

Mécanique Analytique , Corrigé 4

Assistants : jaap.kroes@epfl.ch & benjamin.audren@epfl.ch

Exercice 1 : Deux masses et un ressort

1. En notant x_1 la position de la particule de masse m_1 et x_2 celle de masse m_2 , le Lagrangien du système s'écrit

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(L - |x_2 - x_1|)^2$$

2. Le Lagrangien ne dépendant pas explicitement du temps, la fonction hamiltonienne $h(\{x_i\}, \{\dot{x}_i\}) = T + V$ est conservée et correspond à l'énergie mécanique du système. La seconde quantité conservée correspond à la symétrie de translation du système. En effet, le Lagrangien est invariant sous la transformation $x_i \rightarrow x_i(s) = x_i + s$ où s est une constante. La constante de Noether associée est

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i(s)}{\partial s} = m_1\dot{x}_1 + m_2\dot{x}_2 = p_1 + p_2$$

qui correspond à la conservation de la quantité de mouvement totale du système.

3. Il est clair que les positions d'équilibre seront les positions pour lesquelles les deux masses sont séparées de L . Voyons le explicitement. Pour trouver les positions d'équilibre du système, on doit annuler la première dérivée du potentiel.

$$\frac{\partial V}{\partial x_{1/2}}(x_1^*, x_2^*) = \pm k(L - |x_2^* - x_1^*|) \frac{x_1^* - x_2^*}{|x_2^* - x_1^*|} = 0$$

On constate bien que les positions d'équilibre se trouvent en $x_2^* - x_1^* = \pm L$. Choisissons de décrire les oscillations de la position d'équilibre caractérisée par $x_2^* - x_1^* = +L$. Dans ce cas, en notant $x_i = x_i^* + \delta_i$, le potentiel s'écrit

$$V(\delta_1, \delta_2) = \frac{1}{2}k(L - |x_2^* - x_1^* + \delta_2 - \delta_1|)^2 = \frac{1}{2}k(L - |L + \delta_2 - \delta_1|)^2 = \frac{1}{2}k(\delta_2 - \delta_1)^2$$

La dernière égalité n'est valable que si l'on fait l'hypothèse que les petites oscillations autour de la position d'équilibre sont petites par rapport à L . Le Lagrangien décrivant les petites oscillations autour de la position d'équilibre choisie s'écrit donc

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2}m_1\dot{\delta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\delta}_2^2 - \frac{1}{2}k(\delta_2 - \delta_1)^2 = \frac{1}{2}\dot{\delta}^T M \dot{\delta} - \frac{1}{2}\delta^T K \delta$$

4. Afin de trouver les modes d'oscillation, nous devons diagonaliser la matrice $M^{-1}K$. Les matrices de masse et d'interaction de ce système sont respectivement données par

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad K = k \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad M^{-1}K = \frac{k}{m_1 m_2} \begin{pmatrix} m_2 & -m_2 \\ -m_1 & m_1 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres et vecteurs propres correspondant sont donnés par

$$\omega_0^2 = 0 \quad \vec{A}_0 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \omega_\mu^2 = \frac{k}{\mu} \quad \vec{A}_\mu \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -m_1/m_2 \end{pmatrix}$$

où μ est la masse réduite définie par

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

La normalisation des vecteurs propres est fixée par la condition de M -orthogonalité : $(\vec{A}_i)^T M \vec{A}_i = 1$.
On obtient alors

$$\vec{A}_0 = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{A}_\mu = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} \sqrt{m_2/m_1} \\ -\sqrt{m_1/m_2} \end{pmatrix}$$

5. La matrice de changement de base Δ permettant l'expression de $\vec{\delta}$ en fonction des coordonnées normales selon $\vec{\delta} = \Delta \vec{Q}$ est donc donnée par

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{m_2/m_1} \\ 1 & -\sqrt{m_1/m_2} \end{pmatrix}$$

Le Lagrangien décrivant les petites oscillations s'écrit donc en fonction des coordonnées normales comme

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2} \left(\dot{Q}_1^2 + \dot{Q}_2^2 - \omega_\mu^2 Q_2^2 \right)$$

La conservation de la quantité de mouvement s'exprime dans ces coordonnées par le fait que Q_1 est une variable cyclique donc \dot{Q}_1 est conservé. En utilisant $\Delta^T M \vec{\delta} = \vec{Q}$ on a en effet $Q_1 \propto m_1 \delta_1 + m_2 \delta_2$ et l'on retrouve la conservation de la quantité de mouvement totale.

