
Mécanique Analytique , Corrigé 3

Assistants : jaap.kroes@epfl.ch & benjamin.audren@epfl.ch

Exercice 1 : Machine d'Atwood, #2

- Les fils ayant une longueur fixée, il y a deux contraintes holonômes :

$$z_1 + z_2 = l_1 = \text{constante}, \quad z_3 + z_4 - 2z_2 = l_2 = \text{constante}. \quad (1)$$

- Le système a deux degrés de liberté : on choisit z_1 et z_3 comme coordonnées. Le Lagrangien en absence de liaisons est alors :

$$L = \sum_{i=1}^4 \frac{m_i}{2} \dot{z}_i^2 + \sum_{i=1}^4 m_i g z_i \quad (2)$$

Les contraintes impliquent $\dot{z}_2 = -\dot{z}_1$ et $\dot{z}_4 = -\dot{z}_3 + 2\dot{z}_2 = -\dot{z}_3 - 2\dot{z}_1$ et le Lagrangien qui tient compte des liaisons s'écrit :

$$L(z_1, \dot{z}_1, z_3, \dot{z}_3) = \frac{m_1+m_2}{2} \dot{z}_1^2 + \frac{m_3}{2} \dot{z}_3^2 + \frac{m_4}{2} (\dot{z}_3 + 2\dot{z}_1)^2 + m_1 g z_1 + m_2 g (l_1 - z_1) + m_3 g z_3 + m_4 g (l_2 + 2l_1 - z_3 - 2z_1). \quad (3)$$

- Equation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_1} \right) = \frac{\partial L}{\partial z_1} \Rightarrow (m_1 + m_2 + 4m_4) \ddot{z}_1 + 2m_4 \ddot{z}_3 = (m_1 - m_2 - 2m_4) g, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_3} \right) = \frac{\partial L}{\partial z_3} \Rightarrow (m_3 + m_4) \ddot{z}_3 + 2m_4 \ddot{z}_1 = (m_3 - m_4) g. \quad (5)$$

De l'équation (5) on obtient :

$$\ddot{z}_3 = \frac{(m_3 - m_4) g - 2m_4 \ddot{z}_1}{m_3 + m_4} \quad (6)$$

et en insérant dans (4) on trouve

$$\ddot{z}_1 = \frac{(m_1 - m_2)(m_3 + m_4) - 4m_3 m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3 m_4} g \quad (7)$$

qui est l'expression de l'accélération de la masse m_1 . En l'insérant dans (6) on obtient l'expression de l'accélération de la masse m_3 :

$$\ddot{z}_3 = \left[\frac{(m_1 + m_2)m_3 + (m_2 - 3m_1 + 4m_3)m_4}{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4) + 4m_3 m_4} \right] g \quad (8)$$

Analyse dimensionnelle et estimations :

Cette seconde partie est moins formelle. On se propose de discuter l'importance de quelques uns des nombreux effets négligés dans le cas étudié ci-dessus. Le but étant d'avoir plus d'intuition sur le système et une meilleure évaluation de la validité des résultats.

Le point de départ est de caractériser (approximativement !) notre système par différentes grandeurs. Vu qu'on ne cherche qu'à faire des estimations grossières, les facteurs numériques ne jouent aucun rôle.

- Masse : le système contient quatre masses différentes. Sauf situation extrême, elles sont toutes du même ordre de grandeur m . Pour les applications numériques on va prendre $m \approx 1 \text{ kg}$.
- Longueur : il y a la longueur des deux fils, à nouveau on va prendre une longueur commune $L \approx 1 \text{ m}$.
- Energie : on peut par exemple estimer l'énergie potentielle : $E \approx mgL$.
- Accélération : mis à part une fonction dépendant des masses, l'accélération est donnée par g .
- Force : elle est simplement donnée par la gravitation : $F \approx mg$.

- Temps : pour estimer le temps typique associé à notre système, on peut considérer la situation où une masse est en chute libre et doit parcourir une distance L , on obtient alors $t \approx \sqrt{L/g}$.
- Vitesse : la vitesse typique est donnée par $v \approx at \approx \sqrt{Lg}$.

A présent, on va estimer la contribution de différents effets qui ont été négligés. Cette liste n'est en aucun cas exhaustive, et la façon de parvenir au résultat est subjective.

1. **Gravitation non-linéaire** : le fait d'avoir un potentiel gravitationnel linéaire est évidemment le résultat d'un développement de Taylor, valable pour des distances petites par rapport à l'éloignement au centre de masse. Dans ce cas on a donc :

$$\delta \approx \frac{L}{R_{\text{terre}}} \approx \frac{L}{6 \cdot 10^6 \text{ m}} \approx 10^{-7} \quad (9)$$

qui s'annule dans la limite $R_{\text{terre}} \rightarrow \infty$.

