

# Electrodynamique classique

Notes de cours du Professeur Shaposhnikov

2009

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne  
Faculté des Sciences de Base, Section de Physique  
Institut de Théorie des Phénomènes Physiques  
Laboratoire de Physique des Particules et de Cosmologie

# Table des matières

Table des matières	i
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Solution des équations de Maxwell en présence de charges et de courants : fonction de Green</b>	<b>3</b>
2.1 Les équations de Maxwell, le système d'unités	3
2.2 Les limites de l'électrodynamique classique	4
2.3 Rappels des cours passés	4
2.3.1 Méthode pour l'électrostatique	5
2.3.2 Méthode pour la magnétostatique	6
2.3.3 Phénomènes dépendant du temps : conservation de la charge	6
2.3.4 Méthode pour l'électrodynamique	6
2.4 Méthode des fonctions de Green pour les équations différentielles	7
2.4.1 Propriétés de la fonction delta	8
2.4.2 Exemple 1 : cas statique	10
2.4.3 Exemple 2 : cas dynamique	11
2.5 La radiation du dipôle (rappel)	14
<b>3 Les potentiels de Liénard-Wiechert</b>	<b>17</b>
3.1 Calcul des potentiels	17
3.1.1 Dérivation des champs magnétiques et électriques pour le cas non-relativiste	19
3.1.2 Comparaison avec le dipôle	22
3.2 Cas simple : particule le long d'une ligne droite	24
3.2.1 Champ magnétique	24
3.2.2 Champ électrique	25
3.2.3 Calculs intermédiaires	25
3.2.4 Résultats	26
3.2.5 Interprétation des résultats : la radiation	26
3.2.6 Structure de la radiation	29

<b>4</b>	<b>Equations de Maxwell et transformations de Galilée</b>	<b>31</b>
4.1	Principe d'invariance et propriétés de l'espace-temps en dynamique Newtonienne . . . . .	31
4.2	Electrodynamique et transformations de Galilée . . . . .	32
4.3	Transformations de Lorentz . . . . .	34
4.4	Potentiel d'une charge ponctuelle en mouvement . . . . .	36
<b>5</b>	<b>L'électrodynamique avec les quadrivecteurs</b>	<b>39</b>
5.1	Définitions : quadrivecteurs covariants et contravariants . . . . .	39
5.2	Les équations de Maxwell en 4 dimensions . . . . .	41
5.2.1	Exemple 1 : . . . . .	41
5.2.2	Exemple 2 : . . . . .	42
5.2.3	Transformation des champs, tenseur champ : . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Les particules dans les champs électromagnétiques</b>	<b>47</b>
6.1	Les équations de Newton : Cas relativiste . . . . .	47
6.2	Applications pour des cas simples : . . . . .	49
6.2.1	Champ électrique constant : . . . . .	49
6.2.2	Champ magnétique constant suivant $(Oz)$ : . . . . .	50
6.2.3	Formule de Larmor relativiste . . . . .	51
6.3	Les accélérateurs . . . . .	52
6.3.1	Accélérateur linéaire . . . . .	52
6.3.2	Radiation synchrotron . . . . .	52
<b>7</b>	<b>Champs électrique et magnétique dans un milieu macroscopique</b>	<b>55</b>
7.1	Les équations de Maxwell macroscopiques . . . . .	55
7.2	Champs $\vec{H}$ et $\vec{D}$ . . . . .	57
7.3	Solution des équations de Maxwell . . . . .	58
7.4	Les ondes électromagnétiques dans les milieux continus . . . . .	60
7.4.1	Réflexion d'une onde . . . . .	61

# Chapitre 1

## Introduction

C'est la troisième fois que vous allez étudier l'électrodynamique. En effet, vous avez déjà pu vous familiariser avec ces concepts au gymnase ainsi que lors du troisième semestre de physique générale. Quel est donc l'objectif de ce cours ? Bien sûr, vous retrouverez ici quelques rappels des notions déjà acquises. Mais ce sera également l'occasion d'aborder des sujets qui n'ont pas encore été traités. D'autre part, ce cours n'a pas la prétention de couvrir tous les aspects de l'électrodynamique. Nous nous limiterons aux deux problèmes suivants :

- l'électrodynamique classique comme base de la relativité restreinte,
- approche microscopique des phénomènes électrodynamiques macroscopiques.

Nous vous invitons également à consulter les références suivantes :

- Classical electrodynamics, J.D. Jackson, John Wiley & Sons
- The Classical theory of fields, L.D. Landau & E.M. Lifshitz, Pergamon Press
- Electromagnétisme, R.P. Feynman, InterEditions



## Chapitre 2

# Solution des équations de Maxwell en présence de charges et de courants : fonction de Green

### 2.1 Les équations de Maxwell, le système d'unités

Tout phénomène d'électrodynamique classique est décrit par les équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.4)$$

où  $\vec{E}(x)$  est le champ électrique,

$\vec{B}(x)$  est le champ magnétique,

$\rho(x)$  est la densité de charge,

$\vec{j}(x)$  est la densité de courant,

$c$  est la vitesse de la lumière,  $c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$ ,

$\epsilon_0$  est la permittivité du vide,  $\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi} \frac{1}{c^2} \frac{C^2}{N \cdot m^2} = 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{A \cdot s}{V \cdot m}$

A ces équations, nous devons également ajouter la force de Lorentz :

$$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (2.5)$$

où  $e$  est la charge électrique de la particule.

Toutes ces équations sont écrites dans le système international d'unités MKS

(Mètre Kilo Seconde). L'unité de courant en est l'ampère  $A$ , et l'unité de température est le Kelvin  $K$ .

- Définition de l'ampère : un courant est de  $1 A$  si la force agissant entre deux lignes électriques parallèles parcourues par le même courant est de  $2 \cdot 10^{-7} N/m$ .
- L'unité de charge est le Coulomb  $C$  :  $1 C = 1 A \cdot s$ .
- L'unité du potentiel électrique est le Volt  $V$  :  $V = \frac{J}{C}$
  
- L'unité du champ électrique :  $V/m$ .
- L'unité du flux magnétique est le Weber  $Wb$  :  $Wb = V \cdot s$ .
- L'unité de la densité de flux magnétique est le Tesla  $T$  :  $T = \frac{Wb}{m^2} = \frac{V \cdot s}{m^2}$  ( $1 T = 10^4$  gauss).
- L'unité de la résistance est le Ohm  $\Omega$  :  $\Omega = \frac{V}{A}$ .
- L'unité de capacité est le Farad  $F$  :  $F = \frac{C}{V}$

## 2.2 Les limites de l'électrodynamique classique

Comme toute théorie physique, l'électrodynamique classique a ses limites d'applications : elle n'est pas valable à très petites distances et à très hauts champs, à cause de la physique quantique. Elle pourrait également ne plus être valable à très grandes distances.

De l'électrodynamique, nous savons que toute charge en mouvement rayonne. Ceci nous conduit à la conclusion suivante : un modèle planétaire pour l'atome est instable. Il faut donc bâtir une théorie quantique de l'atome pour résoudre ce problème. A ce sujet, nous vous renvoyons aux séries d'exercices.

D'autre part, nous ne savons pas expérimentalement si l'électrodynamique classique reste correcte à de très grandes distances,  $l \gtrsim 10^{19}$  m.

Il n'en reste pas moins que l'électrodynamique classique a une grande région d'applicabilité.

## 2.3 Rappels des cours passés

Dans ce qui suit, nous allons considérer que vous connaissez toutes les opérations d'analyse vectorielle. Nous rappelons :

- en coordonnées cartésiennes :

gradient :

$$\vec{\nabla} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \vec{e}_i$$

divergence :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

rotationnel :

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) \vec{e}_1 + \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \vec{e}_2 + \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \vec{e}_3$$

D'autre part, nous considérons que vous connaissez :

- Le théorème de Gauss :

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dV = \oint \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

- Le théorème de Stokes :

$$\oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

De cette façon, nous pouvons récrire les équations de Maxwell sous forme intégrale :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

“Le flux de  $E$  à travers une surface fermée est égal à la charge à l'intérieur de cette surface divisée par  $\epsilon_0$ ”.

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

qui est la loi de Faraday,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

qui traduit la non-existence de monopôles magnétiques,

$$\underbrace{c^2 \oint \vec{B} \cdot d\vec{l}}_{\text{loi d'Ampère}} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

Dans les sections qui suivent, nous rappelons les diverses méthodes que vous avez déjà vues pour résoudre des problèmes simples.

### 2.3.1 Méthode pour l'électrostatique

Nous avons le potentiel  $\phi$  qui est défini par  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ , qui doit résoudre  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ . Le potentiel vérifie l'équation de Poisson :

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{2.6}$$

$\phi$  est défini à une constante près, une solution de l'équation [2.6] est :

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{x}')d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \tag{2.7}$$



### 2.3.2 Méthode pour la magnétostatique

Nous avons le potentiel vecteur  $\vec{A}$  qui est défini par  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , qui doit résoudre  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ . Nous voyons donc que le potentiel vecteur  $\vec{A}$  n'est donné qu'à un gradient près, puisque  $\vec{A} + \vec{\nabla}\alpha$  donne le même champ magnétique. Il nous faut donc nous donner une jauge, prenons par exemple la jauge de Coulomb :  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ . Les équations de la magnétostatique ont également la forme de l'équation de Poisson

$$\Delta \vec{A} = -\frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} \quad (2.8)$$

ces équations ont une solution du type

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \frac{\vec{j}(\vec{x}') d^3x'}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (2.9)$$

Les équations [2.7] et [2.9] donnent une solution au problème suivant : nous avons une distribution connue de courants et de charges, trouver  $\vec{A}$  et  $\phi$ .

### 2.3.3 Phénomènes dépendant du temps : conservation de la charge

Une conséquence importante des équations de Maxwell est la conservation de la charge électrique. En effet, en utilisant l'équation [2.1], nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.10)$$

D'autre part en prenant [2.4] :

$$c^2 \underbrace{\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})}_{=0} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad (2.11)$$

En combinant [2.10] et [2.11] nous obtenons :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (2.12)$$

qui est appelée équation de continuité.

### 2.3.4 Méthode pour l'électrodynamique

Il s'agit maintenant de résoudre les équations [2.2] et [2.3] simultanément. Nous avons vu que nous avons une certaine liberté dans le choix des potentiels (à une constante près). Il faut donc que les solutions soient invariantes de jauge :

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla}\alpha$$

$$\phi \rightarrow \phi - \frac{\partial \alpha}{\partial t}$$

Nous allons vérifier cette invariance :

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \alpha) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \alpha}_{=0} = \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} \alpha) - \vec{\nabla} \left( \phi - \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) = \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$$

$$\text{car } \left( \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \right) \alpha = 0.$$

Une remarque vient alors, nous pouvons choisir la jauge de façon à simplifier les équations de Maxwell. La jauge de Lorenz<sup>1</sup> donne, par exemple, des équations découplées. Le choix est le suivant :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.13)$$

Nous obtenons les équations suivantes pour les potentiels :

$$-\Delta \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.14)$$

$$-\Delta \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0 c^2} \quad (2.15)$$

Si la densité de courants et la densité de charges sont nulles, les équations [2.14] et [2.15] sont les équations d'ondes avec la vitesse  $c$ .

Le prochain objectif est de trouver des solutions pour ces équations en utilisant la méthode des fonctions de Green.

## 2.4 Méthode des fonctions de Green pour les équations différentielles

Dans ce paragraphe, nous allons considérer les deux équations suivantes :

$$-\Delta \phi = \frac{\rho(\vec{x})}{\epsilon_0} \quad (2.16)$$

qui correspond au cas statique, et

$$-\Delta \phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\rho(\vec{x}, t)}{\epsilon_0} \quad (2.17)$$

---

<sup>1</sup>Rem : Cette jauge est nommée d'après le physicien danois Ludvig Lorenz (1829–1891), alors que le physicien néerlandais Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) a donné son nom aux transformations de Lorentz et à la force de Lorentz.

pour le cas dynamique.

Définition : Une fonction de Green est une fonction de  $(\vec{x}, \vec{x}')$  [ou bien de  $(\vec{x}, t; \vec{x}', t')$ ] qui satisfait les équations :

$$-\Delta_{\vec{x}} G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.18)$$

dans le cas statique, et

$$\left(-\Delta_{\vec{x}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') \quad (2.19)$$

dans le cas dynamique.

Vous remarquez l'apparition, dans ces deux dernières équations, d'un nouvel objet : la fonction  $\delta$  de Dirac. Ce n'est pas à proprement parler une fonction, mais une distribution.

L'idée qui se cache derrière ce nouveau concept est la suivante : comment pouvons-nous décrire une charge ponctuelle  $q$  ?

Une possibilité est d'utiliser la fonction  $\delta$  de Dirac :

$$\delta_{\epsilon}^3(\vec{x} - \vec{x}') = \begin{cases} \frac{1}{v}, & |\vec{x} - \vec{x}'| < \epsilon \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.20)$$

avec  $v = \frac{4}{3}\pi\epsilon^3$ , ainsi nous avons  $\rho_{\epsilon}(\vec{x} - \vec{x}') = q\delta_{\epsilon}^3(\vec{x} - \vec{x}')$ , et plus formellement :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \rho_{\epsilon}(\vec{x} - \vec{x}') = q\delta^3(\vec{x} - \vec{x}')$$

La forme explicite de  $\rho_{\epsilon}$  n'est pas essentielle, plusieurs représentations de la fonction  $\delta$  peuvent être prises, par exemple :

$$\delta_{\epsilon}^3(\vec{x} - \vec{x}') = \left(\frac{1}{\pi\epsilon^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{|\vec{x} - \vec{x}'|^2}{\epsilon^2}\right) \quad (2.21)$$

La fonction  $\delta$  peut être définie dans des espaces de toutes dimensions, nous écrivons pour un espace à  $n$  dimensions :  $\delta^n(\vec{x} - \vec{x}')$ .