6. La description que l'on a faite n'est pas en mesure de décrire le croisement des masses m_1 et m_2 . Cette description est donc valide pour des oscillations ayant une amplitude assez faible pour que les masses ne se croisent pas.
7. Dans le cas $m_2 \gg m_1$, la situation est la même que si m_2 était fixée et l'on s'attend donc simplement à trouver un mouvement harmonique pour m_1 . En effet, la pulsation et les vecteurs propres ont les limites suivantes :

$$\omega_\mu^2 = \frac{k}{\mu} = \frac{k}{m_1} \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right) \xrightarrow{m_2 \gg m_1} \frac{k}{m_1} \quad \text{et} \quad \vec{A}_\mu \xrightarrow{m_2 \gg m_1} \frac{1}{\sqrt{m_1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Deux masses et trois ressorts

1. Le Lagrangien est donné par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - k(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) \quad (1)$$

2. Les équations d'Euler-Lagrange qui en découlent sont :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k(2x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 &= -k(2x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (2)$$

3. On cherche une solution harmonique de la forme :

$$\vec{x}(t) = \vec{A} e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \omega \in \mathbb{R} \quad (3)$$

En l'insérant dans les équations du mouvement on obtient :

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - 2k & k \\ k & m\omega^2 - 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (4)$$

Pour que ce système ait des solutions non nulles il faut que le déterminant soit nul (sinon l'on pourrait inverser la matrice et donc obtenir $\vec{A} = 0$), soit :

$$(m\omega^2 - 2k)^2 - k^2 = 0 \quad (5)$$

Les fréquences propres sont donc données par :

$$\begin{aligned}\omega_- &= \sqrt{3k/m} \\ \omega_+ &= \sqrt{k/m}\end{aligned}\quad (6)$$

avec les vecteurs propres associés :

$$\vec{A}_+ \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{A}_- \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\quad (7)$$

Leur normalisation est imposée par $\vec{A}_i^T M \vec{A}_i = 1$ où M est la matrice de masse. On trouve alors qu'il faut multiplier les vecteurs par $1/\sqrt{2m}$. Le fait que les deux vecteurs aient la même normalisation se comprend aisément puisque M est proportionnelle à l'identité.

4. La matrice de transformation est donc donnée par :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\quad (8)$$

Cela nous conduit finalement aux coordonnées normales :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_+ \\ Q_- \end{pmatrix}\quad (9)$$

Le Lagrangien dans les nouvelles coordonnées a bien la forme attendue :

$$L = \frac{1}{2}(\dot{Q}_+^2 + \dot{Q}_-^2 - \omega_+^2 Q_+^2 - \omega_-^2 Q_-^2)\quad (10)$$

5. On a

$$\begin{aligned}Q_+(0) &= (x_1(0) + x_2(0))\sqrt{m/2} = a\sqrt{m/2}, \\ Q_-(0) &= a\sqrt{m/2} \text{ et} \\ \dot{Q}_+(0) &= \dot{Q}_-(0) = 0.\end{aligned}$$

La trajectoire pour les variables Q est donc :

$$\begin{aligned}Q_+(t) &= a\sqrt{m/2} \cos(\omega_+ t) \\ Q_-(t) &= a\sqrt{m/2} \cos(\omega_- t)\end{aligned}$$

Soit pour les variables x :

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{a}{2}[\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)] \\ x_2(t) &= \frac{a}{2}[\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)]\end{aligned}$$

6. Le système est quadratique, aucune approximation n'a été faite. La solution est donc valable dans le rayon de validité de la description (collision entre les masses, avec le mur).

Exercice 3 : Trois masses et deux ressorts

1. Les coordonnées généralisées sont les positions des trois masses sur l'axe x : respectivement x_1 , x_2 et x_3 . Le Lagrangien est donné par :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k(L_1 - |x_1 - x_2|)^2 - \frac{1}{2}k(L_2 - |x_2 - x_3|)^2\quad (11)$$

2. Le Lagrangien ne dépendant pas explicitement du temps, la fonction hamiltonienne $h = T + V$ correspondant à l'énergie mécanique est conservée. La seconde quantité conservée est la conséquence de l'invariance sous translation du système. Le Lagrangien est en effet invariant sous la transformation $x_i \rightarrow x_i(s) = x_i + s$ où s est une constante. La quantité conservée correspondante est donnée par

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_i} \frac{\partial x_i(s)}{\partial s} = m_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_3) + m_2 \dot{x}_2 = \sum_{i=1}^3 p_i \quad (12)$$

qui n'est autre que la quantité de mouvement totale du système.

