Groupes et symétries discrets (automne 2007)

Corrigé 4: Représentations irréductibles des groupes abéliens.

Considérer un groupe fini abélien H d'ordre h.

(i) Montrer que toutes les représentations irréductibles $\Gamma^{(i)}$ ont dimension $l_i = 1$. De cette manière, une représentation irréductible $\Gamma^{(i)}$ associe à chaque élément x du groupe un nombre $\Gamma^{(i)}(x) = \alpha_x^{(i)} \in \mathbb{C}$. Pour un groupe fini, une représentation est toujours équivalente à une représentation unitaire. Pour les représentations irréductibles unitaires, quelles restrictions on a sur les $\alpha_x^{(i)}$?

Solution

Supposons par absurde qu'il y ait une représentation irréductible $\Gamma^{(i)}$ de dimension $l_i = d \neq 1$. Nous savons qu'il y a au moins un élément du groupe $y \in H$ qui est représenté par une matrice $\Gamma(y)$ non diagonale. D'autre part, le groupe H est abélien et donc on a la propriété:

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(xy) = \Gamma(yx) = \Gamma(y)\Gamma(x), \forall x \in H$$

et pour le Lemme de Schur, cela implique que $\Gamma(y) = \lambda \mathbf{1}$ en contradiction avec l'hypothèse. Considérons une représentation unitaire irréductible $\Gamma(x)$ ($x \in H$) dans l'espace vectoriel à une dimension $\mathbb{C}$. Donc on a $\Gamma(x)v = \alpha_x^{(i)} v, \forall v \in \mathbb{C}$. Une représentation unitaire doit conserver le produit scalaire entre vecteurs, c'est à dire

$$\langle \Gamma(x)v | \Gamma(x)v \rangle = \alpha_x^{(i)*} u \alpha_x^{(i)} v = |\alpha_x^{(i)}|^2 uv = \langle u | v \rangle,$$

$\forall u,\, v \in V$. Alors on a la condition $|\alpha_x^{(i)}|^2 = 1$: $\alpha_x^{(i)}$ doit appartenir au cercle unitaire dans le plan complexe, c'est à dire $\alpha_x^{(i)} = e^{i\phi_x^{(i)}}$.

(ii) Montrer que le nombre N_Γ de représentations irréductibles non-équivalentes est égal à h, l'ordre du groupe.

Solution

On peut utiliser le théorème de Burnside. Si N_Γ est le nombre de représentations irréductibles non-équivalentes et l_i est la dimension de la représentation irréductible $\Gamma^{(i)}$, on a

$$\sum_{i=1}^{N_\Gamma} l_i^2 = h.$$

Pour un groupe abélien on a vu au point (i) que $l_i = 1, \forall i$ et donc $N_\Gamma = h$.

(iii) Dériver toutes les représentations irréductibles des deux groupes abéliens d'ordre $h = 4$.

Solution

La table de multiplication du groupe abélien d'ordre 4 non-cyclique est donnée par

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Selon le point (i) toutes les représentations irréductibles de ce groupe doivent être de dimension 1 et, selon le point (ii), on a 4 représentations irréductibles non-équivalentes. Une de ces représentations est la représentation identique $\Gamma^{(1)}(x) = 1, \forall x$. De plus, on doit avoir $\Gamma^{(i)}(e) = 1$ pour chaque représentation et la table de multiplication impose $a^2 = b^2 = c^2 = e$, donc a, b, c peuvent être représentés seulement par ± 1. Si $\Gamma^{(2)}(a) = 1$, alors par la table de multiplication du groupe nous avons $\Gamma^{(2)}(b) = \Gamma^{(2)}(c) = -1$. Si $\Gamma^{(i)}(a) = -1$, alors on a deux représentations possibles, pour lesquelles $\Gamma^{(i)}(b) = \pm 1$ et simultanément $\Gamma^{(i)}(c) = \mp 1$. Les quatre représentations sont donc

	e	a	b	c
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	1	-1	-1
$\Gamma^{(3)}$	1	-1	1	-1
$\Gamma^{(4)}$	1	-1	-1	1

Pour le groupe d'ordre quatre cyclique, on a la table de multiplication

	e	a	a^2	a^3
e	e	a	a^2	a^3
a	a	a^2	a^3	e
a^2	a^2	a^3	e	a
a^3	a^3	e	a	a^2

et on a $a^4 = e$. Si on écrit $\Gamma^{(k)}(a) = A_k$ alors A_k doit être une des quatre racines $4^{\text{èmes}}$ de l'unité, $A_k = \omega^{k-1}$, $k = 1, ..., 4$, avec $\omega = e^{i\pi/2}$. Finalement on obtient les 4 représentations

	e	a	b	c
$\Gamma^{(1)}$	1	1	1	1
$\Gamma^{(2)}$	1	$e^{i(\pi/2)}$	$e^{i\pi}$	$e^{i(3\pi/2)}$
$\Gamma^{(3)}$	1	$e^{i\pi}$	$e^{i(2\pi)}$	$e^{i(3\pi)}$
$\Gamma^{(4)}$	1	$e^{i(3\pi/2)}$	$e^{i(3\pi)}$	$e^{i(9\pi/2)}$

(iv) Plus en général, dériver toutes les représentations irréductibles d'un groupe cyclique d'ordre h quelconque.

Solution

On peut généraliser le résultat du point (iii). Si $G_h = \{e, a, a^2, ..., a^{h-1}\}$ est un groupe cyclique d'ordre h, on doit avoir que $a^h = e$. Alors une représentation $\Gamma^{(k)}$ doit satisfaire $(\Gamma^{(k)}(a))^h = A_k^h = 1$, c'est à dire que A_k est une racine $h^{\text{ème}}$ de l'unité: $A_k = e^{i(2\pi)(k-1)/h}$, avec $k = 1, ..., h$.