### 2.4.1 Propriétés de la fonction delta

Nous listons ici quelques propriétés de la fonction  $\delta$  :

a)

$$I_1 = \int f(\vec{x}') \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') d^3x' = f(\vec{x}) \quad (2.22)$$

- Preuve :

$$I_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int f(\vec{x}') \delta_\epsilon^3(\vec{x} - \vec{x}') d^3 \vec{x}' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int f(\vec{x} - \vec{z}) \delta_\epsilon^3(\vec{z}) d^3 \vec{z} \quad (2.23)$$

où nous avons fait le changement de variable  $\vec{x} - \vec{x}' = \vec{z}$ . Ce qui donne en développant :

$$I_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|\vec{z}| < \epsilon} \left( f(\vec{x}) - \vec{z} \cdot \vec{\nabla} f + \dots \right) \frac{1}{v} d^3 \vec{z} \quad (2.24)$$

$$I_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{f(\vec{x})}{v} \int_{|\vec{z}| < \epsilon} d^3 \vec{z} - \frac{\vec{\nabla} f}{v} \cdot \underbrace{\int_{|\vec{z}| < \epsilon} \vec{z} d^3 \vec{z}}_{\mathcal{O}(\epsilon^4)} + \dots \right) = f(\vec{x}) \quad (2.25)$$

b)

$$I_2 = \int f(\vec{x}') \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \delta_\epsilon^3(\vec{x} - \vec{x}') d^3 \vec{x}' = -\vec{\nabla} f(\vec{x}) \quad (2.26)$$

• Preuve :

$$\begin{aligned} I_2 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int f(\vec{x}') \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \delta_\epsilon^3(\vec{x} - \vec{x}') d^3 \vec{x}' \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \left( \vec{\nabla} \left( f(\vec{x}') \delta_\epsilon^3(\vec{x} - \vec{x}') \right) - \vec{\nabla} f(\vec{x}') \delta_\epsilon^3(\vec{x} - \vec{x}') \right) d^3 \vec{x}' \end{aligned} \quad (2.27)$$

En utilisant la formule du gradient et **a**) :

$$I_2 = \underbrace{\oint f(\vec{x}') \delta_\epsilon^3(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{S}}_{=0} - \vec{\nabla} f(\vec{x}) \quad (2.28)$$

car  $\delta_\epsilon^3(\vec{x} - \vec{x}') = 0$  à une surface infinie.

D'autres propriétés seront démontrées en exercice.

Revenons maintenant aux fonctions de Green. Pourquoi sont-elles si utiles ? Si  $G$  est connue, alors, nous avons tout de suite une solution pour les équations [2.16] et [2.17] :

En effet, pour l'équation [2.16],

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G(\vec{x}, \vec{x}') \rho(\vec{x}') d^3 \vec{x}' \quad (2.29)$$

appliquons l'opérateur  $-\Delta$  sur l'équation [2.29] :

$$-\Delta \phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int [-\Delta_{\vec{x}} G(\vec{x}, \vec{x}')] \rho(\vec{x}') d^3 \vec{x}' \quad (2.30)$$

qui donne par définition de la fonction de Green

$$-\Delta\phi(\vec{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \rho(\vec{x}') d^3\vec{x}' = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.31)$$

L'équation de Poisson est donc bien vérifiée par la solution ainsi trouvée.

Nous pouvons de la même façon écrire une solution pour le cas dynamique (pour l'équation [2.17]) :

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{\epsilon_0} \int G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') \rho(\vec{x}', t') d^3\vec{x}' dt' \quad (2.32)$$

Comme plus haut, nous pouvons appliquer l'opérateur de d'Alembert pour retrouver, cette fois-ci, l'équation [2.17] :

$$\left[ -\Delta_{\vec{x}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \int \left[ -\Delta_{\vec{x}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') \rho(\vec{x}', t') d^3\vec{x}' dt' \quad (2.33)$$

$$\left[ -\Delta_{\vec{x}} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \phi = \frac{1}{\epsilon_0} \int \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') \rho(\vec{x}', t') d^3\vec{x}' dt' = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\vec{x}, t) \quad (2.34)$$

Comme vous remarquez, il est plus facile de trouver une fonction de Green que de résoudre une équation générale. En effet, dans notre cas, la distribution a une forme très spécifique : elle est égale à zéro sauf dans un point. Il faut également noter que la fonction de Green n'est pas définie de façon unique : nous pouvons toujours lui ajouter une solution de l'équation homogène.

## 2.4.2 Exemple 1 : cas statique

Pour faire un premier exemple, nous allons chercher la fonction de Green pour le potentiel scalaire, dans le cas de l'électrostatique. Nous devons donc vérifier l'équation suivante :

$$-\Delta_{\vec{x}} G(\vec{x}, \vec{x}') = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \quad (2.35)$$

pour une charge ponctuelle située en  $\vec{x}' = 0$ . Nous considérons la solution de symétrie sphérique ; nous rappelons la forme du Laplacien en coordonnées sphériques

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Si nous prenons la représentation  $\delta_{\epsilon}$ , alors l'équation [2.35] devient pour  $r > \epsilon$  :

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.36)$$

en simplifiant, nous obtenons

$$r^2 \frac{\partial G}{\partial r} = \text{Const} \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial r} = \frac{\text{Const}}{r^2}$$

Finalement :

$$G(r)|_{r>\epsilon} = \frac{C}{r}$$

(où  $C$  est une constante différente de Const.)

Il nous reste à déterminer cette constante  $C$ , grâce à l'équation [2.35] :

$$\begin{aligned} & \int_0^\epsilon -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) 4\pi r^2 dr = 1 \\ & = -4\pi \int_0^\epsilon \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) dr = 4\pi \left[ -r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right]_0^\epsilon \\ & = 4\pi \left( \left[ r^2 \frac{C}{r^2} \right]_{r=\epsilon} + \underbrace{\left[ r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right]_{r=0}}_{=0} \right) = 4\pi C = 1 \end{aligned}$$

Nous avons donc  $C = \frac{1}{4\pi}$ . Nous en déduisons la forme de la fonction de Green :

$$G(\vec{x}, \vec{x}') = \frac{1}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} \quad (2.37)$$

Ainsi, nous pouvons en tirer la solution pour l'électrostatique :

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{x}') \frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x' \quad (2.38)$$

### 2.4.3 Exemple 2 : cas dynamique

Nous pouvons effectuer le même genre de calculs pour le cas dynamique.

L'équation à résoudre devient :

$$\left[ -\Delta_x + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \right] G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') \delta(t - t') \quad (2.39)$$

Nous allons, pour résoudre ce problème, faire des transformations de Fourier.

Nous les définissons de la façon suivante :

$$G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{x}, \omega; \vec{x}', t') e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.40)$$

ce qui donne pour la transformation inverse :

$$G(\vec{x}, \omega; \vec{x}', t') = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\vec{x}, t; \vec{x}', t') e^{i\omega t} dt \quad (2.41)$$

Pourquoi passons-nous dans l'espace de Fourier ? L'intérêt en est évident lorsque nous écrivons les relations de transformations [2.40] et [2.41] pour la fonction  $\delta$  :

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-t')} d\omega \quad (2.42)$$

car

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \delta(t) dt = 1 \quad (2.43)$$

En reportant ce résultat dans l'équation [2.39] nous arrivons à :

$$\left[ -\Delta_x - \frac{\omega^2}{c^2} \right] G(\vec{x}, \omega; \vec{x}', t') = \delta^3(\vec{x} - \vec{x}') e^{i\omega t'} \quad (2.44)$$

Posons  $K = \frac{\omega}{c}$  et prenons  $x' = 0$  en utilisant la symétrie sphérique. L'équation [2.44] devient alors :

$$- \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) + K^2 G \right] = \delta_\epsilon^3 e^{i\omega t'} \quad (2.45)$$

• Si  $r > \epsilon$  alors [2.45] devient :

$$- \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) + K^2 G \right] = 0 \quad (2.46)$$

pour résoudre [2.46], écrivons la fonction de Green sous la forme :  $G = \frac{1}{r} F(r)$ .  
Nous avons :

$$\frac{\partial G}{\partial r} = -\frac{F}{r^2} + \frac{F'}{r} \rightarrow \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) = -F' + F' + rF'' = rF'' \quad (2.47)$$

En injectant cela dans [2.46], nous obtenons l'équation différentielle bien connue :  $\frac{1}{r} (F'' + K^2 F) = 0$ , dont les solutions s'écrivent  $F = Ae^{iKr} + Be^{-iKr}$ .  
Nous avons donc la forme générale de la fonction de Green :

$$G = \frac{A}{r} e^{iKr} + \frac{B}{r} e^{-iKr} \quad (2.48)$$

• Considérons le cas  $r < \epsilon$  :

comme nous avons maintenant :

$$\int_0^\epsilon K^2 G d^3 \vec{x} \sim \mathcal{O}(K^2) \frac{1}{\epsilon} \epsilon^3 \sim \mathcal{O}((K\epsilon)^2) \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

nous trouvons

$$A + B = e^{i\omega t'} \frac{1}{4\pi}$$

la solution  $B = 0$  est appelée fonction de Green retardée, notée  $G_R$ ,

la solution  $A = 0$  est appelée fonction de Green avancée, notée  $G_A$ .  
 Nous verrons plus tard le pourquoi de ces appellations. Prenons pour l'instant la solution retardée :

$$G_R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{iK|\vec{x}-\vec{x}'|+i\omega(t'-t)} d\omega}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \frac{d\omega}{4\pi} \quad (2.49)$$

$$G_R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\omega}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|+i\omega(t'-t)} \frac{d\omega}{4\pi} \quad (2.50)$$

Par définition de la transformée de Fourier de la fonction  $\delta$ , nous trouvons :

$$G_R(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \delta\left(t' - t + \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right) \frac{1}{4\pi} \quad (2.51)$$

Par pure analogie, nous pouvons écrire la solution avancée :

$$G_A(\vec{x}, t; \vec{x}', t') = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \delta\left(t' - t - \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right) \frac{1}{4\pi} \quad (2.52)$$

Ainsi, la solution pour le potentiel électrodynamique s'écrit :

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{x}', t') \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \delta\left(t' - t + \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|\right) d^3x' dt' \quad (2.53)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\vec{x}', t - \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|) \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' \quad (2.54)$$

Ce qui signifie que le potentiel au temps  $t$  dépend de la distribution de charges à l'instant  $t - \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|$ . Nous avons donc un signal retardé.

Pour le potentiel vecteur, la solution peut-être trouvée immédiatement :

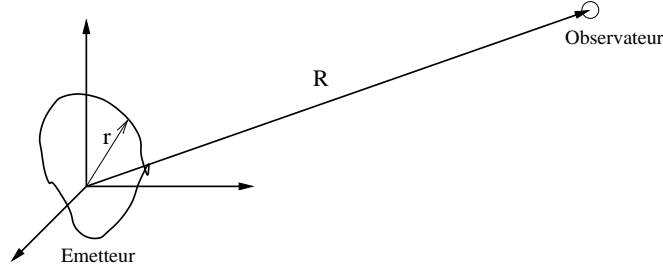
$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int \vec{j}(\vec{x}', t - \frac{1}{c}|\vec{x}-\vec{x}'|) \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d^3x' \quad (2.55)$$

Remarque : ces solutions sont des solutions particulières. Une solution générale est une solution particulière + une solution arbitraire de l'équation homogène.



## 2.5 La radiation du dipôle (rappel)

Une conséquence importante des solutions retardées est l'émission d'ondes électromagnétiques. Le résultat principal est la radiation du dipôle.



Nous considérons le cas suivant :  $r \ll R$  et  $v \ll c$ , où  $v$  représente la vitesse des particules dans l'émetteur. Les potentiels sont alors donnés par les formules :

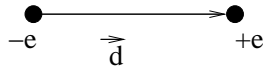
$$\vec{A}(R, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\vec{p}}|_{t-\frac{R}{c}}}{R} \quad (2.56)$$

$$\phi(R, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left[\vec{p} + \frac{R}{c}\dot{\vec{p}}\right]_{t-\frac{R}{c}} \cdot \vec{R}}{R^3} \quad (2.57)$$

où  $\vec{p}$  est le moment dipolaire du système, qui s'écrit :

$$\vec{p}(t) = \int \rho(\vec{x}, t) \vec{x} d^3 \vec{x} \quad (2.58)$$

Prenons l'exemple de deux particules ponctuelles de charges opposées



alors la densité de charges est  $\rho = -e\delta^3(\vec{x} + \frac{\vec{d}}{2}) + e\delta^3(\vec{x} - \frac{\vec{d}}{2})$ , nous avons donc pour le moment dipolaire :

$$\vec{p} = e\frac{\vec{d}}{2} + e\frac{\vec{d}}{2} = e\vec{d}$$

Pour des distances très grandes, les champs s'écrivent alors :

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{c} \frac{\ddot{\vec{p}} \times \vec{R}}{R^2} \sim O\left(\frac{1}{R}\right) \quad (2.59)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{(\ddot{\vec{p}} \times \vec{R}) \times \vec{R}}{R^3} = c\vec{B} \times \frac{\vec{R}}{R} \quad (2.60)$$

Le vecteur de Poynting se calcule comme suit :

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}$$

le flux d'énergie est donc donné par :

$$\frac{dE}{dt} = \int \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} (\ddot{\vec{p}})^2 \quad (2.61)$$

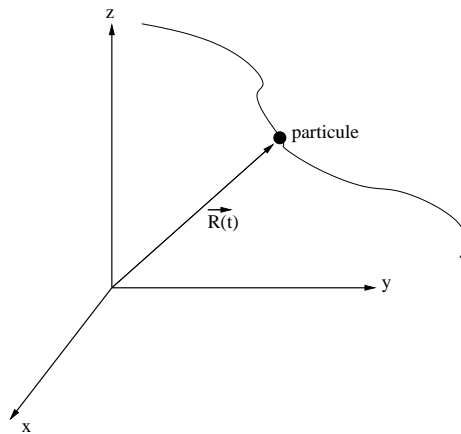


## Chapitre 3

# Les potentiels de Liénard-Wiechert

Considérons le problème suivant :

Une particule chargée suit une trajectoire arbitraire, nous voulons connaître les champs créés par cette particule, l'observateur étant placé à l'origine.



Notons ici que ce problème est à l'origine de :

- la construction de la mécanique relativiste,
- la compréhension de tout problème de radiation, pour un cas arbitraire ( $v \sim c$ ).