3. Afin de trouver les positions d'équilibres nous devons minimiser le potentiel par rapport aux trois positions :

$$\frac{\partial V}{\partial x_i}(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

La solution de ce système est bien entendu donnée par $x_1^* - x_2^* = \pm L_1$ et $x_2^* - x_3^* = \pm L_2$. Choisissons maintenant δ_i comme étant la déviation de l'équilibre de la masse i : $x_i = x_i^* + \delta_i$. Dans l'approximation de petits déplacements ($|\delta_1 - \delta_2|/L_1 \ll 1$ et $|\delta_2 - \delta_3|/L_2 \ll 1$), on peut développer le potentiel au deuxième ordre dans les δ_i et l'on trouve aisément :

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2} m_1 (\dot{\delta}_1^2 + \dot{\delta}_3^2) + \frac{1}{2} m_2 \dot{\delta}_2^2 - \frac{1}{2} k (\delta_1 - \delta_2)^2 - \frac{1}{2} k (\delta_2 - \delta_3)^2 = \frac{1}{2} \dot{\delta}^T M \dot{\delta} - \frac{1}{2} \delta^T K \delta \quad (14)$$

4. Afin de trouver les modes d'oscillation, nous devons diagonaliser la matrice $M^{-1}K$:

$$M^{-1}K = k \begin{pmatrix} 1/m_1 & -1/m_1 & 0 \\ -1/m_2 & 2/m_2 & -1/m_2 \\ 0 & -1/m_1 & 1/m_1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

dont le polynome caractéristique est $[\lambda(k/m_1 - \lambda)(\lambda - k/m_1 - 2k/m_2)]$ et les valeurs propres sont donc $\omega_1^2 = 0$, $\omega_2^2 = k/m_1$ et $\omega_3^2 = k/\mu$ où $\mu = m_1 m_2 / (2m_1 + m_2)$. Les vecteurs propres associés sont donnés par

$$\vec{A}_1 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{A}_2 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{A}_3 \propto \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_1/m_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Leur normalisation est imposée par la relation $\vec{A}_i^T M \vec{A}_i = 1$. On trouve alors :

$$\vec{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2m_1 + m_2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{A}_2 = \frac{1}{\sqrt{2m_1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{A}_3 = \frac{1}{\sqrt{2m_1(1 + 2m_1/m_2)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_1/m_2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (17)$$

5. Afin de réécrire le Lagrangien en termes de coordonnées normales, nous devons faire le changement de variable suivant : $\delta = \Delta Q$ où Δ est la matrice de changement de base dont les colonnes sont \vec{A}_1 , \vec{A}_2 et \vec{A}_3 . On trouve alors

$$\mathcal{L}_{\text{osc}} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^3 \dot{Q}_i^2 - \omega_2^2 Q_2^2 - \omega_3^2 Q_3^2 \right) \quad (18)$$

La conservation de la quantité de mouvement est maintenant traduite par le fait que Q_1 est cyclique et donc que \dot{Q}_1 est conservée. En effet, comme $\Delta^T M \delta = Q$ on trouve $\dot{Q}_1 \propto m_1(\dot{\delta}_1 + \dot{\delta}_3) + m_2 \dot{\delta}_2$.

6. Comme auparavant, la description que nous avons faite se limite aux cas où les masses ne se croisent pas.
7. La situation où $m_2 \gg m_1$ correspond à fixer la masse m_2 . Seule ω_3 est affectée :

$$\omega_2^3 = \frac{k}{\mu} \xrightarrow{m_2 \gg m_1} \frac{k}{m_1} \quad \vec{A}_3 = \frac{1}{\sqrt{2m_1(1 + 2m_1/m_2)}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2m_1/m_2 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{m_2 \gg m_1} \frac{1}{\sqrt{2m_1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

On retrouve donc bien le mode optique (\vec{A}_2) et le mode acoustique (\vec{A}_3), comme on pouvait s'y attendre!

Exercice 4 : Une infinité de masses !

1. Sans préciser l'ensemble de définition du système pour le moment, on peut tout de même écrire son énergie cinétique de façon formelle :

$$\mathcal{T} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \quad (20)$$

la somme portant sur la totalité des masses du système.

Pour l'énergie potentielle, il faut faire attention de ne pas compter les choses deux fois. La façon la plus simple de procéder est donc de n'écrire l'énergie d'un ressort pour chaque masse, et de sommer tout ça. Pour l'instant, ne nous préoccupons pas trop de ce qui se passe aux bords. Le Lagrangien du système est donc

$$\mathcal{L} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 - \sum_i \frac{1}{2} k (L - (x_{i+1} - x_i))^2 \quad (21)$$

2. En sélectionnant une masse l particulière, on voit qu'il y aura deux termes parmi la somme d'énergies potentielles qui vont contenir x_l . L'équation d'Euler-Lagrange pour cette masse est donc :

$$m\ddot{x}_l = k(x_{l+1} + x_{l-1} - 2x_l) \quad (22)$$

3. Intuitivement, les points d'équilibre du système sont donnés par les masses toutes séparées de la longueur au repos des ressorts. Puisque, par hypothèse, $x_k > x_{k-1}$, on peut calculer la dérivée première du potentiel pour la masse l .