2. **Poulie avec inertie** : imaginons que la poulie n'est pas idéale mais qu'elle a un moment d'inertie I . L'énergie engrangée est alors $E \approx I\omega^2$, où ω est la fréquence de rotation. Elle est donnée par $\omega = v/r$ où r est le rayon de la poulie. On peut également approximer le moment d'inertie par $I \approx m_{\text{poulie}}r^2$. Au final on a donc :

$$\delta \approx \frac{E_{\text{poulie}}}{E} \approx \frac{m_{\text{poulie}}}{m} \approx \frac{m_{\text{poulie}}}{1 \text{ kg}} \quad (10)$$

qui s'annule dans la limite $m_{\text{poulie}} \rightarrow 0$.

3. **Frottements de l'air** : la force de frottement est donnée par $F \approx \sigma v^n$, où σ est un coefficient de friction et $n = 1, 2$ suivant si on est en régime linéaire ou non. On obtient donc :

$$\delta \approx \frac{\sigma}{m} \sqrt{L^n g^{n-2}} \approx \sigma 10^{n/2-1} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^n \text{ s}^{-n} \quad (11)$$

qui s'annule pour $\sigma \rightarrow 0$.

4. **Frottements de la poulie** : la force de frottement est donnée par $F \approx \lambda N$, où $N \approx mg$ est la force de réaction de la poulie, et λ un coefficient de frottement. Elle doit être comparée à la force de gravitation, et on obtient évidemment :

$$\delta \approx \lambda \quad (12)$$

qui s'annule pour $\lambda \rightarrow 0$.

5. **Corde extensible** : dans ce cas, on peut estimer que la corde est comme un ressort de rigidité k . Ceci va amener des oscillations de période $\sqrt{m/k}$, que l'on peut interpréter comme le temps de réaction du système. Il faut que celui-ci soit plus court que t :

$$\delta \approx \sqrt{\frac{mg}{Lk}} \approx \sqrt{\frac{10 \text{ N/m}}{k}} \quad (13)$$

qui s'annule pour $k \rightarrow \infty$. De la notation en-dessus, on voit que c'est équivalent à dire que la gravitation n'est pas assez forte pour étendre la corde.

6. **Relativité restreinte** : c'est évidemment le rapport des vitesses qui joue ici :

$$\delta \approx \frac{\sqrt{Lg}}{c} \approx 10^{-8} \quad (14)$$

qui s'annule pour $c \rightarrow \infty$.

7. **Quantique** : il faut comparer l'action à \hbar . L'action peut être approximée par $S \approx Et \approx m\sqrt{gL^3}$, et donc :

$$\delta \approx \frac{\hbar}{m\sqrt{gL^3}} \approx 10^{-34} \quad (15)$$

Il est important de noter que nous n'avons fait que des approximations naïves, et que des situations particulières peuvent grandement changer la situation. Par exemple, si les masses sont telles qu'une situation d'équilibre peut être trouvée, alors nos estimations pour l'accélération, la vitesse et le temps ne font plus sens. Ou encore, dans une réalisation concrète, les corrections de relativité restreinte interviendront encore moins qu'estimé ci-dessus, vu que les frottements de l'air vont diminuer la vitesse.

Reste que cette méthode est utile pour se faire une idée du rayon de validité de notre système, ou encore pour nous permettre de comprendre intuitivement sa dynamique. On peut également en apprendre un peu plus sur certains effets, comme le fait que le rayon n'intervient pas pour la poulie avec inertie.

Pour ceux qui seraient encore sceptiques, sachez que cette méthode est abondamment utilisée en physique, tant théorique qu'expérimentale.

Exercice 2 : Particule sur un cylindre #2

- La seule contrainte de ce système est que la particule est astreinte à se mouvoir sur le cylindre. Cette contrainte est holonôme et, en coordonnées cylindriques (r, θ, z) , s'exprime comme $r = R$.
- Les coordonnées généralisées sont celles qui satisfont aux contraintes. Dans ce cas ce sont les coordonnées θ et z . En effet, quelles que soient les valeurs prises par ces deux coordonnées, la particule sera toujours sur le cylindre. Afin d'écrire le Lagrangien L , voyons quelle est la forme du terme cinétique, i.e. comment s'exprime la vitesse en coordonnées cylindriques. On a

$$\begin{cases} x = R \cos \theta \\ y = R \sin \theta \\ z = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = R \dot{\theta} \sin \theta \\ \dot{y} = -R \dot{\theta} \cos \theta \\ \dot{z} = \dot{z} \end{cases} \rightarrow v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \quad (16)$$