### 3.1 Calcul des potentiels

Nous prendrons les notations suivantes pour la trajectoire de la particule :

$$\begin{cases} x = R_1(t) \\ y = R_2(t) \\ z = R_3(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

Soit, pour le vecteur position  $\vec{R}(t) = (R_1, R_2, R_3)$ . Avec ces notations, nous pouvons écrire la densité de charges et la densité de courants comme :

$$\rho = e\delta(\vec{x} - \vec{R}(t)) \quad (3.2)$$

$$\vec{j} = e\dot{\vec{R}}\delta(\vec{x} - \vec{R}(t)) = e\vec{v}\delta(\vec{x} - \vec{R}(t)) \quad (3.3)$$

Il est maintenant aisé d'écrire la forme des potentiels. Nous avons, par exemple, pour le potentiel scalaire :

$$\phi(0, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int e\delta\left(\underbrace{\vec{x}' - \vec{R}(t - \frac{|\vec{x}'|}{c})}_{\text{expression compliquée}}\right) \frac{1}{|\vec{x}'|} d^3\vec{x}' \quad (3.4)$$

L'idée qui nous vient est d'effectuer un changement de variable, de façon à simplifier l'expression du potentiel. Faisons ce changement en posant :

$$\vec{x} = \vec{x}' - \vec{R}(t - \frac{|\vec{x}'|}{c}) \quad (3.5)$$

Nous avons donc :

$$d^3\vec{x} = \frac{D(\vec{x})}{D(\vec{x}')} d^3\vec{x}' = \det \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| d^3\vec{x}' \quad (3.6)$$

où nous n'oublions pas le Jacobien de la transformation. Nous utiliserons le fait que  $\frac{\partial}{\partial x_i} |\vec{x}| = \frac{x_i}{|\vec{x}|}$ . Faisons le calcul explicitement :

$$\frac{D(\vec{x})}{D(\vec{x}')} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x'_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x'_3} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$\frac{D(\vec{x})}{D(\vec{x}')} = \begin{vmatrix} 1 + v_1 \frac{x'_1}{c|\vec{x}'|} & v_1 \frac{x'_2}{c|\vec{x}'|} & v_1 \frac{x'_3}{c|\vec{x}'|} \\ v_2 \frac{x'_1}{c|\vec{x}'|} & 1 + v_2 \frac{x'_2}{c|\vec{x}'|} & v_2 \frac{x'_3}{c|\vec{x}'|} \\ v_3 \frac{x'_1}{c|\vec{x}'|} & v_3 \frac{x'_2}{c|\vec{x}'|} & 1 + v_3 \frac{x'_3}{c|\vec{x}'|} \end{vmatrix} = \det \left[ \delta_{ij} + \frac{v_i x'_j}{c|\vec{x}'|} \right] \quad (3.8)$$

Cette dernière équation peut être évaluée plus facilement dans un système de coordonnées pour lequel nous avons :  $R_1 = R_2 = 0$ ,  $R_3 \neq 0$ . Nous pouvons, en effet, toujours nous ramener à ce point par une rotation ; nous obtenons alors :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + v_3 \frac{x'_3}{c|\vec{x}'|} \end{vmatrix} = \underbrace{1 + v_3 \frac{x'_3}{c|\vec{x}'|}}_{\text{nouveau systeme}} = \underbrace{1 + \vec{v} \cdot \frac{\vec{x}'}{c|\vec{x}'|}}_{\text{systeme arbitraire}} \quad (3.9)$$

Ainsi, nous pouvons écrire explicitement le potentiel scalaire, après le changement de variable [3.5]. Nous injectons l'expression du Jacobien [3.9] dans [3.4], et nous obtenons :

$$\phi(0, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{e}{|\vec{x}'|} \frac{\delta(\vec{x})}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}'}{c|\vec{x}'|}} d^3 \vec{x} \quad (3.10)$$

où  $\vec{x}'$  est solution de l'équation [3.5]. Donc :

$$\phi(0, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{x}'}{c|\vec{x}'|}} \frac{1}{|\vec{x}'|} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{x}'| + \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{x}'} \quad (3.11)$$

avec  $\vec{x}' = \vec{R}(t - \frac{|\vec{x}'|}{c}) = \vec{R}(t')$ . Nous avons alors la forme finale du potentiel scalaire :

$$\phi(0, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t') + \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{R}(t')} \quad (3.12)$$

Pour le potentiel vecteur, nous obtenons :

$$\vec{A} = \frac{e\vec{v}}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R + \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{R}} \Bigg|_{t'=t-\frac{R}{c}}. \quad (3.13)$$

Ces expressions traduisent, du point de vue du sens physique, le retard. Les phénomènes électrodynamiques ont un temps de propagation fini :  $\frac{R(t')}{c}$ . Pour nous convaincre de la validité des formules trouvées, choisissons une vitesse de propagation infinie ( $c \rightarrow \infty$ ). Nous retrouvons alors la loi de Coulomb pour  $\phi$ , et l'expression du potentiel magnétostatique pour  $\vec{A}$  (loi de Biot-Savart).

### 3.1.1 Dérivation des champs magnétiques et électriques pour le cas non-relativiste

Nous allons partir des expressions des potentiels scalaires et vecteurs :

$$\begin{cases} \phi(x, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R + \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{R}} \Bigg|_{t'} \\ \vec{A}(x, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}}{R + \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{R}} \Bigg|_{t'} \end{cases} \quad (3.14)$$

où nous avons :  $\vec{R} = \vec{R}_0 - \vec{x}$ , avec  $\vec{R}_0(t)$  définissant la trajectoire de la particule chargée. Nous trouvons alors  $t'$  grâce à l'équation suivante :

$$t' = t - \frac{R(t')}{c} \quad (3.15)$$

Nous voulons trouver  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  dans le cas non relativiste ( $\frac{v}{c} \ll 1$ ), nous allons donc négliger les termes du type :  $(\frac{v}{c})^2$ ,  $(\frac{v}{c})^3$ ,  $\dot{v}v$ , etc. D'autre part, nous ne

considérons que les champs loin de la particule, nous négligerons donc également les termes du type  $\left(\frac{1}{R}\right)^n$  avec  $n \geq 2$ .

– 1<sup>ere</sup> étape : solution de l'équation [3.15]

une première approximation est de dire  $t' = t$ ,  
dans un second temps nous écrivons  $t' = t - \frac{R(t)}{c} = t_0(t, \vec{x})$ ,

enfin nous pouvons écrire :  $t' = t - \frac{R(t - \frac{R(t)}{c})}{c}$ , qui se développe comme suit :  
 $t' \approx t - \frac{R(t)}{c} + \frac{1}{c} \dot{R} \frac{R(t)}{c} = t_0 + O(v)$ , nous n'aurons pas besoin des termes en  $O(v)$  pour  $t'$ , voir plus bas.

– 2<sup>eme</sup> étape : approximations pour  $\vec{R}$  et  $\vec{v}$

$$\vec{R}(t') = \vec{R}(t_0) + \dot{\vec{R}} \cdot O(v) = \vec{R}(t_0) + O(v^2)$$

$$\vec{v}(t') = \frac{dt_0}{dt'} \frac{d\vec{R}}{dt_0} = \vec{v}(t_0) + O(v^2)$$

– 3<sup>eme</sup> étape : développement de  $\phi$  et  $\vec{A}$  en puissances de  $v$ .

$$\begin{cases} \phi \approx \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{c} \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{R^2} + O(v^2) \right) \Big|_{t_0} \\ \vec{A} \approx \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}}{R} (1 + O(v)) \Big|_{t_0} \end{cases} \quad (3.16)$$

– 4<sup>eme</sup> étape : calculs intermédiaires

comme  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  et  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ , nous avons besoin de calculer  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  et  $\frac{\partial v_i}{\partial t}$ .

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial t_0} \frac{\partial t_0}{\partial x_j} = \dot{v}_i \left( -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x_j} |R_0 - \vec{x}| \right) = \frac{\dot{v}_i R_j}{c|R|} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial v_i}{\partial t_0} \frac{\partial t_0}{\partial t} = \dot{v}_i + O(v^2) \quad (3.18)$$

– 5<sup>eme</sup> étape : Notons que :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{R} \right) = O\left( \frac{1}{R^2} \right)$$

de même :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{R} \right) = O\left( \frac{1}{R^2} \right)$$

donc ces termes peuvent être négligés à grande distance.

– Dernière étape : calcul de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$

pour le champ magnétique :

$$B_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

ce qui donne, en utilisant le calcul [3.17] :

$$\vec{B} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1}{R^2} \dot{\vec{v}} \times \vec{R} \quad (3.19)$$

pour le champ électrique :

$$E_i = -\frac{\partial\phi}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial t} \approx \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{c} \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} \cdot \vec{R} \right) - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{v}_i}{R}$$

de la même façon, nous utilisons [3.17 et 3.18], et nous obtenons ainsi :

$$\vec{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{R} \left( \dot{\vec{v}} - \frac{\vec{R}}{R^2} (\dot{\vec{v}} \cdot \vec{R}) \right) = -c \frac{\vec{B} \times \vec{R}}{R} \quad (3.20)$$

dans ces expressions le temps est  $t_0$ . Rappelons que ces expressions ne sont valides que pour  $R \rightarrow \infty$ .



### 3.1.2 Comparaison avec le dipôle

Dans cette section, nous allons chercher les explicites expressions non-relativistes, pour les potentiels  $\phi$  et  $\vec{A}$ . Nous les comparerons alors aux expressions obtenues pour le rayonnement du dipôle. Cherchons une solution par itération de l'équation

$$t' = t - \frac{R(t')}{c} \quad (3.21)$$

de laquelle une première approximation est :  $t' = t$ , en seconde approximation, portons l'expression  $t' = t - \frac{R(t')}{c}$ , dans

$$R(t') + \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c} \Big|_t \quad (3.22)$$

$$= R\left(t - \frac{R}{c}\right) + \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c} \Big|_t \quad (3.23)$$

en faisant un développement de Taylor au premier ordre en  $\frac{R}{c}$ , nous avons pour [3.23]

$$= R(t) - \frac{\partial R}{\partial t} \frac{R}{c} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c} . \quad (3.24)$$

Faisons ici un petit calcul intermédiaire :

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sqrt{\vec{R} \cdot \vec{R}} = \frac{\partial(\vec{R} \cdot \vec{R})}{2R} \quad (3.25)$$

$$= \frac{1}{2R} 2\vec{R} \cdot \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} = \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{R} . \quad (3.26)$$

Grâce à ce résultat, nous pouvons écrire [3.24] :

$$R(t) - \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{R} \frac{R}{c} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{c} = R(t) , \quad (3.27)$$

ce qui donne pour le potentiel scalaire :

$$\phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(t)} \left( 1 + O\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \right) \quad (3.28)$$

et pour le potentiel vecteur :

$$\vec{A} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v} \Big|_{t - \frac{R}{c}}}{R(t)} \quad (3.29)$$

Il nous reste à retrouver les expressions du dipôle rappelées en [2.56] et [2.57].

Pour cela, nous considérons deux charges  $+e$  et  $-e$ , situées en  $\vec{R}_1$  et  $\vec{R}_2$ . Les deux charges sont proches l'une de l'autre, de telle sorte que si  $\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{R}_1 + \vec{R}_2)$ , nous ayons  $|\vec{R}_1 - \vec{R}_2| \ll R$ . En utilisant le principe de superposition, nous trouvons d'après les équations [3.28] et [3.29] :

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{\vec{p}}\Big|_{t-\frac{R}{c}}}{R(t)} \quad (3.30)$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}(t) \cdot \vec{R}(t)}{R^3(t)} \quad (3.31)$$

avec la définition du moment dipolaire :  $\vec{p} = e\vec{R}_1 - e\vec{R}_2$ .

L'équation pour  $\vec{A}$  correspond exactement à l'équation dipolaire. Prouvons qu'il en est de même pour  $\phi$ .

Nous remarquons que :

$$\left( \vec{p} + \frac{R}{c} \dot{\vec{p}} \right) \Big|_{t-\frac{R}{c}} = \vec{p}(t) - \frac{\partial \vec{p}}{\partial t} \frac{R}{c} + \frac{R}{c} \dot{\vec{p}} = \vec{p}(t) \quad (3.32)$$

L'équation [3.31] est donc la même que [2.57].

Ces transformations sont importantes, car elles nous permettent de déduire les champs des équations de Maxwell :

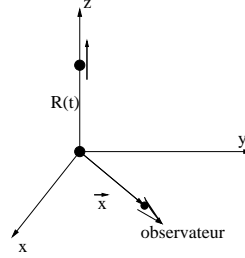
$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (3.33)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (3.34)$$

## 3.2 Cas simple : particule le long d'une ligne droite

Pour mieux comprendre le sens physique des potentiels de Liénard-Wiechert, nous allons étudier le cas d'une particule en mouvement le long d'une ligne droite.

Regardons le schéma suivant :



La trajectoire est paramétrisée par :

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) \neq 0 \end{cases}$$

et nous nous trouvons en un point arbitraire  $\vec{x}$ .

Ecrivons les potentiels dans ce cas

$$\phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z(t'))^2}}_{=R} + \frac{1}{c}\dot{z}(z(t') - z)} \quad (3.35)$$

$$A_z = \phi \frac{\dot{z}}{c^2} \quad (3.36)$$

tout étant évalué à l'instant

$$t' = t - \frac{1}{c}\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z(t'))^2} \quad (3.37)$$

Cette dernière équation est une expression compliquée de  $t'$  en fonction de dépendances arbitraires en  $R$  et  $t$ . Essayons maintenant de calculer les champs magnétiques et électriques.

### 3.2.1 Champ magnétique

Le champ  $\vec{B}$  est donné par  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Dans notre hypothèse, seule la composante  $A_z$  est non-nulle, donc

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_z}{\partial x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Nous avons une symétrie cylindrique, donc seule la composante  $\vec{e}_\varphi$  du champ magnétique est non-nulle. Il est donc suffisant de prendre  $y = 0$  et de calculer  $B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}$ .

### 3.2.2 Champ électrique

Le champ  $\vec{E}$  est donné par  $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ . Dans notre hypothèse, seule la composante  $A_z$  est non-nulle, donc

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \phi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Nous avons une symétrie cylindrique, comme plus haut, il est suffisant de prendre  $y = 0$  et de calculer  $E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$  et  $E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}$ .

Nous arrivons ici au coeur du calcul :  $t'$  est une fonction de  $x, z, t$ , si nous prenons  $y = 0$  dans l'équation [3.37].

Nous devons calculer :  $\frac{\partial t'}{\partial x}, \frac{\partial t'}{\partial z}, \frac{\partial t'}{\partial t}$ .