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x_l}(x_i^*) = k(x_{l+1}^* + x_{l-1}^* - 2x_l^*) = 0 \quad (23)$$

Clairement, la distance entre x_{l-1}^* et x_l^* doit être la même qu'entre x_l^* et x_{l+1}^* . On peut donc paramétrer les positions d'équilibre par $x_l = x_l^* + \delta_l = (lL) + \delta_l$, où l est juste une étiquette pour cataloguer la masse, et où l'on a arbitrairement (mais sans perte de généralité) fixé la position de la masse 1 à 0.

Afin de résoudre l'équation (21), on propose l'ansatz harmonique suivant :

$$\delta_l = \Delta e^{i\omega t} e^{iqx_l^*} \quad (24)$$

où Δ est une constante qui correspond à l'amplitude de l'onde. La forme particulière de cet ansatz ne se justifie vraiment qu'en ayant un peu plus de recul sur la question. Essayons toutefois d'obtenir une image plus précise.

On s'intéresse à des solutions de cette forme car elles sont stationnaires (*i.e.* stable dans le temps). C'est-à-dire que si l'on positionne le système dans cet état, il va osciller toujours de cette façon, et sans contrainte extérieure, restera dans cet état.

Dans les exercices précédent, le problème est le même. On a trouvé les modes propres d'oscillations, qui sont des solutions stables du système. Pour le cas des deux masses m_1 autour d'une masse m_2 , on comprend que si les deux masses extérieures sont écartées symétriquement, elles vont osciller indéfiniment autour de ces positions, sans faire bouger la masse du milieu.

Ici, si l'on écarte d'un petit déplacement δ , de façon alternée une masse vers la gauche, une masse vers la droite, on peut voir que les masses vont continuer à osciller comme ça sans jamais modifier la position globale du système. Sans perturbations extérieures, la chaîne de ressorts infinie pourrait rester dans cet état.

On verra au point 5 précisément quelle est la condition sur le nombre d'onde pour que ces oscillations décrites par l'ansatz (24) soient des modes propres du système.

4. Si l'on se rappelle la définition du sinus en terme d'exponentielles : $2i \sin(x) = (\exp(ix) - \exp(-ix))$, il reste seulement à substituer l'ansatz (24) dans l'équation du mouvement. On obtient alors :

$$-m\omega^2 = k(e^{iqL} + e^{-iqL} - 2) \quad (25)$$

$$\omega = \pm 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\frac{qL}{2}\right) \quad (26)$$

Cette relation entre fréquence temporelle ω et nombre d'onde q est appelée relation de dispersion.

5. Pour un système périodique fini (N masses), où $\delta_{N+1} = \delta_1$, notre ansatz impose :

$$\Delta e^{i\omega t} e^{iq(N+1)L} = \Delta e^{i\omega t} e^{iqL}$$

Ce qui implique la relation suivante :

$$e^{iqNL} = 1, \text{ donc : } qNL = n2\pi \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (27)$$

On voit que tous les nombres d'ondes ne sont pas acceptables. Seuls certains modes sont solutions de cet équation, autrement dit seuls certains modes peuvent se propager dans cette chaîne. Cet effet diminue avec l'augmentation de N , puisque la différence entre chaque mode admissible est de plus en plus petite, jusqu'à donner l'impression de continuité que l'on a à notre échelle. En effet, cette description d'une chaîne infinie de ressorts est une bonne approximation d'un matériau métallique cristallin, où tous les atomes sont éloignés d'une distance constante au repos. Les ondes pouvant se propager à l'intérieur sont ce que l'on vient de calculer.

On note que pour $n = N/2$, $q = 2\pi/L$. Il y a donc un déphasage de π entre chaque masse, ce qui correspond au mouvement décrit dans le point 3.

6. Cette description est évidemment limitée, puisqu'aucune masse ne peut changer de position avec sa voisine. D'autre part, N doit être très grand pour pouvoir négliger complètement les effets de bord. Ceci est une étape souvent utile en physique. Sans les effets de bords, la description est simple (physique du solide, élasticité, etc.) et les intuitions sont justes. Avec (regardez des phénomènes liés aux nanomatériaux par exemple), l'intuition disparaît parce que tous les effets que l'on avait cachés sous le tapis deviennent importants.