Le potentiel s'exprime lui comme $V = mgz$ et l'on trouve finalement

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(R^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - mgz \quad (17)$$

- Le Lagrangien dépend des variables θ et z , on a donc deux équations d'Euler-Lagrange. Pour z on trouve :

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = m(\ddot{z} + g) \quad (18)$$

C'est bien le résultat attendu, la particule tombe sous la seule influence de la gravité. Voyons maintenant l'équation pour θ :

$$0 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{d}{dt}(mR^2 \dot{\theta}) \quad (19)$$

Nous constatons que comme le Lagrangien ne dépend pas de θ , la quantité $\partial L / \partial \dot{\theta}$ est conservée ! On dit alors que θ est une variable *cyclique*. Dans notre cas, la conservation de $mR^2 \dot{\theta}$ s'interprète comme la conservation du moment cinétique selon z . En effet, le moment cinétique vaut $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ dont la composante z est $L_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mR^2 \dot{\theta}$.

Exercice 3 : Variation autour du pendule #1

Le système comporte un degré de liberté. Pour le décrire on choisit la coordonnée généralisée θ (angle entre la tige et la verticale).

Il faut évaluer le Lagrangien du système, $L = T - V$. L'énergie cinétique est calculée comme

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) \quad (20)$$

où x et z sont donnés par

$$\begin{aligned} x &= l \sin \theta \\ z &= -l \cos \theta \end{aligned} \quad (21)$$

dont les dérivées temporelles sont

$$\begin{aligned} x &= l \dot{\theta} \cos \theta \\ z &= -l \dot{\theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (22)$$

L'énergie cinétique devient alors

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2(\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 \quad (23)$$

On notera que ce terme est celui que l'on aurait trouvé en partant de l'énergie cinétique en coordonnées polaires et en posant $\dot{l} = 0$.

L'énergie potentielle est la somme de deux termes : l'énergie potentielle gravitationnelle $V_g(x, z)$ et l'énergie potentielle du ressort, $V_r(x, y)$. Pour l'énergie potentielle gravitationnelle on a :

$$V_g(x, z) = mgz = -mgl \cos(\theta) \quad (24)$$

Pour l'énergie potentielle du ressort on obtient

$$V_r(x, z) = \frac{1}{2}k(a - d)^2 \quad (25)$$

où a est la longueur du ressort qui est calculée à l'aide de la trigonométrie :

$$a = l\sqrt{5 - 4 \cos(\theta)} \quad (26)$$

En remettant tous les facteurs ensemble on trouve finalement le Lagrangien du système :

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl \left[-\cos(\theta) + \frac{kl}{2mg} \left(\sqrt{5 - 4 \cos(\theta)} - \frac{d}{l} \right)^2 \right] \quad (27)$$

mg et kl ont les deux une dimension de force, leur rapport est donc bien sans unité.

Exercice 4 : Variation autour du pendule #2

- Le mouvement selon ϕ étant forcé, seul θ constitue un degré de liberté. Nous allons donc l'utiliser comme coordonnée généralisée.
- Pour trouver le Lagrangien, nous commençons par trouver les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle en fonction des coordonnées cartésiennes x et y :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \\ V &= mgy \end{aligned} \quad (28)$$

ensuite on peut traduire :

$$\begin{aligned} x &= R \sin(\omega t) + l \sin(\theta) \\ y &= -R \cos(\omega t) - l \cos(\theta) \\ \dot{x} &= R\omega \cos(\omega t) + l \cos(\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y} &= R\omega \sin(\omega t) + l \sin(\theta)\dot{\theta} \end{aligned} \quad (29)$$

En combinant toute ces informations on obtient :

$$L(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{m}{2} \left[R^2\omega^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2R\omega l\dot{\theta} \cos(\omega t - \theta) \right] + mg(R \cos \omega t + l \cos \theta). \quad (30)$$

Dans le terme cinétique on trouve les deux termes prévisibles que sont $\frac{1}{2}mR^2\omega^2$ pour la rotation à vitesse constante ainsi que $\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$ pour la rotation propre du pendule, ainsi qu'un terme de couplage entre les deux. Pour vérifier ce résultat, on peut par exemple noter que pour $\theta = \omega t$ on obtient bien un terme cinétique $\propto (R + l)^2\omega^2$.

- Le Lagrangien dépend explicitement du temps (sauf pour $\omega = 0$), la fonction hamiltonienne n'est donc pas conservée.