### 3.2.3 Calculs intermédiaires

Nous allons dans cette partie évaluer les différentielles.

$$\frac{dt'}{dx} = -\frac{1}{c} \left[ \frac{x}{R} + \frac{z - z(t')}{R} (-\dot{z}) \frac{dt'}{dx} \right] = -\frac{1}{c} \left[ \frac{x}{R} + \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{R} \frac{dt'}{dx} \right] \quad (3.40)$$

Donc :

$$\frac{dt'}{dx} = \frac{-\frac{1}{c} \frac{x}{R}}{1 + \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{cR}} \quad (3.41)$$

De la même façon :

$$\frac{dt'}{dz} = -\frac{1}{c} \left[ \frac{z - z(t')}{R} + \frac{z - z(t')}{R} (-\dot{z}) \frac{dt'}{dz} \right] \quad (3.42)$$

Ce qui donne :

$$\frac{dt'}{dz} = \frac{-\frac{1}{c} \frac{z - z(t')}{R}}{1 + \frac{\vec{R} \cdot \vec{v}}{cR}} \quad (3.43)$$

Il nous reste à calculer :

$$\frac{dt'}{dt} = 1 - \frac{1}{c} \left[ \frac{z - z(t')}{R} (-\dot{z}(t')) \frac{dt'}{dt} \right] = 1 - \frac{1}{c} \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{R} \frac{dt'}{dt} \quad (3.44)$$

Soit :

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{c} \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{R}\right)} \quad (3.45)$$

### 3.2.4 Résultats

Les équations [3.41, 3.43, 3.45] peuvent être injectées dans les expressions des champs [3.38, 3.39], nous trouverons ainsi les résultats cherchés.

Calculons la composante  $E_x$

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(R + \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c}\right)^2} \left[ \frac{x}{R} + \left( -\frac{\dot{z}(z - z(t'))}{R} + \frac{\ddot{z}(z(t') - z) + \frac{z^2}{c}}{c} \right) \frac{dt'}{dx} \right] \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(R + \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c}\right)^2} \left[ \frac{x}{R} + \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{R} + \frac{v^2}{c} + \frac{\dot{v} \cdot \vec{R}}{c} \right) \frac{-\frac{x}{cR}}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{cR}} \right] \\ &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(R + \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c}\right)^2} \frac{x}{R} \left[ 1 - \frac{1}{c} \frac{1}{1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{cR}} \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{R} + \frac{v^2}{c} + \frac{\dot{v} \cdot \vec{R}}{c} \right) \right] \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement :

$$E_x = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left(R + \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c}\right)^3} x \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} - \frac{\dot{v} \cdot \vec{R}}{c^2} \right] \quad (3.46)$$

$$E_y = 0 \quad (3.47)$$

Pour la composante  $E_z$ , il suffit de faire un calcul similaire. Le résultat final, pour le cas général (trajectoire arbitraire) est le suivant :

$$\vec{E} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(R + \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c}\right)^3} \left( \vec{R} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right) - \frac{\vec{R} \times \left[ \left( \vec{R} + \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right) \times \dot{\vec{v}} \right]}{c^2 \left(R + \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c}\right)^3} \right\} \quad (3.48)$$

Pour trouver le champ magnétique il suffit de faire :

$$\vec{B} = -\frac{1}{c} \frac{\vec{R}}{R} \times \vec{E} . \quad (3.49)$$

### 3.2.5 Interprétation des résultats : la radiation

Nous allons maintenant regarder le sens physique des équations [3.48, 3.49] que nous venons d'obtenir. Pour cela, nous allons étudier la limite lorsque  $R \rightarrow \infty$ .

Dans cette limite, nous distinguons deux termes dans l'expression [3.48], ils ont deux comportements différents

$$\vec{E}\Big|_{1^{\text{er}} \text{ terme}} \approx O\left(\frac{1}{R^2}\right)$$

exactement comme pour une charge ponctuelle. Alors que le second terme donne :

$$\vec{E}\Big|_{2^{\text{e}} \text{ terme}} \approx O\left(\frac{1}{R}\right)$$

terme qui est dominant aux grandes distances. Le champ  $\vec{B}$  qui est lié au champ électrique à le même comportement, ce qui signifie que le vecteur de Poynting se comporte en  $O\left(\frac{1}{R^2}\right)$ .

Donc le flux d'énergie  $\approx R^2 \cdot O\left(\frac{1}{R^2}\right) \approx \text{const.}$  Alors, il y a de la radiation d'énergie.

Remarque : le second terme est différent de zéro seulement si  $\dot{\vec{v}} \neq 0$ , c'est-à-dire si la particule est accélérée.

Calculons le vecteur de Poynting pour des distances  $R$  importantes : nous avons pour le champ électrique, dans le cas général :

$$\vec{E}\Big|_{R \rightarrow \infty} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R} \times \left[ \left( \vec{R} + \frac{\vec{v}}{c} R \right) \times \dot{\vec{v}} \right]}{c^2 \left( R + \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c} \right)^3} \quad (3.50)$$

Ce qui nous dit que  $\vec{E} \perp \vec{R}$  donc  $\vec{E} \cdot \vec{R} = 0$ . Or, le vecteur de Poynting est donné par

$$\vec{S} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B} = -\epsilon_0 c^2 \frac{1}{R} \frac{1}{c} \vec{E} \times \left( \vec{R} \times \vec{E} \right) \quad (3.51)$$

Soit, en récrivant le double produit vectoriel :

$$\vec{S} = -\frac{\epsilon_0 c}{R} \left[ \vec{R}(\vec{E})^2 - \underbrace{\vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{R})}_{=0} \right] = -\epsilon_0 c |\vec{E}|^2 \frac{\vec{R}}{R} \quad (3.52)$$

Pour avoir une expression explicite du vecteur de Poynting, il nous reste à évaluer  $|\vec{E}|$ . Pour cela, choisissons un cas simple :

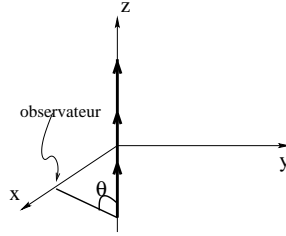
Pour la particule

$$\begin{cases} R_1(t) = R_2(t) = 0 \\ R_3(t) = R(t) \end{cases}$$

L'observateur se trouve en

$$\begin{cases} x = x_1 = r \\ y = z = 0 \end{cases}$$

Nous appellerons  $\theta$  l'angle entre l'axe  $Oz$  et la direction du point d'observation.



Avec ce choix de paramètres, nous avons les relation suivantes :

$$\vec{v} \times \dot{\vec{v}} = 0 ; |\vec{R} \times \dot{\vec{v}}| = R\dot{v} \sin \theta$$

d'où  $|\vec{R} \times [(\vec{R} + \frac{\vec{v}}{c}R) \times \dot{\vec{v}}]| = R^2\dot{v} \sin \theta$ . Ce qui donne pour  $|E|$

$$|\vec{E}| = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2\dot{v} \sin \theta}{c^2 \left(R + \frac{\vec{v} \cdot \vec{R}}{c}\right)^3} \quad (3.53)$$

Nous reportons ce résultat dans [3.52] et nous avons :

$$\vec{S} = -\epsilon_0 c \frac{\vec{R}e^2}{R(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{c^4} \frac{1}{R^6} R^4 \dot{v}^2 \sin^2 \theta \frac{1}{\left[1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right]^6}$$

Soit :

$$\vec{S} = \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \left(-\frac{\vec{R}}{R}\right) \frac{1}{R^2} \frac{\dot{v}^2 \sin^2 \theta}{\left[1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right]^6} \quad (3.54)$$

De là, nous pouvons calculer  $\frac{dE}{dt}$ , l'énergie émise par le système, en intégrant le vecteur de Poynting sur une surface :

$$\frac{dE}{dt} = \int \vec{S} \cdot d\vec{s} = \frac{e^2\dot{v}^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \frac{\sin^2 \theta d(\cos \theta)}{\left[1 - \frac{v \cos \theta}{c}\right]^6} 2\pi$$

Ce qui donne

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2\dot{v}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{1 + \frac{1}{5}\frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^4} \quad (3.55)$$

Ce résultat montre que si  $v \rightarrow c$  alors  $\frac{dE}{dt} \rightarrow \infty$ . Ce qui est impossible, nous en déduisons donc l'impossibilité d'accélérer une particule de  $v \rightarrow c$ .

Prenons maintenant la limite non-relativiste de la formule [3.55], ce qui revient à faire  $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ . Nous obtenons alors :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{e^2\dot{v}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{\ddot{p}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (3.56)$$

Ce qui est exactement la formule du dipôle obtenue en [2.61].

### 3.2.6 Structure de la radiation

Regardons plus en détail la structure de la radiation lorsque  $v \rightarrow c$  : d'après la formule [3.54], nous pouvons récrire la dépendance du module du vecteur de Poynting en fonction de l'angle  $\theta$

$$|\vec{S}(\theta)| \sim \frac{\sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v}{c} \cos \theta\right)^6} \approx \frac{\theta^2}{\left(1 - \frac{v}{c} + \frac{v}{2c} \theta^2\right)^6}$$

Cette approximation pour  $\theta$  petit, nous donne l'expression :

$$|\vec{S}(\theta)| \approx \left[ \frac{\theta}{\left(1 - \frac{v}{c} + \frac{v}{2c} \theta^2\right)^3} \right]^2 = f(\theta)^2 \quad (3.57)$$

Cherchons  $\theta_0$ , la position approximative du maximum :

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\theta} &= \frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c} + \frac{v}{2c} \theta^2\right)^3} - 3 \frac{\theta^2}{\left(1 - \frac{v}{c} + \frac{v}{2c} \theta^2\right)^4} = 0 \\ \Rightarrow 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2} &= 3\theta^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{5\theta^2}{2} = 1 - \frac{v}{c} \end{aligned}$$

Ce qui donne un maximum lorsque  $\theta_0 \approx \sqrt{\frac{2}{5} \left(1 - \frac{v}{c}\right)}$





## Chapitre 4

# Equations de Maxwell et transformations de Galilée

### 4.1 Principe d'invariance et propriétés de l'espace-temps en dynamique Newtonienne

Considérons un problème typique en dynamique Newtonienne : la description du mouvement de  $N$  particules, ayant des interactions de paires, dépendant seulement des distances entre ces particules. Nous pouvons écrire l'énergie de ce système

$$E = E_{cin} + E_{pot}$$

avec  $E_{cin} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i}$  et  $E_{pot} = \sum_{i,j, i \neq j} U(|\vec{x}_i - \vec{x}_j|)$ . L'Hamiltonien (ici l'énergie) est invariant sous les transformations du type :

- Translation :

$$\vec{x}_i \rightarrow \vec{x}_i + \vec{x}_0$$

Nous savons qu'il existe une relation profonde entre symétrie et loi de conservation. Dans le cas présent, la symétrie mise en jeu implique la conservation de l'impulsion totale  $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$ , avec la définition habituelle de l'impulsion  $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{x}}_i$ .

Nous allons vérifier cette conservation :

$$\dot{\vec{P}} = \sum_i \dot{\vec{p}}_i = \sum_i \left( -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i} \right) = -\frac{\partial U}{\partial \vec{x}_0} = 0$$

car  $\frac{\partial U}{\partial \vec{x}_0} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i} \frac{\partial \vec{x}_i}{\partial \vec{x}_0} = \sum_i \frac{\partial U}{\partial \vec{x}_i}$ .

- Rotation :

$$\vec{x}_i \rightarrow \sum_j O_{ij} \vec{x}_j, \quad OO^T = 1$$

Dans le cas de la rotation, nous savons que la quantité conservée est le moment cinétique :

$$\vec{L} = \sum_i \vec{x}_i \times \vec{p}_i$$

Pour le vérifier, nous pouvons établir le même type de preuve que plus haut.

- Translation dans le temps :

$$t \rightarrow t + t_0$$

Dans ce cas-ci, la quantité conservée est l'énergie.

## 4.2 Electrodynamique et transformations de Galilée

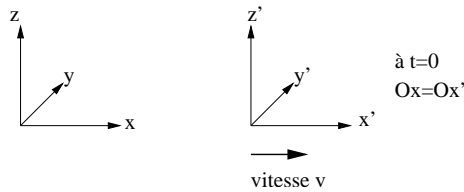
Il existe aussi des invariances plus subtiles, les transformations de Galilée en sont un bon exemple :

$$\begin{aligned} \vec{x}_i &\rightarrow \vec{x}'_i = \vec{x}_i - \vec{v}t \\ t &\rightarrow t' = t \end{aligned}$$

La distance entre deux points est conservée :  $\vec{x}_i - \vec{x}_j \rightarrow \vec{x}'_i - \vec{x}'_j$ .

L'accélération est conservée :  $\ddot{x}_i \rightarrow \ddot{x}'_i$ .

Du point de vue du sens physique, une telle transformation revient à faire un changement de référentiel, ce que nous pouvons représenter par le schéma suivant :



Nous sommes ammenés aux conclusions suivantes :

- La physique est la même dans tous les systèmes de coordonnées en mouvement relatif constant les uns par rapport aux autres.
- Le temps est absolu.
- Il n'existe pas de mouvement absolu.

Nous allons maintenant essayer d'appliquer à l'électrodynamique les transformations de Galilée. Que se passe-t-il pour la densité de charges  $\rho$  et pour la densité de courants  $\vec{j}$ ?

$\rho$  est, par définition, la charge par unité de volume, comme l'élément de volume  $d^3\vec{x}$  ne change pas,  $\rho$  reste invariant sous la transformation de Galilée.

La densité de courant, par contre, change :  $\vec{j} \rightarrow \vec{j}' = \vec{j} - \vec{v}\rho$ .

Nous avons vu, en électrostatique et en magnétostatique, que les potentiels scalaires et vectoriel sont reliés à  $\rho$  et  $\vec{j}$  par les relations :

$$\begin{cases} \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(x')d^3\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \\ \vec{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0c^2} \int \frac{\vec{j}(x')d^3\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|} \end{cases}$$

les potentiels sont donc transformés comme suit

$$\begin{cases} \phi \rightarrow \phi' = \phi \\ \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \frac{\vec{v}}{c^2}\phi \end{cases}$$

Ainsi  $\rho$  et  $\phi$  se transforment comme le temps, alors que  $\vec{j}$  et  $\vec{A}$  se transforment comme une coordonnée. Ce que nous pouvons mettre sous la forme schématique :

$$\begin{cases} t \leftrightarrow \rho \leftrightarrow \phi \\ \vec{x} \leftrightarrow \vec{j} \leftrightarrow c^2\vec{A} \end{cases}$$

Ayant ceci en tête, nous allons prendre l'équation de Maxwell pour le potentiel scalaire, et vérifier son invariance :

$$-\Delta\phi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Nous prenons dans cet exemple le cas de deux référentiels en translation l'un par rapport à l'autre le long de l'axe des  $x$ , soit la transformation

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Il nous reste à évaluer comment les opérateurs vont se transformer

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'} \\ \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v \frac{\partial}{\partial x'} \end{cases},$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2v \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x'} + v^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \end{cases}$$

Nous en arrivons à l'expression suivante pour l'équation de Maxwell dans le nouveau référentiel :

$$-\Delta'\phi' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi'}{\partial t'^2} - \frac{2v}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \frac{\partial}{\partial x'}\phi' + \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2\phi'}{\partial x'^2} = \frac{\rho'}{\epsilon_0}$$

Les équations de Maxwell ne sont donc manifestement pas identiques suite à une transformation de Galilée.

