Exercice 1 *Symétries*

On considère un Hamiltonien H pour un système qui possède certaines symétries. Soient A et B les opérateurs hermitiens dont l'action laisse H invariant, autrement dit

$$[H, A] = [H, B] = 0.$$

Montrer que si $[A, B] \neq 0$, alors il y a obligatoirement des valeurs propres dégénérées parmi les valeurs propres de l'opérateur H.

Indice: un raisonnement par l'absurde pourrait être judicieux

Exercice 2 *Parité*

Chercher les projecteurs P_+ et P_- projetant sur les états représentés par des fonctions respectivement paires et impaires par rapport à l'inversion des coordonnées de la particule. On pourra commencer en cherchant l'action de ces deux opérateurs sur une fonction quelconque.

Exercice 3 *Linéarité et antilinéarité*

1. A est un opérateur linéaire et B est antilinéaire. Qu'est-ce qu'on peut dire sur le comportement des opérateurs A^2, AB et B^2?
2. A est un opérateur antilinéaire. Est-ce que l'opérateur $A^\dagger A$ est hermitien?

Exercice 4 *Addition de deux moments cinétiques et coefficients de Clebsch-Gordan*

On considère un système composé de la somme de deux moments cinétiques $j_1 = 1$ et $j_2 = 1/2$, $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$.

1. Quelle est la dimension de l'espace de Hilbert de ce système ?
2. Écrire les éléments de la base produit tensoriel.
3. Écrire les éléments de la base moment cinétique total, et donner leur dégénérescence.
4. Calculer tous les coefficients de Clebsh-Gordan qui relient la deuxième base à la première.

Exercice 5 *Symétrie continue*

Montrer que

$$e^{iL_x\theta}p_z e^{-iL_x\theta} = p_z\cos\theta + p_y\sin\theta$$

et

$$e^{iL_x\theta}L_z e^{-iL_x\theta} = L_z\cos\theta + L_y\sin\theta$$

Exercice 6 *Oscillateur harmonique perturbé*

Soit

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \lambda x^4$$

l'Hamiltonien d'un oscillateur armonique faiblement perturbé.

1. Calculer la correction au premier ordre en λ à l'énergie du fondamental.
2. Calculer la correction au premier ordre en λ à la fonction propre correspondante.
3. Soit $\psi(x) = e^{-\alpha x^2}$ une fonction test de paramètre $\alpha > 0$.
   Trouver l'énergie du fondamental par la méthode variationnelle.
   Développer en série l'énergie au premier ordre en λ et comparer avec le résultat obtenu à la question 1.

(On rappelle que $\int_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ *)*