

1 Exercice 1

1.1 $\mathfrak{o}(n)$

$$\mathfrak{o}(n) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid X + X^T = 0\}$$

La dimension de l'algèbre est $\frac{n(n-1)}{2}$ et la paramétrisation plus générale pour une matrice qui appartient à l'algèbre est:

$$\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots \\ -a_2 & -a_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & -1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \cdots = \sum_{i=1}^{\frac{n(n-1)}{2}} a_i X_i$$

où X_i forment une base de l'algèbre (générateurs). De façon générale on peut paramétriser les matrices de la base comme:

$$(M^{ab})^i_j = \delta^{ai} \delta_j^b - \delta^{bi} \delta_j^a$$

avec $b = 2, 3, \dots, n$ et $a = 1, 2, \dots, b-1$.

1.2 $\mathfrak{o}(p, n-p)$

$$\mathfrak{o}(p, n-p) = \{X \in M(n, \mathbb{R}) \mid \eta X + X^T \eta = 0\}$$

On peut se convaincre que dans ce cas les générateurs peuvent se paramétriser comme:

$$(M^{ab})^i_j = \eta^{ai} \delta_j^b - \eta^{bi} \delta_j^a$$

avec $b = 2, 3, \dots, n$ et $a = 1, 2, \dots, b-1$. Il faut vérifier que cette représentation des générateurs satisfait la relation:

$$\begin{aligned} (\eta X^T \eta)^i_j &= -(X)^i_j \Rightarrow \\ \eta^{i\alpha} (\eta^{al} \delta_\alpha^b - \eta^{bl} \delta_\alpha^a) \eta_{lj} &= \eta^{ib} \delta_j^a - \eta^{ia} \delta_j^b = -X^i_j \end{aligned}$$

2.1 $\mathfrak{o}(n)$

$$\begin{aligned} [M^{ab}, M^{cd}]_{ij} &= (M^{ab})^i_k (M^{cd})^k_j - (M^{cd})^i_k (M^{ab})^k_j = \\ &= (\delta^{ai} \delta_k^b - \delta^{bi} \delta_k^a) (\delta^{ck} \delta_j^d - \delta^{dk} \delta_j^c) - \left(\begin{matrix} a \leftrightarrow c \\ b \leftrightarrow d \end{matrix} \right) \\ &= (\delta^{ai} \delta^{bc} \delta_j^d - \delta^{ai} \delta^{bd} \delta_j^c - \delta^{bi} \delta^{ac} \delta_j^d + \delta^{bi} \delta^{ad} \delta_j^c) - \left(\begin{matrix} a \leftrightarrow c \\ b \leftrightarrow d \end{matrix} \right) \\ &= \delta^{bc} (\delta^{ai} \delta_j^d - \delta^{di} \delta_j^a) - \delta^{bd} (\delta^{ai} \delta_j^c - \delta^{ci} \delta_j^a) - \delta^{ac} (\delta^{bi} \delta_j^d - \delta^{di} \delta_j^b) + \delta^{ad} (\delta^{bi} \delta_j^c - \delta^{ci} \delta_j^b) \\ &= \delta^{bc} (M^{ad})^i_j - \delta^{bd} (M^{ac})^i_j - \delta^{ac} (M^{bd})^i_j + \delta^{ad} (M^{bc})^i_j \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [M^{ab}, M^{cd}] = \delta^{bc} M^{ad} - \delta^{bd} M^{ac} - \delta^{ac} M^{bd} + \delta^{ad} M^{bc}$$