Trois hypothèses s'offrent à nous :

- i) Il existe un mouvement absolu.
  - ii) Les équations de Maxwell sont fausses.
  - iii) Les transformations de Galilée ne sont pas les bonnes.
- Il s'avère que les hypothèses i) et ii) sont exclues par les faits expérimentaux.

### 4.3 Transformations de Lorentz

Il nous reste donc à envisager l'hypothèse (iii) du paragraphe précédent. Nous allons donc chercher une transformation qui laisse les équations de Maxwell invariantes.

Nous restons ici dans le même cadre que plus haut : seules les coordonnées  $x$  et  $t$  sont affectées par la transformation. Nous nous limitons donc à un espace de dimension 2. Nous représentons alors la transformation cherchée par une matrice  $2 \times 2$  notée  $\Lambda$ , telle que nous ayons :

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

avec

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{pmatrix}$$

Nous obtenons, en terme de coordonnées, les équations :

$$\begin{aligned} ct' &= \Lambda_{11}ct + \Lambda_{12}x \\ x' &= \Lambda_{21}ct + \Lambda_{22}x \end{aligned}$$

Les opérateurs se transforment :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \Lambda_{22} \frac{\partial}{\partial x'} + \Lambda_{12} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} &= \Lambda_{21} \frac{\partial}{\partial x'} + \Lambda_{11} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \end{aligned} ,$$

ce que nous pouvons écrire sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{21} \\ \Lambda_{12} & \Lambda_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x'} \end{pmatrix} = \Lambda^T \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x'} \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que l'opérateur  $-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  qui intervient dans l'équation de Maxwell, peut être écrit comme :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x'} \end{pmatrix}$$

Il se transforme donc comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} & \frac{\partial}{\partial x'} \end{pmatrix} \Lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda^T \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial x'} \end{pmatrix}$$

Ainsi, si :

$$\Lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Lambda^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

alors les équations de Maxwell sont invariantes. L'équation [4.1] peut s'écrire en terme de coordonnées, ce qui donne trois équations indépendantes :

$$\begin{cases} \Lambda_{11}^2 - \Lambda_{12}^2 = 1 \\ \Lambda_{21}^2 - \Lambda_{22}^2 = -1 \\ \Lambda_{11}\Lambda_{21} - \Lambda_{12}\Lambda_{22} = 0 \end{cases}$$

Nous avons quatre inconnues et trois équations, nous pouvons donc introduire un paramètre pour obtenir une famille de solutions. Appelons  $\chi$  ce paramètre, nous exprimons alors la solution comme :

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= \cosh \chi & \Lambda_{12} &= -\sinh \chi \\ \Lambda_{21} &= -\sinh \chi & \Lambda_{22} &= \cosh \chi, \end{aligned}$$

où  $\chi$  est appelé la rapidité. Nous avons pour les coordonnées :

$$\begin{cases} ct' = ct \cosh \chi - x \sinh \chi \\ x' = -ct \sinh \chi + x \cosh \chi \end{cases}$$

Quelle est l'interprétation physique de  $\sinh \chi$ ? Prenons  $x' = 0$  ceci nous donne  $x = ct \frac{\sinh \chi}{\cosh \chi} = vt$ . Alors,

$$\begin{aligned} \tanh \chi &= \frac{v}{c} \equiv \beta \\ \cosh \chi &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma & \sinh \chi &= \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\beta \end{aligned}$$

et la transformation a la forme suivante :

$$x' = \gamma(x - \beta ct) ; \quad ct' = \gamma(ct - \beta x) . \quad (4.2)$$

Pour obtenir la transformation inverse, il suffit de faire  $\beta \rightarrow -\beta$

Conclusion : la physique ne change pas si nous changeons de référentiel, et si nous changeons les coordonnées suivant la formule [4.2].

De telles transformations sont appelées des transformations de Lorentz. Nous pouvons généraliser [4.2] pour une direction arbitraire de la vitesse  $\vec{v}$  :

$$\vec{x}'_{\parallel} = \gamma(\vec{x}_{\parallel} - \vec{\beta} ct) ; \quad \vec{x}'_{\perp} = \vec{x}_{\perp} ; \quad ct' = \gamma(ct - \vec{\beta} \cdot \vec{x}) \quad (4.3)$$

où  $\vec{x}'_{\parallel} = \frac{\vec{\beta} \cdot \vec{x}}{\beta^2} \vec{\beta}$  et  $\vec{x}_{\perp} = \vec{x} - \vec{x}'_{\parallel}$ .

Les transformations correspondantes pour  $\rho$ ,  $\vec{j}$ ,  $\phi$ ,  $\vec{A}$  sont données par :

$$\begin{cases} c\rho' &= \gamma (c\rho - \vec{\beta} \cdot \vec{j}) \\ \vec{j}'_{\parallel} &= \gamma (\vec{j}_{\parallel} - \vec{\beta} c\rho) \\ \vec{j}'_{\perp} &= \vec{j}_{\perp} \\ \phi' &= \gamma (\phi - \vec{\beta} \cdot (c\vec{A})) \\ c\vec{A}'_{\parallel} &= \gamma (c\vec{A}_{\parallel} - \vec{\beta}\phi) \\ \vec{A}'_{\perp} &= \vec{A}_{\perp} . \end{cases} \quad (4.4)$$

On conclut donc que  $(c\rho, \vec{j})$  et  $(\phi, c\vec{A})$  transforment comme  $(ct, \vec{x})$  sous les transformations de Lorentz.

Nous voyons aussi que les transformations ne sont valides que pour  $\beta < 1$ .

#### 4.4 Potentiel d'une charge ponctuelle en mouvement

Pour vérifier notre travail, nous allons calculer le potentiel d'une particule chargée se déplaçant à une vitesse constante  $\vec{v}$  dans le référentiel du laboratoire. Partons de :

$$\begin{cases} \phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \\ \vec{A} = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Ainsi, à partir des transformations de Lorentz nous avons :  $\phi' = \gamma\phi$  soit

$$\phi' = \frac{e\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{y'^2 + z'^2 + \gamma^2 (x' + vt')^2}} .$$

Une autre possibilité s'offre à nous pour faire ce type de calcul : utiliser les potentiels de Liénard-Wiechert :

Pour cela, nous allons nous placer dans le système de coordonnées pour lequel la charge électrique se déplace à une vitesse  $-\vec{v}$  :

$$\phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{x}| + \frac{\vec{v} \cdot (\vec{R} - \vec{x})}{c}} \Bigg|_{t'} ,$$

où le temps retardé  $t'$  est donné par

$$t' = t - \frac{|\vec{R} - \vec{x}|}{c} \quad \Rightarrow \quad |\vec{R} - \vec{x}| = c(t - t') .$$

Or, comme  $R = -vt'$ , nous obtenons

$$t' = t - \frac{1}{c} \sqrt{y^2 + z^2 + (-vt' - x)^2}$$

donc :

$$|\vec{R} - \vec{x}| + \frac{\vec{v} \cdot (\vec{R} - \vec{x})}{c} = c(t - t') + \frac{v}{c}(vt' + x) = c \left[ \left( t + \frac{vx}{c^2} \right) - t' \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right]$$

Nous devons trouver  $t'$  :

$$(y^2 + z^2 + (vt' + x)^2) = c^2(t - t')^2$$

De là, nous tirons

$$\left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) t' = t + \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c} \sqrt{(x + vt)^2 + \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (y^2 + z^2)}$$

donc :

$$|\vec{R} - \vec{x}| + \frac{\vec{v} \cdot (\vec{R} - \vec{x})}{c} = \sqrt{(x + vt)^2 + \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) (y^2 + z^2)} .$$

Ceci n'est rien d'autre que le dénominateur du potentiel  $\phi$ , en le reportant nous obtenons :

$$\phi = \frac{e\gamma}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2 + \gamma^2 (x + vt)^2}} ,$$

ce qui est exactement l'expression obtenue à partir des transformations de Lorentz.

Pour le potentiel vecteur, nous avons :

$$\vec{A} = \frac{\vec{v}}{c^2} \phi$$





## Chapitre 5

# L'électrodynamique avec les quadrivecteurs

Nous arrivons maintenant à une contradiction. D'après les équations de Maxwell, nous trouvons les transformations de Lorentz. Mais, en partant des équations de Newton, nous obtenons les transformations de Galilée.

Nous en déduisons que l'équation de Newton doit être fautive pour de grandes vitesses  $v$ .

Notre but est donc de trouver une généralisation des équations de Newton, qui soit cohérente avec les transformations de Lorentz. Pour y parvenir, nous allons développer un formalisme 4-dimensionnel pour les équations de Maxwell.

### 5.1 Définitions : quadrivecteurs covariants et contravariants

Définition : un vecteur, dans l'espace à 3 dimensions, est un ensemble de 3 nombres qui se transforment comme  $(x, y, z)$  sous une rotation du système de coordonnées.

$$\vec{A} = A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} ; A' = OA ; OO^T = 1$$

nous avons des invariants : le produit scalaire

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A^T B \rightarrow A^T O^T O B = A^T B$$

Les opérations suivantes déterminent des grandeurs vectorielles ou scalaires :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{\nabla} \phi & \text{vecteur} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} & \text{scalaire} \\ \vec{A} \times \vec{B} & \text{vecteur} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} & \text{vecteur} \end{array} \right.$$

*IMPORTANT* : Pour la suite, nous utiliserons les notations suivantes :  
 $x^0 = ct$  ;  $x^1 = x$  ;  $x^2 = y$  ;  $x^3 = z$ , soit sous forme vectorielle :

$$x = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ou bien  $x^\mu$ , avec  $\mu = 0, 1, 2, 3$ , en mettant bien l'indice  $\mu$  en haut (quadrivecteur contravariant, voir ci-dessous).

Par la suite, nous ne considérerons que les transformations de Lorentz avec  $\vec{v} \parallel \vec{e}_x$ , c'est-à-dire les 'boosts' suivant  $x$ .

De cette façon, nous pourrions écrire les transformations de Lorentz sous une forme élégante :  $x \rightarrow x' = \Lambda x$ , avec la matrice  $\Lambda$  définie par :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Définition : un *quadrivecteur contravariant* est un ensemble de quatre nombres qui se transforment comme  $x^\mu$  si nous changeons de référentiel.

*Exemples* :  $j^\mu = (c\rho, \vec{j})^T$ ,  $A^\mu = (\phi, c\vec{A})^T$ .

Remarque : une transformation peut être écrite en terme de composantes comme :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \sum_{\nu} \Lambda^\mu_{\nu} x^\nu$$

La matrice  $\Lambda$  satisfait la relation  $\Lambda^T G \Lambda = G$ , où la matrice  $G$  est :  
 $G = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ .

Définition : La matrice  $G$  est appelée la *métrique* ; ses composantes sont  $g_{\mu\nu}$ , avec les indices en bas.

Définition : Un quadrivecteur covariant est un ensemble de 4 nombres qui sont dérivés d'un quadrivecteur contravariant  $a^\mu = (a_0, \vec{a})^T$  comme suit :

$$a_\mu = \sum_{\nu} g_{\mu\nu} a^\nu \quad \Rightarrow \quad a_\mu = (a_0, -\vec{a})^T .$$

Par la suite, nous utiliserons la convention d'Einstein

$$g_{\mu\nu} a^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} a^\nu ,$$

c'est-à-dire le symbole pour la somme est supprimé avec la convention qu'on doit toujours sommer sur des indices répétés en haut et en bas.

Notons ici la transformation d'un quadrivecteur covariant :

$$a'_\mu = g_{\mu\nu} a'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\alpha a^\alpha = g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\alpha g^{\alpha\beta} a_\beta = \Lambda_\mu^\beta a_\beta .$$

Sous la forme matricielle l'équation précédente est écrite

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ -\vec{a}' \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} a'_0 \\ \vec{a}' \end{pmatrix} = G \Lambda \begin{pmatrix} a_0 \\ \vec{a} \end{pmatrix} = G \Lambda G \begin{pmatrix} a_0 \\ -\vec{a} \end{pmatrix} = (\Lambda^{-1})^T \begin{pmatrix} a_0 \\ -\vec{a} \end{pmatrix} .$$

Ainsi, nous pouvons calculer le 'produit scalaire'<sup>1</sup> comme :

$$a'_\mu b'^\mu = \Lambda_\mu^\alpha a_\alpha \Lambda^\mu_\beta b^\beta = g^\alpha_\beta a_\alpha b^\beta = \delta^\alpha_\beta a_\alpha b^\beta = a_\alpha b^\alpha \quad (5.2)$$

ou

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ -\vec{a}' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b'_0 \\ \vec{b}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ -\vec{a} \end{pmatrix} \Lambda^{-1} \Lambda \begin{pmatrix} b_0 \\ \vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ -\vec{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ \vec{b} \end{pmatrix} . \quad (5.3)$$

Les produits scalaires de quadrivecteurs ne changent pas si nous changeons de référentiel, donc aussi la norme

$$x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - |\vec{x}|^2 = c^2 t^2 - |\vec{x}|^2 \quad (5.4)$$

est un invariant.

## 5.2 Les équations de Maxwell en 4 dimensions

Maintenant que nous avons décrit le formalisme lié au quadrivecteurs, nous allons pouvoir exprimer l'électrodynamique, et en particulier les équations de Maxwell, sous une forme adaptée à l'étude de problèmes relativistes.