Exercice 5 : Variation autour du pendule #3

– Coordonnées :

$$\begin{array}{ll} \text{masse } m_1 : & x_1 = u, \quad \dot{x}_1 = \dot{u} \\ & y_1 = 0, \quad \dot{y}_1 = 0. \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{masse } m_2 : & x_2 = u + l \sin \phi, \quad \dot{x}_2 = \dot{u} + l \dot{\phi} \cos \phi \\ & y_2 = l \cos \phi, \quad \dot{y}_2 = -l \dot{\phi} \sin \phi. \end{array}$$

Energie cinétique :

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{u}^2 + \frac{m_2}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{u}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l \dot{u} \dot{\phi} \cos \phi \quad (31)$$

Energie potentiel :

$$V = -m_2 g y_2 = -m_2 g l \cos \phi \quad (32)$$

Lagrangien :

$$L(u, \phi, \dot{u}, \dot{\phi}) = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{u}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l \dot{u} \dot{\phi} \cos \phi + m_2 g l \cos \phi \quad (33)$$

– Equations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}} \right) = \frac{\partial L}{\partial u} \Rightarrow (m_1 + m_2) \ddot{u} + m_2 l \ddot{\phi} \cos \phi - m_2 l \dot{\phi}^2 \sin \phi = 0 \quad (34)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \Rightarrow l \ddot{\phi} + \ddot{u} \cos \phi + g \sin \phi = 0 \quad (35)$$

Constantes de mouvement :

$\frac{\partial L}{\partial u} = 0 \Rightarrow p_u \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = (m_1 + m_2) \dot{u} + m_2 l \dot{\phi} \cos \phi$ est conservé. Cette quantité correspond à la composante horizontale de l'impulsion totale. L'origine de cette constante de mouvement est la symétrie translationnelle du système le long x (théorème de Noether).

$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow$ La fonction hamiltonienne $h(u, \phi, \dot{u}, \dot{\phi}) \equiv \dot{u} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} + \dot{\phi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} - L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{u}^2 + \frac{m_2}{2} l^2 \dot{\phi}^2 + m_2 l \dot{u} \dot{\phi} \cos \phi - m_2 g l \cos \phi$ est une constante de mouvement. Dans cette exercice (mais pas toujours) h correspond à l'énergie mécanique du système $h = E = T + V$.

– ○ Expression de $u(t)$ en fonction de $\phi(t)$:

L'intégration de $(m_1 + m_2) \dot{u} + m_2 l \dot{\phi} \cos \phi = C$ donne

$$u(t) = \frac{C}{m_1 + m_2} t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin \phi(t) + D \quad (36)$$

où les constantes $C = (m_1 + m_2)v_0$ et $D = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \sin \alpha$ sont déterminées par les conditions initiales. On trouve donc :

$$u(t) = v_0 t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} [\sin \phi(t) - \sin \alpha] \quad (37)$$

○ Equation différentielle pour ϕ :

En insérant (35) dans (34) on obtient :

$$\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cos^2 \phi \right) l \ddot{\phi} + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \dot{\phi}^2 \sin \phi \cos \phi + g \sin \phi = 0 \quad (38)$$

Cette équation est dure à résoudre exactement. Avant toute chose, notons que pour $m_1 \rightarrow \infty$ (masse 1 immobile) on retombe sur l'équation du pendule simple.

On peut étudier ce qui se passe proche du point d'équilibre $\phi = 0^1$, $\phi \ll 1$, auquel cas $\cos(\phi) \approx 1$, $\sin(\phi) \approx \phi$:

$$\left(1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) l \ddot{\phi} + \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \dot{\phi}^2 \phi + g \phi = 0 \quad (39)$$

¹La position de u peut être choisie arbitrairement vu la symétrie sous translation du système.

Le deuxième terme continue à rendre le système difficile à résoudre. Si l'on se restreint de plus à des oscillations lentes :

$$\dot{\phi} \ll \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_2}} \quad (40)$$

l'équation se réduit enfin à une forme moins effrayante :

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \phi \quad (41)$$

A présent on peut la résoudre, et l'on obtient :

$$\phi(t) = \alpha \cos \left(\sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1}} t \right) \quad (42)$$

- En insérant (42) dans (37), et en tenant compte des approximations faites on obtient :

$$u(t) = v_0 t - \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \alpha \left[\cos \left(\sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1}} t \right) - 1 \right] \quad (43)$$

- Il reste à vérifier quand cette solution est valable. La première contrainte vient des petites oscillations :

$$\alpha \ll 1 \quad (44)$$

Ensuite on doit également assurer des oscillations lentes, ce qui impose :

$$\alpha \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1}} \ll \sqrt{\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_2}} \quad \text{donc : } \alpha \ll \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \quad (45)$$

La dernière condition est vérifiée aisément si la précédente l'est, et si les masses sont du même ordre de grandeur.