2.2 $\mathfrak{o}(p, n-p)$

$$\begin{aligned} [M^{ab}, M^{cd}]_{ij} &= (M^{ab})^i_k (M^{cd})^k_j - (M^{cd})^i_k (M^{ab})^k_j = \\ &= (\eta^{ai} \delta^b_k - \eta^{bi} \delta^a_k) (\eta^{ck} \delta^d_j - \eta^{dk} \delta^c_j) - \left(\begin{matrix} a \leftrightarrow c \\ b \leftrightarrow d \end{matrix} \right) \\ &= (\eta^{ai} \eta^{bc} \delta^d_j - \eta^{ai} \eta^{bd} \delta^c_j - \eta^{bi} \eta^{ac} \delta^d_j + \eta^{bi} \eta^{ad} \delta^c_j) - \left(\begin{matrix} a \leftrightarrow c \\ b \leftrightarrow d \end{matrix} \right) \\ &= \eta^{bc} (\eta^{ai} \delta^d_j - \eta^{di} \delta^a_j) - \eta^{bd} (\eta^{ai} \delta^c_j - \eta^{ci} \delta^a_j) - \eta^{ac} (\eta^{bi} \delta^d_j - \eta^{di} \delta^b_j) + \eta^{ad} (\eta^{bi} \delta^c_j - \eta^{ci} \delta^b_j) \\ &= \eta^{bc} (M^{ad})^i_j - \eta^{bd} (M^{ac})^i_j - \eta^{ac} (M^{bd})^i_j + \eta^{ad} (M^{bc})^i_j \Rightarrow \\ &\Rightarrow [M^{ab}, M^{cd}] = \eta^{bc} M^{ad} - \eta^{bd} M^{ac} - \eta^{ac} M^{bd} + \eta^{ad} M^{bc} \end{aligned}$$

3 $\mathfrak{o}(3)$

$$\begin{aligned} [J^i, J^m] &= \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} \epsilon^{mln} [M^{jk}, M^{ln}] \\ &= \frac{1}{4} \epsilon^{ijk} \epsilon^{mln} (\delta^{jn} M^{kl} + \delta^{kl} M^{jn} - \delta^{jl} M^{kn} - \delta^{kn} M^{jl}) \\ &= \frac{1}{4} (M^{kl} (\delta^{km} \delta^{il} - \delta^{kl} \delta^{im}) + M^{jn} (\delta^{in} \delta^{jm} - \delta^{im} \delta^{jn}) - M^{kn} (\delta^{kn} \delta^{im} - \delta^{km} \delta^{in}) \\ &\quad - M^{jl} (\delta^{im} \delta^{jl} - \delta^{il} \delta^{jm})) = \end{aligned}$$

où on a utilisé la relation:

$$\epsilon^{ijk} \epsilon^{ilm} = \delta^{jl} \delta^{km} - \delta^{jm} \delta^{kl}.$$

En utilisant le fait que M^{ab} est antisymétrique et donc que $M^{aa} = 0$ on a:

$$= \frac{1}{4} (4M^{mi}) = M^{mi} = \epsilon^{mij} J^j = -\epsilon^{imj} J^j$$

$$[J^i, J^j] = -\epsilon^{ijk} J^k$$

4 $\mathfrak{o}(1, 3)$

Puisque la restriction de η aux coordonnées spatiales est égale à $-\delta^{ij}$ on trouve le même résultat que pour $\text{SO}(3)$, mais avec $J_i \rightarrow -J_i$

$$[J^i, J^j] = \epsilon^{ijk} J^k$$

En plus on a:

$$[K^i, K^j] = [M^{0i}, M^{0j}] = \eta^{0j} M^{i0} - M^{ij} + \eta^{i0} M^{0j} = -M^{ij} = -\epsilon^{ijk} J^k$$

où on a utilisé le fait que $\eta^{0i} = \eta^{0j} = 0$ parce que i et j sont des indices spatiaux.

$$\begin{aligned}
[J^i, K^j] &= \frac{1}{2}\epsilon^{ikl}[M^{kl}, M^{0j}] = \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{ikl}(\eta^{kj}M^{l0} - \eta^{k0}M^{lj} - \eta^{lj}M^{k0} + \eta^{l0}M^{kj}) \\
&= \frac{1}{2}\epsilon^{ikl}(-\delta^{kj}M^{l0} + \delta^{lj}M^{k0}) = -\epsilon^{ijl}M^{l0} = \epsilon^{ijl}K^l
\end{aligned}$$