### 5.2.1 Exemple 1 :

Regardons quelles sont les propriétés de transformation de

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

Nous avons déjà trouvé que :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} \\ \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \end{pmatrix} = \Lambda^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^0} \\ \frac{\partial}{\partial \vec{x}'} \end{pmatrix} ; \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x'^0} \\ \frac{\partial}{\partial \vec{x}'} \end{pmatrix} = (\Lambda^{-1})^T \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^0} \\ \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \end{pmatrix} . \quad (5.5)$$

---

<sup>1</sup>On a mis des guillemets, parce que ce n'est pas un produit scalaire d'après la définition mathématique. La raison c'est que la 'métrique'  $g_{\mu\nu}$  n'est pas définie-positive, mais indéfinie, c'est-à-dire il y a des quadrivecteurs non-nuls avec la norme nulle et même des quadrivecteurs avec la norme négative.

Donc  $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \partial_\mu$  est un vecteur covariant. Ainsi pour le quadripotentiel  $A^\mu$ , nous pouvons calculer le scalaire suivant :

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \vec{\nabla} \cdot (c\vec{A}) = c \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) ,$$

ce qui est exactement la forme de la condition de la jauge de Lorenz que nous avons pour les équations de Maxwell. Nous en déduisons que la condition de Lorenz ne change pas si on change de référentiel.

### 5.2.2 Exemple 2 :

Maintenant, regardons l'opérateur de d'Alembert :

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right)$$

Le produit scalaire de quadrivecteurs est invariant, or les équations de Maxwell sont de la forme :

$$\square A^\mu = \frac{1}{c\epsilon_0} j^\mu \quad (5.6)$$

La conservation de la charge électrique :

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (5.7)$$

est un invariant de Lorentz.

### 5.2.3 Transformation des champs, tenseur champ :

Nous devons comprendre comment les champs électrique et magnétique se transforment. Pour cela, nous allons considérer la quantité suivante :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.8)$$

Ceci est appelé le tenseur champ ; il est labelé par deux indices. Nous donnons ici quelques propriétés :

- i)  $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ , le tenseur champ est antisymétrique.
- ii) Le tenseur champ est invariant sous les transformations de jauge

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha .$$

Preuve :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &\rightarrow \partial_\mu (A_\nu - \partial_\nu \alpha) - \partial_\nu (A_\mu - \partial_\mu \alpha) = \\ &F_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu \alpha + \partial_\nu \partial_\mu \alpha = F_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (5.9)$$

iii) Les composantes du tenseur champ sont reliées aux champs électriques et magnétiques :

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ -E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ -E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

exemple de calcul des composantes typiques :

$$F_{01} = \partial_0 A_1 - \partial_1 A_0 = \frac{1}{c} \partial_t(-cA_x) - \partial_x \phi = E_x$$

$$F_{23} = \partial_2 A_3 - \partial_3 A_2 = \partial_y(-cA_z) - \partial_z(-cA_y) = -cB_x .$$

Grâce à ce tenseur, les équations de Maxwell peuvent s'écrire sous cette forme :  
Equations inhomogènes :

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c\epsilon_0} j^\nu \leftrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{j}{\epsilon_0} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases} , \quad (5.11)$$

où<sup>2</sup>

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -cB_z & cB_y \\ E_y & cB_z & 0 & -cB_x \\ E_z & -cB_y & cB_x & 0 \end{pmatrix} .$$

Equations homogènes :

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{cases} , \quad (5.12)$$

où  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  est le tenseur totalement antisymétrique (tenseur de Lévi-Civita).

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ une permutation paire de } (0123) \\ -1 & \text{si } (\mu\nu\rho\sigma) \text{ une permutation impaire de } (0123) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

De là, nous voyons une fois de plus que les équations de Maxwell ne changent pas. La conservation du courant peut être exprimée comme suit :

$$\underbrace{\partial_\nu \partial_\mu}_{\text{symétrique}} \underbrace{F^{\mu\nu}}_{\text{antisymétrique}} = \frac{1}{c\epsilon_0} \partial_\nu j^\nu = 0 \quad (5.13)$$

---

<sup>2</sup>  $F^{\mu\nu} \equiv g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta}$

Transformations de Lorentz de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  :

Pour trouver les transformations de Lorentz de  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ , il est maintenant suffisant de trouver la transformation de  $F^{\mu\nu}$ .

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta F^{\alpha\beta} \quad (5.14)$$

prenons, par exemple, la vitesse parallèle à l'axe ( $Ox$ ), alors, nous avons :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Soit, donc :  $\Lambda^0_0 = \gamma$ ,  $\Lambda^0_1 = -\beta\gamma$ ,  $\Lambda^1_0 = -\beta\gamma$ ,  $\Lambda^1_1 = \gamma$ .

Nous calculons les transformées :

$$\begin{aligned} F'^{01} &= \Lambda^0_\alpha \Lambda^1_\beta F^{\alpha\beta} \\ &= \Lambda^0_0 \Lambda^1_0 F^{00} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_0 F^{10} + \Lambda^0_0 \Lambda^1_1 F^{01} + \Lambda^0_1 \Lambda^1_1 F^{11} \\ &= \beta^2 \gamma^2 F^{10} + \gamma^2 F^{01} = F^{01} \gamma^2 (1 - \beta^2) = F^{01} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Nous en déduisons donc, pour le champ électrique :

$$\Rightarrow E'_x = E_x \quad (5.17)$$

Nous faisons un second calcul pour la composante perpendiculaire :

$$\begin{aligned} F'^{02} &= \Lambda^0_\alpha \Lambda^2_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^0_\alpha F^{\alpha 2} \\ &= \Lambda^0_0 F^{02} + \Lambda^0_1 F^{12} \end{aligned} \quad (5.18)$$

d'où :

$$-E'_y = \gamma(-E_y + \beta c B_z) . \quad (5.19)$$

Nous trouvons une équation analogue pour la troisième composante. Pour le champ électrique, nous pouvons donc écrire :

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \quad (5.20)$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma(\vec{E}_{\perp} - c\vec{B} \times \vec{\beta}) . \quad (5.21)$$

Nous effectuons le même type de calculs pour le champ magnétique :

$$F'^{23} = \Lambda^2_\alpha \Lambda^3_\beta F^{\alpha\beta} = F^{23} \Rightarrow B'_x = B_x \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} F'^{12} &= \Lambda^1_\alpha \Lambda^2_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^1_\alpha F^{\alpha 2} \\ &= \Lambda^1_1 F^{12} + \Lambda^1_0 F^{02} = \gamma F^{12} - \gamma\beta F^{02} \end{aligned} \quad (5.23)$$

ce qui donne :  $-cB'_z = \gamma(-cB_z + \beta E_y)$ . Donc :

$$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel} \quad (5.24)$$

$$\vec{B}'_{\perp} = \gamma(\vec{B}_{\perp} + \frac{1}{c}\vec{E} \times \vec{\beta}) . \quad (5.25)$$





## Chapitre 6

# Les particules dans les champs électromagnétiques

### 6.1 Les équations de Newton : Cas relativiste

Pour discuter du mouvement des particules, nous devons ajouter aux équations de Maxwell les équations de Newton, dans lesquelles la force de Lorentz va intervenir. Pour un cas non-relativiste elles s'écrivent :

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (6.1)$$

Nous voulons, dans cette partie, trouver une généralisation des équations [6.1] pour la mécanique relativiste. L'idée est la suivante : nous allons écrire les parties gauche et droite de [6.1] sous forme de quadri-vecteurs.

1. Considérons, dans un premier temps la partie gauche de l'équation [6.1] :  
La vitesse  $\frac{d\vec{x}}{dt}$  a des propriétés de transformations compliquées. Nous allons donc essayer de trouver une quantité plus simple.  
 $x^\mu$  est un quadri-vecteur  $\Rightarrow dx^\mu$  est donc également un quadri-vecteur. La quantité  $dx^\mu dx_\mu$ , appelée l'interval, est un scalaire. Nous notons :

$$ds^2 = dx_\mu dx^\mu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (6.2)$$

Si nous considérons une particule en mouvement, avec les coordonnées

$$x^i = x^i(t) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow \quad dx^i = v^i dt$$

Nous avons alors :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - v^2 dt^2 \quad \Rightarrow \quad ds = dt \sqrt{c^2 - v^2} = c \frac{dt}{\gamma}$$

$ds$  est un scalaire,  $dx^\mu$  un quadri-vecteur, donc  $\frac{dx^\mu}{ds}$  est un quadri-vecteur.

La quantité :

$$c \frac{dx^\mu}{ds}$$

est appelée la quadri-velocité (ou quadri-vitesse), dont les composantes sont :

$$c \frac{dx^\mu}{ds} = v^\mu = \gamma(c, \vec{v})$$

avec  $v_\mu v^\mu = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2$ . Ainsi, pour avoir un quadri-vecteur dans la partie gauche de [6.1], nous pouvons écrire :

$$mc^2 \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} \quad (6.3)$$

qui est  $m \frac{d^2 x}{dt^2}$  si  $v \ll c$ .

2. Considérons maintenant la partie droite de [6.1] : cette partie est composée de :  $\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$ . Essayons une combinaison du type :

$$\begin{aligned} & F^{\mu\nu} v_\nu \quad \text{pour } \mu = 1, 2, 3 \\ \Rightarrow & F^{10} v_0 + F^{12} v_2 + F^{13} v_3 = -F_{10} v^0 - F_{12} v^2 - F_{13} v^3 \\ & = \gamma E_1 c + \gamma c B_3 v^2 - \gamma c B_2 v^3 = \gamma (E_1 + (\vec{v} \times \vec{B})_1) c \end{aligned}$$

Donc :

$$F^{i\mu} v_\mu = \gamma (E^i + (\vec{v} \times \vec{B})^i) c \quad (6.4)$$

Ceci est la force de Lorentz à un facteur  $\gamma c$  près.

En mettant les équations [6.3] et [6.4] ensemble, nous obtenons la forme relativiste de [6.1] qui s'écrit :

$$mc^2 \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} v_\nu \quad (6.5)$$

Cette dernière équation est automatiquement invariante sous transformations de Lorentz. Elle est identique aux équations non-relativistes dans la limite des petites vitesses  $v \ll c$ . Notons aussi que nous obtenons une équation supplémentaire pour  $\mu = 0$ .

Ecrivons chaque composante explicitement :

1. Composante temporelle :

$$\frac{mc^2}{\sqrt{c^2 - v^2}} \frac{d}{dt} \left( \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) = \gamma \frac{d}{dt} (m\gamma c) = \frac{q}{c} F^{0i} v_i$$

$$F^{0i} v_i = F_{0i} v^i = \gamma (\vec{E} \cdot \vec{v})$$

ce qui peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \underbrace{q\vec{E} \cdot \vec{v}}_{\text{travail}}$$

L'énergie est donnée par  $\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m\gamma c^2$ , donc  $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$ . Notons que pour  $v = 0$ , nous trouvons

$$\mathcal{E} = mc^2$$

qui est la formule d'Einstein.

2. Pour les composantes spatiales :

$$mc^2\gamma \frac{d}{cdt} \left( \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{q}{c} \gamma c (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

soit :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ \vec{p} &= \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m\gamma\vec{v} \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'introduire le quadri-vecteur impulsion :

$$p^\mu = mv^\mu \quad , \quad p^0 = \frac{\mathcal{E}}{c}, \quad p^i \rightarrow \vec{p}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2} \\ \vec{p} &= m\gamma\vec{v} \end{aligned}$$

## 6.2 Applications pour des cas simples :

### 6.2.1 Champ électrique constant :

Prenons le cas d'un champ électrique orienté suivant l'axe ( $\mathcal{O}x$ ).

$$\begin{cases} E_x \neq 0 \\ E_y = E_z = 0 \end{cases} \quad (6.6)$$

Prenons également  $v_{in}^z = 0$ .

Nous avons alors les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = qE \\ \frac{dp_y}{dt} = \frac{dp_z}{dt} = 0 \end{cases} \quad (6.7)$$

dont les solutions sont :

$$\begin{cases} p_x = qEt + p_x^0 \\ p_y = p_y^0 \end{cases} \quad (6.8)$$

l'expression de l'énergie est donc :

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2c^4 + (p_y^0)^2c^2 + (qEt + p_x^0)^2c^2}$$

pour la vitesse :

$$\vec{v} = c^2 \frac{\vec{p}}{\mathcal{E}} = \frac{[(qEt + p_x^0)\vec{e}_x + p_y^0\vec{e}_y] c^2}{\sqrt{m^2c^4 + (p_y^0)^2c^2 + (qEt + p_x^0)^2c^2}}$$

Notons que pour  $c \rightarrow \infty$ , nous trouvons :

$$\vec{v} = c^2 \frac{\vec{p}}{\mathcal{E}} = \frac{[(qEt + p_x^0)\vec{e}_x + p_y^0\vec{e}_y] c^2}{mc^2} = \left( v_x^0 + \frac{qEt}{m} \right) \vec{e}_x + v_y^0 \vec{e}_y = \vec{v}_0 + \frac{q\vec{E}t}{m}$$

qui est l'expression de la vitesse non-relativiste.

Pour  $t \rightarrow \infty$  :  $v \rightarrow c$ . Nous trouvons pour la trajectoire :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = c^2 \frac{qEt + p_x^0}{\sqrt{m^2c^4 + (p_y^0)^2c^2 + (qEt + p_x^0)^2c^2}} \\ \frac{dy}{dt} = c^2 \frac{p_y^0}{\sqrt{m^2c^4 + (p_y^0)^2c^2 + (qEt + p_x^0)^2c^2}} \end{cases} \quad (6.9)$$

Ce qui donne comme solution pour  $x$  (avec une certaine condition initiale) :

$$x = \frac{1}{qE} \sqrt{m^2c^4 + (p_y^0)^2c^2 + (qEt + p_x^0)^2c^2}$$

Donc si  $t \rightarrow \infty$ ,  $x = ct$

### 6.2.2 Champ magnétique constant suivant ( $\mathcal{O}z$ ) :

Dans ce cas, nous avons l'expression :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E} = q\vec{E} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow v = \text{const} , \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{const}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times \vec{\omega}_B , \vec{\omega}_B = \frac{q\vec{B}}{\gamma m} = \frac{q\vec{B}c^2}{\mathcal{E}}$$

Nous obtenons les équations suivantes pour la vitesse :

$$\begin{cases} \frac{dv_z}{dt} = 0 \\ \frac{dv_x}{dt} = v_y \omega_B \\ \frac{dv_y}{dt} = -v_x \omega_B \end{cases} \quad (6.10)$$

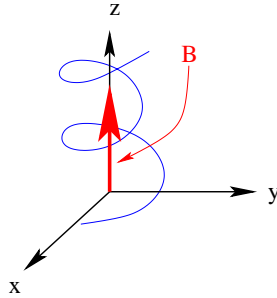
Qui ont pour solution :

$$\begin{cases} v_x = v_{\perp} \sin(\omega_B t + \phi) \\ v_y = v_{\perp} \cos(\omega_B t + \phi) \end{cases} \quad (6.11)$$

Ce qui donne pour les coordonnées (avec une certaine condition initiale) :

$$\begin{cases} z = v_z t \\ x = -\frac{v_{\perp}}{\omega_B} \cos(\omega_B t + \phi) \\ y = \frac{v_{\perp}}{\omega_B} \sin(\omega_B t + \phi) \end{cases} \quad (6.12)$$

Ce qui donne une spirale comme suit :



Pour  $v_z = 0$ , nous avons le rayon qui est :  $r_B = \frac{vm}{qB\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{\omega_B}$ .

