1 Exercice 1

$$
\begin{aligned}
(\omega) &= \frac{|g|}{p!p!(n-p)!}\omega_{i_1\cdots i_p}\epsilon^{i_1\cdots i_p}{}_{j_{p+1}\cdots j_n}\,\epsilon^{j_{p+1}\cdots j_n}{}_{l_1\cdots l_p}\,dx^{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{l_p} = \\
&= \frac{|g|}{p!p!(n-p)!}\,(-1)^{(n-p)p}\,\omega_{i_1\cdots i_p}\,\epsilon^{i_1\cdots i_p j_{p+1}\cdots j_n}\,\epsilon_{l_1\cdots l_p j_{p+1}\cdots j_n}\,dx^{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{l_p}
\end{aligned}
$$

On peut simplifier l'expression suivante:

$$
\sum_{\{j\}\{l\}}\epsilon^{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_p j_{p+1}\cdots j_n}\,\epsilon_{l_1\cdots l_p j_{p+1}\cdots j_n}\,dx^{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{l_p} =
$$

où $\bar{i}_1\cdots\bar{i}_p$ indique n'importe quelle permutation des valeurs que les indices i_k peuvent avoir: $i_k = 1,2,...,n$ avec $k = 1,2,...,p$; par exemple $(\bar{i}_1,...,\bar{i}_p) = (1,2,...,p)$. Puisque $\epsilon^{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_p j_{p+1}\cdots j_n}$ est complètement antisymétrique, les seules valeurs que les indices $j_{p+1}\cdots j_n$ peuvent avoir sont une n'importe quelle permutation $\bar{j}_{p+1}\cdots\bar{j}_n$ des $(n-p)$ valeurs restantes; par exemple $(j_{p+1},...,j_n) = (p+1,...,n)$. En plus, puisque les indices j_k sont contractés avec celle du deuxième tenseur de Levi-Civita on a que toutes les permutations donnent la même contribution. Donc (les indices $\bar{j}$ sont pas sommés) :

$$
= \sum_{\{l\}}(n-p)!\,\epsilon^{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_p\bar{j}_{p+1}\cdots\bar{j}_n}\,\epsilon_{l_1\cdots l_p\bar{j}_{p+1}\cdots\bar{j}_n}\,dx^{l_1}\wedge\cdots\wedge dx^{l_p} =
$$

Pour la même raison on a que les seules valeurs que les indices $l_1\cdots l_p$ peuvent avoir sont n'importe quelle permutation des valeurs $\bar{i}_1\cdots\bar{i}_p$ et puisque chaque permutation donne le même contribution on a (les indices $\bar{l}$ sont pas sommes) :

$$
p!(n-p)!\,\epsilon^{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_p\bar{j}_{p+1}\cdots\bar{j}_n}\,\epsilon_{\bar{i}_1\cdots\bar{i}_p\bar{j}_{p+1}\cdots\bar{j}_n}\,dx^{\bar{i}_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\bar{i}_p} = p!(n-p)!\,\frac{1}{g}\,dx^{\bar{i}_1}\wedge\cdots\wedge dx^{\bar{i}_p}
$$

On a donc:

$$
(\omega) = \frac{|g|}{g}\frac{1}{p!}(-1)^{(n-p)p}\,\omega_{i_1\cdots i_p}\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p} = (-1)^s(-1)^{p(n-p)}\,\omega
$$

2 Exercice 2

2.1

$$
\begin{aligned}
(a\wedge b) &= \frac{1}{p!q!}a_{i_1\cdots i_p}b_{i_{p+1}\cdots i_{p+q}}\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{p+q}} \\
d(a\wedge b) &= \frac{1}{p!q!}\frac{\partial}{\partial x^j}(a_{i_1\cdots i_p}b_{i_{p+1}\cdots i_{p+q}})\,dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{p+q}} = \\
&= \frac{1}{p!q!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^j}a_{i_1\cdots i_p}\right)b_{i_{p+1}\cdots i_{p+q}} + a_{i_1\cdots i_p}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}b_{i_{p+1}\cdots i_{p+q}}\right)\right]dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{p+q}} \\
&= da\wedge b + (-1)^p\,\frac{1}{p!q!}a_{i_1\cdots i_p}\,\frac{\partial}{\partial x^j}b_{i_{p+1}\cdots i_{p+q}}\,dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^j\wedge dx^{p+1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{p+q}} = \\
&= da\wedge b + (-1)^p a\wedge db
\end{aligned}
$$

2.2

$$
\begin{aligned}
(a \wedge b) &= \frac{1}{p!q!} a_{i_1 \cdots i_p} b_{i_{p+1} \cdots i_{p+q}} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p+q}} = \\
&= \frac{1}{p!q!} a_{i_1 \cdots i_p} b_{i_{p+1} \cdots i_{p+q}} \, dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p-1}} \wedge dx^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p+q}} \wedge dx^{p} (-1)^{q} \\
&= \frac{1}{p!q!} a_{i_1 \cdots i_p} b_{i_{p+1} \cdots i_{p+q}} \, dx^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_{p+q}} \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{p} (-1)^{qp} \\
&= (-1)^{qp} b \wedge a
\end{aligned}
$$

2.3

$$
d(f da) = df \wedge da + f d^2 a = df \wedge da
$$