1 Exercice 1

A l'aide des angles d'Euler, $g \in SO(3)$ s'écrit

$$g = R_3(\phi)R_1(\theta)R_3(\psi),$$

où $R_j(\alpha)$ est la rotation d'un angle α autour de l'axe j. En identifiant $SO(2)$ à une rotation autour de l'axe 3, on peut choisir comme représentant de $[g]_{SO(2)}$ l'élément $\tilde{g} = R_3(\phi)R_1(\theta)$. En effet, pour $g \in SO(3)$, posons $h = g^{-1}\tilde{g}$. Ce h est un élément de $SO(2)$

$$h = g^{-1}\tilde{g} = R_3^{-1}(\psi)R_1^{-1}(\theta)R_3^{-1}(\phi)R_3(\phi)R_1(\theta) = R_3^{-1}(\psi) \in SO(2),$$

et tel que $\tilde{g} = gh$. Donc

$$SO(3)/SO(2) = \{R_3(\phi)R_1(\theta) \mid \phi \in [0, 2\pi[, \theta \in [0, \pi]\}.$$

Comme représentant dans ${}_{SO(2)}[g]$, on prend $\bar{g} = R_1(\theta)R_3(\psi)$. Comme précédemment, on vérifie que $\bar{g}g^{-1} \in SO(2)$; ainsi

$$SO(2)\backslash SO(3) = \{R_1(\theta)R_3(\psi) \mid \theta \in [0, \pi], \psi \in [0, 2\pi[\}.$$

Quant à la sphére S^2, tout $x \in S^2$ est décrit, en coordonnées sphériques, par les deux angles $\theta \in [0, \pi]$ et $\phi \in [0, 2\pi[$, selon

$$\vec{x} = (\cos\phi \sin\theta, \sin\phi \sin\theta, \cos\theta).$$

On voit donc qu'il y a une correspondance biunivoque entre $\vec{x}$ et $\tilde{g}$ ou $\bar{g}$. Soit l'application

$$\begin{aligned} f: \quad SO(2)\backslash SO(3) &\longrightarrow S^2 \\ R_1(\theta)R_3(\phi) &\longrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Munissons $SO(2)\backslash SO(3)$ et S^2 des distances

$$\begin{aligned} d_{SO(2)\backslash SO(3)}(A, B) &= \max_{1 \le i,j \le 3} |A_{ij} - B_{ij}| \\ d_{S^2}(\vec{x}, \vec{y}) &= \max_{1 \le j \le 3} |x_j - y_j|. \end{aligned}$$

Ceci donne une structure d'espace métrique à $SO(2)\backslash SO(3)$ et S^2. Montrons la continuité de l'application f; on a

$$\begin{aligned} R_1(\theta)R_3(\phi) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\cos\theta \sin\phi & \cos\theta \cos\phi & \sin\theta \\ \sin\theta \sin\phi & -\sin\theta \cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} d_{SO(2)\backslash SO(3)}(A,A') < \delta_\epsilon \Rightarrow & \\ & \Rightarrow \max_{1\le i,j\le 3} |A_{ij} - A'_{ij}| < \delta_\epsilon \\ & \Rightarrow |A_{ij} - A'_{ij}| < \delta_\epsilon \ \forall \ i,j = 1,2,3 \\ & \Rightarrow |\cos\phi \sin\theta - \cos\phi' \sin\theta'| < \delta_\epsilon \\ & \quad |\sin\phi \sin\theta - \sin\phi' \sin\theta'| < \delta_\epsilon \\ & \quad |\cos\theta - \cos\theta'| < \delta_\epsilon \\ & \Rightarrow |x_j - x'_j| < \delta_\epsilon \quad \forall j = 1,2,3 \\ & \Rightarrow \max_{1\le j\le 3} |x_j - x'_j| < \delta_\epsilon \\ & \Rightarrow d_{S^2}(\vec{x},\vec{x}\,') < \delta_\epsilon \end{aligned}$$

f est donc continue. La continuité de f^{-1} peut être montrée de la même façon . On a donc

$$S^2 \simeq SO(2)\backslash SO(3)$$

Un raisonnement analogue permet d'établir que $S^2 \simeq SO(3)/SO(2)$.

2 Exercice 2

La caractéristique d'Euler est donnée par $\chi(X) = s-c+f$, où s est le nombre de sommets, c le nombre de côtés, f le nombre des faces. Pour calculer χ on peut utiliser le fait que ces espaces sont homéomorphes à des espaces quotients obtenus à partir de $\mathbb{R}^2$ en utilisant des relations d'équivalence opportunes:

1. Tore $T^2 \simeq \mathbb{R}^2/\sim$ avec $x \sim y \Leftrightarrow x^1 - y^1 = 2\pi n_1,\ x^2 - y^2 = 2\pi n_2,\ n_i \in \mathbb{Z}$
2. Ruban de Moebius $\mathcal{M} \simeq \mathbb{R}^2/\sim$ avec $x \sim y \Leftrightarrow x^1 - y^1 = 2\pi n,$ $x^2 = (-1)^n y^2,\ n \in \mathbb{Z}$
3. Bouteille de Klein $\mathcal{K} \simeq \mathbb{R}^2/\sim$ avec $x \sim y \Leftrightarrow x^1 = (-1)^{n_2} y^1 + 2\pi n_1,\ x^2 - y^2 = 2\pi n_2,\ n_i \in \mathbb{Z}$
4. L'espace projectif $\mathrm{RP}^2 \simeq \mathbb{R}^2/\sim$ avec $x \sim y \Leftrightarrow x^1 = (-1)^{n_2} y^1 + 2\pi n_1,\ x^2 = (-1)^{n_1} y^2 + 2\pi n_2,\ n_i \in \mathbb{Z}$

On a donc (voir Fig.(1)):

1. $\chi(T^2) = 1 - 2 + 1 = 0;$
2. $\chi(\mathcal{M}) = 2 - 3 + 1 = 0;$
3. $\chi(\mathcal{K}) = 1 - 2 + 1 = 0$
4. $\chi(\mathrm{RP}^2) = 2 - 2 + 1 = 1$

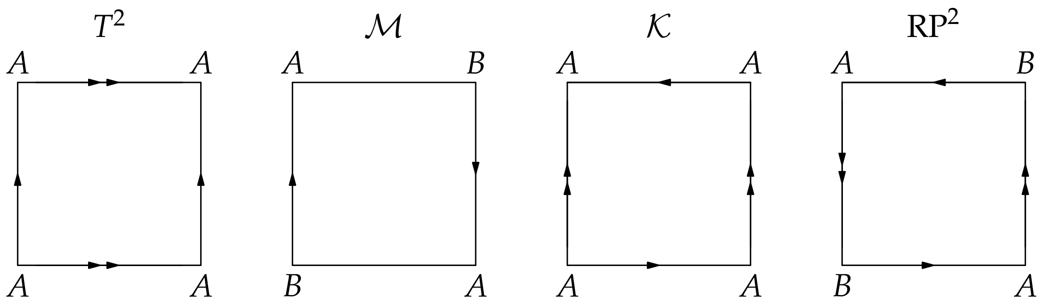

Figure 1: Espaces quotient de $\mathbb{R}^2$