### 6.2.3 Formule de Larmor relativiste

Nous connaissons déjà une façon d'obtenir la radiation d'une particule accélérée :

1. utiliser les potentiels de Liénard-Wiechert pour  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$ ,
2. calculer le vecteur de Poynting à une distance  $R$  assez grande,
3. intégrer le vecteur de Poynting par rapport aux angles et au temps pour trouver l'énergie totale émise par la particule.

Maintenant, nous pouvons, grâce à la mécanique relativiste, trouver une méthode beaucoup plus simple.

Donnons ici l'expression classique :

$$d\mathcal{E} = \frac{q^2 \dot{v}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} dt \quad (6.13)$$

l'énergie est la composante 0 du quadri-vecteur  $p^\mu$ ,

le temps est la composante 0 du quadri-vecteur  $x^\mu$ .

Or  $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$  est un invariant, donc une généralisation de [6.13] doit être invariante de Lorentz.

Si nous remplaçons  $\dot{v}$  par  $\frac{d^2x^\mu}{ds^2}$ , nous avons :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \underbrace{\left( \frac{d^2x_\mu}{ds^2} c^2 \frac{d^2x^\mu}{ds^2} c^2 \right)}_{\text{scalaire}} \quad (6.14)$$

Nous voyons que la limite non-relativiste reste correcte. D'autre part, nous pouvons remplacer  $\frac{d^2x^\mu}{ds^2}$  par  $F^{\mu\nu}$  dans [6.14] grâce aux équations du mouvement :

$$c^2 \frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{q}{mc} F^{\mu\nu} v_\nu$$

Nous obtenons alors :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{1}{6\pi\epsilon_0 c} \frac{q^4}{m^2 c^4} F^{\mu\nu} v_\nu F_{\mu\rho} v^\rho \quad (6.15)$$

## 6.3 Les accélérateurs

Il s'agit ici de reprendre les calculs effectués à la section ci-dessus, et de les appliquer aux cas des accélérateurs.

### 6.3.1 Accélérateur linéaire

Dans le cas d'un accélérateur linéaire, nous avons  $\vec{E} \parallel \vec{v}$ . Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{q^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^5} [F^{01} v_1 F_{01} v^1 + F^{10} v_0 F_{10} v^0] = -\frac{q^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^5} E^2 (v^2 - c^2) \gamma^2$$

en simplifiant, nous obtenons :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q^4 E^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3}$$

qui ne dépend pas de l'énergie de la particule !

### 6.3.2 Radiation synchrotron

Pour un synchrotron, nous sommes dans le cas où le champ magnétique  $\vec{B}$  est perpendiculaire à la vitesse de déplacement de la particule. Dans ce cas, le calcul est le suivant :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{q^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^5} [F^{12} v_2 F_{12} v^2 + F^{21} v_1 F_{21} v^1] = \frac{q^4}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3} \gamma^2 B^2 v^2$$

Ce qui se simplifie en :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{q^4 B^2 v^2}{6\pi\epsilon_0 m^2 c^3 \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}}$$

Dans cette dernière expression, le facteur souligné nous rappelle que la radiation augmente lorsque  $v \rightarrow c$ . Ce qui implique que les accélérateurs circulaires ne sont pas efficaces pour de hautes énergies. En effet, la particule perd de l'énergie en émettant des photons dans une direction tangente à sa trajectoire. Notons toutefois que la radiation synchrotron a des caractéristiques particulières qui la rendent intéressante pour d'autres applications.





## Chapitre 7

# Champs électrique et magnétique dans un milieu macroscopique

### 7.1 Les équations de Maxwell macroscopiques

Notre objectif, dans ce chapitre, est de dériver les équations de l'électrodynamique macroscopique (qui ont été données par Lorentz en 1902). Pour ce faire, nous partons des équations microscopiques :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \frac{\eta}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 & \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{b} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \end{cases} \quad (7.1)$$

où nous avons les champs *microscopiques* qui sont représentés par des lettres minuscules. Nous rappelons également la relation :  $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$ . Pour les milieux continus,  $\vec{e}$  et  $\vec{b}$  sont, en général, des fonctions compliquées de  $\vec{x}$  et de  $t$  à des échelles très petites :

La distance typique de variation est la taille de l'atome  $\sim 10^{-8} \text{cm}$ , le temps typique est donc de l'ordre de  $\frac{10^{-8} \text{cm}}{3 \cdot 10^{10} \text{cm/s}} \sim 10^{-18} \text{s}$ .

Expérimentalement, les ordres de grandeurs sont :  $t \gg 10^{-18} \text{s}$  ;  $L \gg 10^{-8} \text{cm}$ .

Il nous faut donc introduire des quantités *macroscopiques* :

$$\begin{cases} \vec{E}(\vec{z}) = \int d^3 \vec{x} \vec{e}(\vec{x}) f(\vec{x} - \vec{z}) = \langle \vec{e}(\vec{z}) \rangle \\ \vec{B}(\vec{z}) = \int d^3 \vec{x} \vec{b}(\vec{x}) f(\vec{x} - \vec{z}) = \langle \vec{b}(\vec{z}) \rangle \end{cases} \quad (7.2)$$

où  $f(\vec{x})$  est une fonction qui tend vers zéro lorsque  $|x| \geq R$ , avec  $R$  grand devant les distances inter-atomiques, mais petit devant la taille de la région d'observation.

Nous donnons ici des exemples pour la fonction  $f$  :

$$1. \quad f(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi R^3}, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases} \quad (7.3)$$

$$2. \quad f(\vec{x}) = (\pi R^2)^{-3/2} e^{-r^2/R^2} \quad (7.4)$$

$$3. \quad \int d^3\vec{x} f(\vec{x}) = 1 \quad (7.5)$$

si  $R \rightarrow 0$ , nous avons une fonction  $\delta$ .

Donnons ici quelques relations importantes :

En utilisant l'intégration par partie

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_{\vec{z}} \langle \vec{e}(\vec{z}) \rangle &= \int d^3\vec{x} \vec{e}(\vec{x}) \vec{\nabla}_{\vec{z}} f(\vec{x} - \vec{z}) = \\ \int d^3\vec{x} \vec{e}(\vec{x}) \left( -\vec{\nabla}_{\vec{x}} f(\vec{x} - \vec{z}) \right) &= \int d^3\vec{x} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \vec{e} f(\vec{x} - \vec{z}) = \langle \vec{\nabla} \cdot \vec{e} \rangle, \end{aligned} \quad (7.6)$$

alors

$$\vec{\nabla} \cdot \langle \vec{e} \rangle = \langle \vec{\nabla} \cdot \vec{e} \rangle. \quad (7.7)$$

D'autre part, nous avons :

$$\frac{\partial \langle \vec{e} \rangle}{\partial t} = \left\langle \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} \right\rangle \quad (7.8)$$

Pour obtenir les équations de Maxwell macroscopiques, nous devons alors faire une moyenne des équations [7.1] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{e} = -\frac{\partial \vec{b}}{\partial t} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{e} = \frac{\eta}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \langle \eta \rangle \\ \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{b} - \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} = \frac{\vec{j}}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\langle \vec{j} \rangle}{\epsilon_0} \end{array} \right. \quad (7.9)$$

Il nous reste maintenant à déterminer ce que sont les quantités  $\langle \eta \rangle$  et  $\langle \vec{j} \rangle$ , c'est-à-dire les moyennes de la densité de charges microscopique  $\eta$  et de la densité de courant microscopique  $\vec{j}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \eta \rangle = \rho(\vec{x}, t) - \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \\ \langle \vec{j} \rangle = \vec{J} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{M}, \end{array} \right. \quad (7.10)$$

où nous avons noté :  $\rho$  la densité de charges macroscopique (densité de charges libres) et  $\vec{J}$  la densité de courant macroscopique (densité de courant de charges libres). Par exemple, ce sont des électrons ou des ions qui peuvent se mouvoir librement.  $\vec{P}$  est la polarisation macroscopique, qui peut être définie comme la densité de moment dipolaire  $\vec{p} = e\vec{d}$ , donc

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_n \vec{p}_n$$

De la même façon,  $\vec{M}$  est l'aimantation macroscopique, donnée par :

$$\vec{M} = \frac{1}{V} \sum_n \vec{m}_n$$

avec  $\vec{m}_n = I_n S \vec{n} = \frac{q}{2} \vec{x}_n \times \vec{v}_n$ .

Démontrons que  $\vec{m}$  est exactement donnée par la relation standard  $\vec{m} = IS\vec{n}$ , où  $S$  est l'aire,  $I$  le courant total et  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la boucle de courant.

Le courant total est donné par :

$$\frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Pour un mouvement circulaire, définissons combien de fois nous croisons un point donné sur la boucle pendant le temps  $\Delta t$ . La distance est  $v\Delta t$ , donc le nombre de fois est

$$\frac{v\Delta t}{2\pi r}$$

la charge totale est donc :

$$\frac{qv\Delta t}{2\pi r} \Rightarrow \text{donc le courant } \frac{qv}{2\pi r}$$

La norme du moment magnétique est alors donnée par :

$$IS = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} qvr \quad (7.11)$$

ce qui correspond exactement à :

$$\vec{m} = \frac{q}{2} \vec{x} \times \vec{v} \quad (7.12)$$

## 7.2 Champs $\vec{H}$ et $\vec{D}$

**Déterminons maintenant le sens physique des différents termes :**

1. Terme  $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$  :

Considérons des molécules dipolaires du même type que celle de la partie gauche de la figure [7.1]. Si ces molécules sont distribuées de manière chaotique, il n'y a pas de charge induite, mais si elles sont ordonnées, comme dans la partie droite de la figure, la densité de charges induite  $\rho_{\text{pol}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$  donne une fonction non nulle du type de celle de la figure [7.2]

2. Terme  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$  :

Reprenons la même distribution que celle de la figure [7.1], mais ajoutons un processus dynamique : une inversion de la polarisation des molécules (par exemple une rotation), les charges + vont en bas et les charges - vont en haut. Alors, il est clair que le terme  $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \sim j$  est une densité de courant.

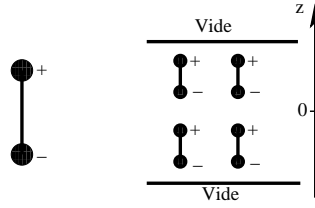


FIG. 7.1 – Molécule dipolaire, et une distribution possible

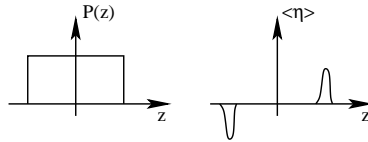


FIG. 7.2 – Distribution de  $\vec{P}$  et  $\langle \eta \rangle$  pour la fig. 7.1

### 3. Terme $\vec{\nabla} \times \vec{M}$ :

Ce terme représente une densité de courant de surface.

Pour tenir compte de ces termes physiques que nous venons de voir, **nous introduisons ici des nouveaux champs : Le champ magnétique  $\vec{H}$  et l'induction électrique  $\vec{D}$ .**<sup>1</sup> Les définitions pour  $\vec{D}$  et  $\vec{H}$  sont données par les équations

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \end{cases} \quad (7.13)$$

Ces nouvelles définitions impliquent une réécriture des équations de Maxwell comme suit :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}, & \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, & \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{cases} \quad (7.14)$$

## 7.3 Solution des équations de Maxwell

Comment résoudre les équations [7.14,7.13] ? En effet, nous devons déterminer les champs  $\vec{E}, \vec{B}, \vec{D}, \vec{H}$ , nous avons donc deux inconnues de plus que pour les équations dans le vide. Les solutions ne peuvent être trouvées que s'il existe des relations entre elles.

Les relations les plus simples possibles sont pour des milieux continus isotropes, nous trouvons alors :

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \end{cases}, \quad (7.15)$$

<sup>1</sup>Pour éviter une confusion entre  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$  on appelle le champ  $\vec{B}$  l'induction magnétique.

avec la permittivité  $\epsilon$  et la perméabilité  $\mu$  qui sont des constantes caractéristiques à chaque matériel.  $\epsilon$  et  $\mu$  sont déterminées soit expérimentalement, soit grâce à des calculs de microphysique. Les équations [7.15] se généralisent pour un milieu anisotrope :

$$\begin{cases} D_i = \epsilon_{ij} E_j \\ B_i = \mu_{ij} H_j \end{cases} \quad (7.16)$$

où  $\epsilon_{ij}$  et  $\mu_{ij}$  sont des tenseurs.

**Remarque :**

les relations linéaires les plus générales possibles sont données par :

$$\begin{cases} D_i(\vec{x}, t) = \int d^3 \vec{x}' dt' \epsilon_{ij}(\vec{x}, t, \vec{x}', t') E_j(\vec{x}', t') \\ B_i(\vec{x}, t) = \int d^3 \vec{x}' dt' \mu_{ij}(\vec{x}, t, \vec{x}', t') H_j(\vec{x}', t') \end{cases} \quad (7.17)$$

D'autre part, pour des champs intenses, des termes non-linéaires peuvent apparaître.

