Exercice 1

On considère la région $\{z \geq 0\}$. Le potentiel est nulle dans la région $\{z = 0, \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > a\}$, pendant que $V = V_0 \neq 0$ pour $\{z = 0, \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \leq a\}$.

i) Avez-vous besoin de la fonction de Green de Neumann ou Dirichlet ? En utilisant une bonne fonction de Green pour ce probléme, trouver une expression sous forme intégrale pour le potentiel.

ii) En utilisant le resultat (i), trouver le potentiel sur l'axe z ($\rho = 0$). Quelle est la forme du potentiel à une grande distance $z \gg a$? (montrer que $V \propto a^2/z^2$)

iii) Le resultat (ii) signifie que le terme dominante à une grande distance est un dipôle. Montrer que, en toute generalité, le terme de monopôle est absent dans le cas où $V \neq 0$ seulement dans une région limitée du plan. Pouvez-vous dire aussi quelle est la condition pour avoir un dipôle $\neq 0$?

Exercice 2

On considère la région $\{x \geq 0, y \geq 0\}$. Le potentiel est nulle sur le demi-plan $\{y = 0, x > 0\}$, pendant que $V = V_0 \neq 0$ sur le demi-plan $\{x = 0, y > 0\}$.

i) Avez-vous besoin de la fonction de Green de Neumann ou Dirichlet ? Trouver une bonne fonction de Green pour ce problème.

ii) En utilisant la fonction de Green, calculer le potentiel dans la région $\{x > 0, y > 0\}$. Formule (peut-être) utile :

$$\int \frac{dt}{(a^2 + t^2)^{3/2}} = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2 + t^2}} + const$$

iii) Trouver le potentiel en résolvant l'équation de Poisson directement.

Exercice 3

On considère un volume V défini par le demi-espace ($z > 0$) délimité par le plan $z = 0$ avec les conditions suivantes :

— $\rho = 0$ dans V,

— $\phi = \phi_0(x, y)$ sur le bord $\partial V \equiv$ plan $z = 0$.

(Assumez que $\phi_0 \to 0$ "rapidement" quand $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to \infty$ ou, ce qui est équivalent, $\phi_0 \neq 0$ seulement dans une région compacte.)

i) Vous avez besoin des conditions de Neumann ou Dirichlet ? Trouvez la bonne fonction de Green pour le problme.

ii) Écrivez l'expression pour $\phi(\mathbf{x})$ dans le volume V pour un ϕ_0 connu.

iii) Considérez le potentiel $\phi(\mathbf{x})$ dans la limite $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \to \infty$.

(a) Prouvez que le terme principal dans une expansion en $R \to \infty$ a l'expression d'un potentiel de dipôle. Écrivez le dipôle correspondant, $\mathbf{d}$, en fonction de ϕ_0.

(b) Si on assume que $\mathbf{d} = 0$, prouvez que le terme principal a la forme d'un quadrupôle. Écrivez le quadrupôle correspondant en fonction de ϕ_0.

Comment est-ce que le résultat change si V est l'espace defini par la rgion $z > 0$, $y > 0$? ($\phi_0(\mathbf{x})$ est encore une fonction qui décroît rapidement, mais maintenant définie seulement dans les deux demi-plans). En particulier, quel est le multipôle principal (en général) dans ce cas ?