I}\bar{P}\right\},$$

le dernier terme de (4) étant nul une fois integré, car, pour des raisons physiques, la probabilité $P(I,\phi,t)$ doit être périodique sur un période $(0,2\pi)$ et donc $\partial_\phi P(I,2\pi,t) = \partial_\phi P(I,0,t)$.

La condition de stationnairité impose que la quantité $\{...\}$ soit une constante indépendante de I. D'ailleurs, on doit satisfaire la limite $\lim_{I\to\infty} \bar{P}_s(I) = 0$, et donc on doit avoir

$$D\frac{\partial}{\partial I}\bar{P}_s = -2(a-c-bI)\bar{P}_s,$$

c'est à dire

$$\bar{P}_s(I) = Ce^{-\frac{2}{D}[(a-c)I-(b/2)I^2]} = C'e^{-\frac{2}{D}(I-I_0)^2}.$$

Donc la distribution stationnaire est une gaussienne centrée en I_0, qui est l'intensité d'émission plus probable, mais qui n'est pas l'intensité moyenne. En fait on voit que l'intensité moyenne est

$$\langle I \rangle = \int_0^{+\infty} dI I \bar{P}_s(I) = \int_{-I_0}^{+\infty} dx (I_0 + x) e^{-\frac{2}{D}x^2} = I_0 + \frac{D}{4}\bar{P}_s(0),$$

la correction étant de l'ordre de $De^{-(b/D)I_0^2}$ et donc petite si le bruit est faible.

(iv) Linéariser l'equation de Fokker-Planck autour de $I_0 = (a-c)/b$, en utilisant $I = I_0 + x$. Calculer l'écart quadratique moyen $\langle \phi^2(t) \rangle$. Dire comment la largeur spectrale d'un laser dépend de I_0.

Solution

La linéarization du premier terme de l'équation (4) donne

$$(a-c)I - bI^2 = (a-c-bI_0)I_0 + (a-c-2bI_0)x - bx^2 = -bI_0 x - bx^2 \simeq -bI_0 x,$$

tandis que dans les deux termes de diffusion on retient le facteur constant $I = I_0 + x \simeq I_0$ (on observe que cette linéarisation est valable seulement si $D/(4I_0) \ll I_0 b$). Donc on obtient

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,\phi,t) = 2bI_0 \frac{\partial}{\partial x}(xP) + DI_0 \frac{\partial}{\partial x^2}P + \frac{D}{4I_0}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}P,$$

qui admet la solution factorisée $P(x,\phi,t) = P_1(x,t)P_2(\phi,t)$, avec

$$\frac{\partial}{\partial t}P_1(x,t) = 2bI_0 \frac{\partial}{\partial x}(xP_1) + DI_0 \frac{\partial}{\partial x^2}P_1$$

et

$$\frac{\partial}{\partial t}P_2(\phi,t) = \frac{D}{4I_0}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}P_2.$$

L'équation pour $P_1(x,t)$ est une équation d'Ornstein-Uhlenbeck, du type

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = \gamma \frac{\partial}{\partial x}(xP) + \gamma^2 D' \frac{\partial}{\partial x^2}P,$$

qui, donnée la condition initiale x_0, conduit à la moyenne $\langle x(t)\rangle = x_0 e^{-\gamma(t-t_0)}$ et à la corrélation $\langle x(t_0)x(t)\rangle = \gamma D' e^{-\gamma(t-t_0)}$. Dans notre cas, avec $\gamma = 2bI_0$ et $D' = D/(4b^2 I_0)$, l'intensité moyenne relaxe à la valeur I_0 comme

$$\langle I(t) - I_0\rangle = \langle x(t)\rangle = x_0 e^{-2bI_0 t},$$

avec le temps de relaxation $\tau_I = [2(a-c)]^{-1}$, et les corrélations d'intensité décroissent exponentiellement dans le temps

$$\langle (I(t_1) - I_0)(I(t_2) - I_0)\rangle = \langle x(t_1)x(t_2)\rangle = \frac{D}{2b} e^{-2bI_0|t_2-t_1|}.$$

Par contre la phase accomplit une diffusion brownienne, avec fluctuation

$$\langle \phi^2(t)\rangle = \frac{D}{2I_0} t.$$

Le temps caractéristique est $\tau_\phi = 2I_0/D \gg \tau_I$, dans notre hypothèse de linéarisation. En fait, dans cette approximation, l'intensité du laser atteigne sa valeur stationnaire très vite par rapport au temps de diffusion de la phase. Cette diffusion de phase est associée à un enlargissement spectral $\sim Db/(a-c)$ qui diminue quand on augmente l'inversion de population.