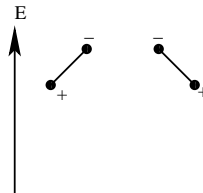


FIG. 7.3 – distribution quelconque de molécules dipolaires

Diélectricité :

Construisons maintenant la théorie microscopique d'un diélectrique. Nous connaissons l'énergie du dipôle en champ électrique :

$$\mathcal{E} = -\vec{E} \cdot \vec{p} = -pE \cos \theta$$

ainsi, certains dipôles sont énergétiquement favorisés, comme c'est le cas dans la figure 7.4. Nous pouvons définir une quantité globale, la polarisation moyenne,

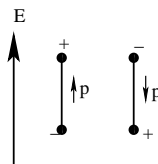


FIG. 7.4 – Le dipôle de gauche est énergétiquement plus favorable.

en utilisant la probabilité de Boltzmann  $\mathcal{P} \sim e^{-\frac{E_p \cos \theta}{kT}}$  :

$$p_z = \frac{\int p e^{\frac{E_p}{kT}} \cos \theta d \cos \theta d \phi}{\int e^{\frac{E_p}{kT}} d \cos \theta d \phi} \underset{\text{pour } E \text{ petit}}{\approx} \frac{1}{3} p^2 \frac{E}{kT}$$

Nous en déduisons alors :

$$D = \epsilon_0 E + \frac{1}{3} p^2 \frac{E n}{kT}$$

Ce qui nous donne pour la permittivité :

$$\epsilon = \epsilon_0 \left( 1 + \frac{1}{3 \epsilon_0} \frac{p^2 n}{kT} \right)$$

Paramagnétisme :

Nous faisons le même type de calculs pour un moment dipolaire magnétique  $\vec{m}$  et nous obtenons

$$M = \frac{1}{3} \frac{n m^2 B}{kT} \Rightarrow \quad (7.18)$$

$$H = \frac{1}{\mu_0} B - \frac{1}{3} \frac{n m^2 B}{kT} \Rightarrow \quad (7.19)$$

$$\mu = \mu_0 \left( 1 - \frac{n m^2 \mu_0}{3 kT} \right)^{-1} \approx \mu_0 \left( 1 + \frac{n m^2 \mu_0}{3 kT} \right) . \quad (7.20)$$

## 7.4 Les ondes électromagnétiques dans les milieux continus

Nous considérons ici le cas isotrope, nous avons donc :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \vec{H} . \quad (7.21)$$

On récrit la loi de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \Leftrightarrow \quad (7.22)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 , \quad (7.23)$$

puis on utilise

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} - \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 , \quad (7.24)$$

ce qu'on introduit en [7.23] et on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon\mu} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) \\
 &= \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \frac{1}{\epsilon\mu} (\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \Delta \vec{B}) \\
 &= \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \frac{1}{\epsilon\mu} \Delta \vec{B} = 0 .
 \end{aligned}
 \tag{7.25}$$

où on a utilisé  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ .

Cette dernière équation est une équation de propagation. La vitesse de la lumière est donnée par :

$$v^2 = \frac{1}{\epsilon\mu} = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} \frac{\epsilon_0\mu_0}{\epsilon\mu} = c^2 \frac{\epsilon_0\mu_0}{\epsilon\mu} \leq c^2
 \tag{7.26}$$

La vitesse de propagation d'une onde dans un milieu est donc toujours inférieure à  $c$ .

#### 7.4.1 Réflexion d'une onde

Nous considérons ici le problème de la réflexion d'une onde électromagnétique à l'interface de deux matériaux (cf. figure 7.5). Pour comprendre la physique de ce

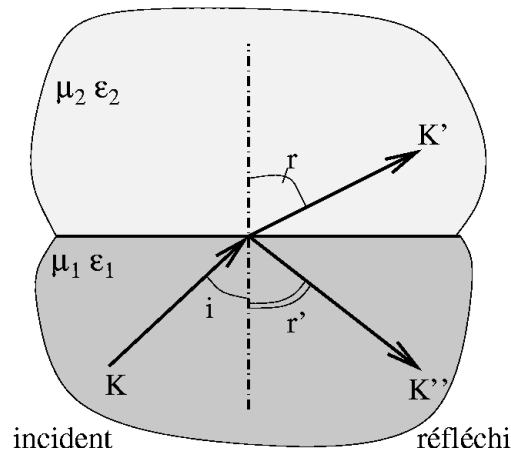


FIG. 7.5 – propagation d'une onde à une interface

phénomène, nous devons tout d'abord trouver les conditions aux bords. Si l'interface est très bien marquée, que devons-nous faire avec les dérivées de  $\epsilon$  et de  $\mu$  ?



L'idée est alors d'écrire les équations de Maxwell macroscopiques sous forme intégrale, et de les appliquer à l'interface.

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) \quad \oint \vec{D} \, d\vec{S} = \int \rho \, dV \\ (2) \quad \oint \vec{B} \, d\vec{S} = 0 \\ (3) \quad \int \vec{E} \, d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \, d\vec{S} \\ (4) \quad \int \vec{H} \, d\vec{l} = \int \vec{J} \, d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int \vec{D} \, d\vec{S} \end{array} \right. \quad (7.27)$$

Il ne nous reste plus qu'à utiliser ces dernières équations pour un volume et un contour spécifiques du type de la figure 7.6.

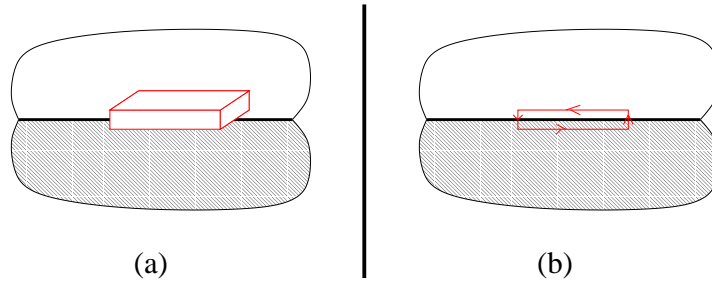


FIG. 7.6 – (a) petit volume à l'interface; (b) contour autour de l'interface, le vecteur  $\vec{t}$  venant vers nous.

Nous supposons que sur la surface, il peut y avoir des densités de charge macroscopiques  $\sigma$  (par unité de surface) et de courant macroscopique  $\vec{K}$  (par unité de longueur) non-nulles.

1. Appliquons l'équation (1) de [7.27] à ce petit volume :

$$\begin{aligned} \oint \vec{D} \, d\vec{S} &= (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} \Delta S = \sigma \Delta S \Rightarrow \\ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)_{\perp} &= \sigma \end{aligned} \quad (7.28)$$

ce qui signifie que la composante normale de  $\vec{D}$  a un saut égal à la densité de surface de charge.

2. Appliquons l'équation (2) de [7.27], nous obtenons le même type d'équation :

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)_{\perp} = 0 \quad (7.29)$$

qui signifie que la composante normale du champ magnétique est continue à l'interface.

3. Appliquons l'équation (3) de [7.27] au contour de la figure [7.6] :

$$\int \vec{E} \, d\vec{l} = 0 \Rightarrow (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)_{\parallel} = 0 \quad (7.30)$$

La composante tangentielle de  $\vec{E}$  est continue.

4. Appliquons l'équation (4) de [7.27] au contour :

$$\begin{aligned}
\int (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} &= \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = (\vec{t} \times \vec{n}) \cdot (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Delta l \\
&= \int \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \\
&= \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = (\vec{K} \cdot \vec{t}) \Delta l,
\end{aligned} \tag{7.31}$$

où  $\vec{t}$  est un vecteur tangent à la surface et  $\vec{K}$  est la densité de courant de surface.

Finalement, on obtient une condition au bord pour la composante tangente du champ magnétique :

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)_{\parallel} = \vec{K}. \tag{7.32}$$

Le saut du champ magnétique  $\vec{H}$  est égal à la densité de courant de surface.

Nous allons maintenant considérer le problème de la réflexion dans un cas simple :

$$\sigma = 0 \quad \vec{K} = 0$$

Nous notons alors l'expression d'une onde sous la forme d'une onde plane :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t] \tag{7.33}$$

où la quantité physique est la partie réelle  $\vec{E}_{\text{phys}} = \Re(\vec{E})$ .

$\vec{k}$  est le vecteur d'onde,

$\omega$  est la fréquence,

$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2\pi v}{\omega} = \frac{2\pi}{k}$  est la longueur d'onde,

$v = \frac{\omega}{k}$  est la vitesse de l'onde.

D'autre part, de la loi de Faraday :

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0, \tag{7.34}$$

nous déduisons la forme explicite du champ magnétique :

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{B}_0 \exp(i\vec{k} \cdot \vec{x} - i\omega t); \\
-i\omega \vec{B}_0 + i\vec{k} \times \vec{E}_0 &= 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \vec{E} = \frac{1}{vk} \vec{k} \times \vec{E}.
\end{aligned} \tag{7.35}$$

Pour la suite, nous noterons :

i) onde incidente :  $E_0, \vec{k}, \omega, v,$

ii) onde transmise :  $E'_0, \vec{k}', \omega', v',$

iii) onde réfléchie :  $E''_0, \vec{k}'', \omega'', v''.$

Nous savons également que nous avons :

1. la continuité dans le temps :  $\omega = \omega' = \omega''$  i.e. la fréquence ne change pas.
2. si le plan  $z = 0$  est le plan de réflexion, alors la continuité à  $z = 0$  nous donne :

$$\left(\vec{k} \cdot \vec{x}\right)_{z=0} = \left(\vec{k}' \cdot \vec{x}\right)_{z=0} = \left(\vec{k}'' \cdot \vec{x}\right)_{z=0}$$

Donc, les trois vecteurs  $\vec{k}$ ,  $\vec{k}'$ ,  $\vec{k}''$  se trouvent dans le même plan. Prenons alors  $k_y = 0$ , ceci implique

$$k \sin i = k' \sin r = k'' \sin r'$$

Comme  $\omega = \omega''$  et  $v = v''$ , nous avons  $k = k''$  et donc :

$$\sin i = \sin r' \quad (7.36)$$

En plus, nous en déduisons :

$$\frac{\sin r}{\sin i} = \frac{k}{k'} = \frac{\omega v'}{\omega v} = \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1}{\epsilon_2 \mu_2}} = \frac{n_1}{n_2}, \quad (7.37)$$

où nous avons introduit les indices de réfraction :

$$n_i = \sqrt{\frac{\epsilon_i \mu_i}{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Nous déduisons de l'équation [7.36] que l'angle de réflexion est égal à l'angle de l'onde incidente ( $i = r'$ ), cf. figure 7.7.

L'équation suivante, tirée de [7.37], est la loi de Snell :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \sin r = \frac{n_1}{n_2} \sin i .$$

Remarquons que cette équation n'a pas de solution pour  $n_1 > n_2$  si

$$i > i_0 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Nous disons alors qu'il y a *réflexion totale* pour  $i \geq i_0$ . C'est le cas pour une interface eau-air avec un angle d'incidence de  $43^\circ$ .

Pour trouver les relations [7.37], nous n'avons jamais utilisé la forme explicite des conditions aux bords. Ces dernières permettent de déterminer les amplitudes des ondes transmises et réfléchies. Considérons un problème général, le nombre total d'équations est  $1 + 2 + 2 + 1 = 6$  et nous avons 6 inconnues.

Conditions :

1.  $(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)_\perp = 0 \Rightarrow (\epsilon_1(\vec{E}_0 + \vec{E}''_0) - \epsilon_2 \vec{E}'_0) \cdot \vec{n} = 0$
2.  $(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)_\perp = 0 \Rightarrow (\vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}''_0 - \vec{k}' \times \vec{E}'_0) \cdot \vec{n} = 0$
3.  $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)_\parallel = 0 \Rightarrow (\vec{E}_0 + \vec{E}''_0 - \vec{E}'_0) \times \vec{n} = 0$

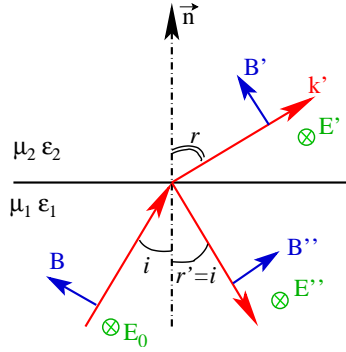


FIG. 7.7 – Schéma de principe pour la réflexion–transmission d’une onde

$$4. \left( \vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right)_{\parallel} = 0 \Rightarrow \left[ \frac{1}{\mu_1} \left( \vec{k} \times \vec{E}_0 + \vec{k}'' \times \vec{E}_0'' \right) - \frac{1}{\mu_2} \vec{k}' \times \vec{E}_0' \right] \times \vec{n} = 0$$

Considérons pour simplifier, la polarisation linéaire de la figure 7.7

Solution :

Supposons que  $\vec{E}$  est parallèle à la surface (polarisation TE). C’est-à-dire qu’il reste deux inconnues à la place de 6. Nous vérifierons cette supposition dans les équations par la suite :

1. Satisfait automatiquement.
2. Nous avons :

$$|k||E_0| \sin i + |k''||E_0''| \sin i - |k'||E_0'| \sin r = 0$$

D’autre part, comme  $|k| = |k''|$ , et  $|k| \sin i = |k'| \sin r$  Nous obtenons :

$$|E_0| + |E_0''| - |E_0'| = 0 \quad (7.38)$$

3. De même que le point précédent.
4. Ici :

$$\begin{aligned} \frac{(kE_0 - kE_0'') \cos i}{\mu_1} - \frac{k'E_0' \cos r}{\mu_2} &= 0 \\ \frac{k}{k'\mu_1}(E_0 - E_0'') \cos i - \frac{E_0'}{\mu_2} \cos r &= 0 \end{aligned}$$

Nous utilisons que  $\frac{k}{k'} = \sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}}$ , d’où :

$$\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}(E_0 - E_0'') \cos i - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}E_0' \cos r = 0 \quad (7.39)$$

Nous avons donc 2 équations (7.38, 7.39) pour 2 inconnues ( $E_0'$  et  $E_0''$ ).

Les solutions sont :

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2n_1 \cos i}{n_1 \cos i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}}$$

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{n_1 \cos i - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}}{n_1 \cos i + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i}}$$

et sont appelées relations de Fresnel.

Dans la plupart des cas (par exemple pour des fréquences optiques), nous pouvons considérer que  $\frac{\mu_1}{\mu_2} \approx 1$  donc :

$$\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 i} = n_2 \cos r$$

Et les solutions deviennent :

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{2n_1 \cos i}{n_1 \cos i + n_2 \cos r}$$

$$\frac{E''_0}{E_0} = \frac{n_1 \cos i - n_2 \cos r}{n_1 \cos i + n_2 \cos r}$$

Le cas de la réflexion totale est obtenu pour  $\cos r = 0$ , c'est-à-dire  $E_0 = E''_0$ .

Pour calculer le transfert d'énergie, nous pouvons utiliser la densité d'énergie et le vecteur de Poynting pour un milieu :

$$U = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H})$$

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

La dérivation de ces formules se fait de manière similaire à celle pour le vide.