1 Exercice 1

1.1

Pour montrer que chaque ligne et chaque colonne doit contenir chaque élément du groupe une seule fois on utilise le Théorème du réarrangement: Soit G un groupe et m un de ses éléments. Les applications:

$$\begin{aligned} f_1: \ & G \rightarrow G \\ & x \rightarrow m \cdot x \\ f_2: \ & G \rightarrow G \\ & x \rightarrow x \cdot m \end{aligned}$$

sont bijectives.
Preuve:

- f_1 est surjective, puisque pour chaque $y \in G$, $m^{-1} \cdot y \in G$ et $m \cdot (m^{-1} \cdot y) = y$. Donc y est l'image de $m^{-1} \cdot y$ sous cette application.
- f_1 est injective puisqu $m \cdot x = m \cdot x' \Rightarrow m^{-1} \cdot m \cdot x = m^{-1} \cdot m \cdot x' \Rightarrow x = x'$.

La preuve est similaire pour la deuxième application. Le théorème affirme donc que chaque ligne ou colonne est un réarrangement des éléments du groupe. Pour les groupes d'ordre deux et trois les tables de multiplication sont complètement fixées.

╲	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

Elle correspond à un groupe Abelien parce que $ab = ba = e$.
Sans connaître le théorème on doit essayer toutes les combinaisons; par exemple: considérons la ligne de a: on peut essayer de définir $aa = a$ et on est alors forcé de définir $ab = e$, car il doit exister un inverse de a. Dans ce cas on a que: $a(ab) = ae = a$ mais aussi $a(ab) = (aa)b = ab$ donc $ab = a \Rightarrow b = e$. De plus $e = ab = ae = a \Rightarrow a = e$. Donc $a = b = e$, qui est le groupe trivial. En analysant tous les cas de cette façon, on peut montrer que la seule table possible est celle qu'on a écrite.

1.2

Il y a trois représentations de dimension 1:

- $\phi(e) = \phi(a) = \phi(b) = 1$ représentation triviale;
- $\phi(e) = 1, \ \phi(a) = e^{2\pi i/3}, \ \phi(b) = e^{4\pi i/3}$;
- $\phi(e) = 1, \ \phi(a) = e^{4\pi i/3}, \ \phi(b) = e^{2\pi i/3}$

1.3

$\phi(e) = \mathbb{1}$; $\phi(a)\phi(b) = \mathbb{1} = \phi(e) = \phi(ab)$; $\phi(a)\phi(a) = \phi(b) = \phi(aa)$. Pour montrer que cette représentation est complètement réductible il est suffisant de vérifier qu'il existe une transformation de base qui diagonalise toutes les matrices (elles commutent donc il est possible de les diagonaliser simultanément). La matrice de transformation de base est construite en prenant comme colonnes les vecteurs propres. Les valeurs propres sont trouvées en résolvant l'équation: $\det(\phi(a) - \lambda\mathbb{1}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = e^{2\pi i/3} \equiv \omega,\ \ \lambda_3 = e^{4\pi i/3} \equiv \omega^2$. La matrice de transformation de base est:

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$$

Lors d'un changement de base on a $\phi(g) \to \phi'(g) = S^{-1}\phi(g)S$ et donc:

$$\phi'(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \phi'(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix} \quad \phi'(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

Donc la représentation de dimension 3 peut être récrite comme une somme directe de trois représentations irréductibles de dimension 1.

2 Exercice 2

1) $n \circ m \equiv n + m = p \ \mid \ p \in \mathbb{Z} \ \forall \ \ n, m \in \mathbb{Z}$
2) $n \circ (m \circ p) = n + m + p = (n \circ m) \circ p$
3) $\exists \ e = 0 \in \mathbb{Z} \ \ : \ \ e \circ m = 0 + m = m = m + 0 = m \circ e$
4) $\exists \ m^{-1} = (-m) \in \mathbb{Z} \ \ : \ \ m^{-1} \circ m = (-m) + (m) = 0 = e$
Donc c' est un groupe.

Il est facile de vérifier que c' est une représentation:

$$\phi(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} \qquad \phi(n)\phi(m) = \begin{pmatrix} 1 & n+m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \phi(n+m)$$

La représentation n'est pas complètement réductible parce que les matrices ne sont pas diagonalisables. En fait chaque matrice admet 2 valeurs propres $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ mais il n' est pas possible de trouver deux vecteurs propres lineairement indépendants et donc la matrice de changement de base n' est pas inversible. Les vecteurs propres sont de la forme:

$$v = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}$$

et donc le projecteur défini par:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

définit un sous-espace invariant et la représentation est réductible.

3 Exercice 3

1) $\vec{u} \times \vec{w} \in \mathbb{R}^3 \ \forall \ \vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$
2) $\vec{u} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{u}$
3) $\vec{u} \times \big(a\vec{w} + b\vec{z}\big) = a\vec{u} \times \vec{w} + b\vec{u} \times \vec{z}$
4) Utilisons la relation $\big(\vec{u} \times \vec{z}\big) \times \vec{v} = \vec{z}\big(\vec{u} \cdot \vec{v}\big) - \vec{u}\big(\vec{z} \cdot \vec{v}\big)$. On la peut dériver de la façon suivante:

$$\Big[\big(\vec{u} \times \vec{z}\big) \times \vec{v}\Big]_i = \epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}u_l z_m v_k = \big(\delta_{kl}\delta_{im} - \delta_{km}\delta_{il}\big)u_l z_m v_k = z_i\big(\vec{u} \cdot \vec{v}\big) - u_i\big(\vec{z} \cdot \vec{v}\big)$$

On vérifie alors facilment que l'identité de Jacobi est satisfaite:

$$\begin{aligned}&\big(\vec{u} \times \vec{z}\big) \times \vec{v} + \big(\vec{z} \times \vec{v}\big) \times \vec{u} + \big(\vec{v} \times \vec{u}\big) \times \vec{z} = \\ &\vec{z}\big(\vec{u} \cdot \vec{v}\big) - \vec{u}\big(\vec{z} \cdot \vec{v}\big) + \vec{v}\big(\vec{z} \cdot \vec{u}\big) - \vec{z}\big(\vec{u} \cdot \vec{v}\big) + \vec{u}\big(\vec{v} \cdot \vec{z}\big) - \vec{v}\big(\vec{u} \cdot \vec{z}\big) = 0\end{aligned}$$