Code correcteurs d'erreur Quantique.

1) **Code de Shor** (code répétitions pour bit flip et phase flip).

↳ combiner les deux codes ci-dessus.

2) **Codes de Calderbank - Steane - Shor.**

Rappel: Code de Répétition. (pour correction des bit-flip).

1 qubit $\mathbb{C}^2$ $\quad \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = |\psi\rangle \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$

Répétition $\begin{cases} |0\rangle \to |000\rangle & |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\ |1\rangle \to |111\rangle & |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle. \end{cases}$

pas de violation du NO CLONING THM.

$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \to$ Mot de code $\in (\mathbb{C}^2)^{\otimes 3}$.

$$|\psi\rangle_R = \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle.$$

Si $\exists$ un bit flip $|\psi_R\rangle' = \alpha|010\rangle + \beta|101\rangle$

exemple

Possible de détecter et corriger cette erreur.

Détection : Mesure des observables $Z_1 \otimes Z_2 \otimes \mathbb{1}$ et

$\mathbb{1} \otimes Z_2 \otimes Z_3$.

ici $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1 bit flip.

- $|\psi_S\rangle$ ainsi que $|\psi_S\rangle'$ sont des états propres des ces deux observables. $\Rightarrow$ $\boxed{\text{Mesure ne va pas détruire } |\psi_S\rangle \text{ ou } |\psi_S\rangle'.}$

- valeurs propres de $|\psi_S\rangle$ sont $+1$ et $+1$. ✓

$|\psi_S\rangle'$ sont

$$\underbrace{\begin{matrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \\ -1 & -1. \end{matrix}}_{\text{en identifiant le syndrome (paire de v.p). on connait l'erreur.}}$$

dépend du qubit corrompu. bit flip

exemple :

$Z_1 Z_2 |\psi_R\rangle' = -|\psi_R\rangle'$ $\Rightarrow$ syndrome $\underline{\underline{(-1,-1)}}$.

$Z_2 Z_3 |\psi_R\rangle' = -|\psi_R\rangle'$

Bit flip

Liste erreurs	Liste des syndromes.	Correction de l'erreur.
pas d'erreur	$+1$, $+1$	$\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$.
1^{er} qubit flip.	-1, $+1$	$X_1 \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$
2^{e} qubit flip	-1, -1	$\mathbb{1} \otimes X_2 \otimes \mathbb{1}$.
3^{e} qubit flip.	$+1$, -1	$\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes X_3$.

- Correction d'erreur. Si le $2^{ème}$ qubit est erroné.

alors on applique l'unitaire $\quad X_2 |0\rangle = |1\rangle$

$X_2 |1\rangle = |0\rangle$.

$$X_2 |\psi_R\rangle' = |\psi_R\rangle.$$

☒

Rappel Code de répétition : erreurs du type phase flip ?

encodage $|0\rangle \xrightarrow{H} |+\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{Répétition}} |+++\rangle$

$|1\rangle \xrightarrow{H} |-\rangle = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{2} \longrightarrow |---\rangle$

$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \xrightarrow{\text{Répétition.}} \alpha|+++\rangle + \beta|---\rangle = |\psi\rangle_L.$

Corruption avec 1 seul phase flip :

$$|\psi\rangle_L' = \alpha|-++\rangle + \beta|+--\rangle$$

Détection : Mesure des observables $X_1 X_2$ et $X_2 X_3$.

$|\psi\rangle_L$ et $|\psi\rangle_L'$ sont des états propres de $X_1 \otimes X_2 \otimes \mathbb{1}$

et $X_2 \otimes X_3 \otimes \mathbb{1}$. p. ex :

- $X_1 X_2 |\psi\rangle_L' = -\alpha|-++\rangle - \beta|+--\rangle = -|\psi\rangle_L'$

$X_1|-\rangle = -|-\rangle$ syndrome $(-1, -1)$

- $X_2 X_3 |\psi_L'\rangle = |\psi_L'\rangle.$

Phase flips.

Liste des erreurs.	Liste des syndromes paires de v. p.	Correction d'erreur.
pas erreur.	$(+1, +1)$	$\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$.
erreur phase flip sur 1er qubit	$(-1, +1)$	$Z_1 \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$
erreur phase flip sur 2em qubit	$(-1, -1)$	$\mathbb{1} \otimes Z_2 \otimes \mathbb{1}$
phase flip sur 3em qubit	$(+1, -1)$	$\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes Z_3$.

- <u>Correction d'erreur.</u> par exemple erreur sur 1er qubit :

$$|\psi\rangle_P' = \alpha|-++\rangle + \beta|+--\rangle.$$

appliquant l'unitaire $Z_1 \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$:

$$Z_1 |\psi_P'\rangle = \alpha|+++\rangle + \beta|---\rangle. \quad \checkmark$$

$$Z_1 \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \qquad Z_1 \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}.$$

- En général on s'attend à avoir des bit flip et des phases flips en m̂ temp.

- $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightsquigarrow |\psi\rangle' = \alpha|1\rangle - \beta|0\rangle.$

$\uparrow$ bit-phaseflip.

→ $\alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$

$\uparrow$ bit flip.

→ $\alpha|0\rangle - \beta|1\rangle.$

$\uparrow$ phase flip.

→ .

On veut pouvoir corriger ces trois types d'erreur avec un m̂ code et un m̂ algorithme de correction d'erreur

LE CODE DE SHOR PERMET DE REALISER CELA DE FACON SIMPLE si on veut bien utiliser <u>9 qubits</u> et on corrige au max <u>1 erreur.</u>

<u>Idée :</u> combiner ou <u>concaténer</u> les deux codes de Répétition

$\boxed{\text{Code de Shor.}}$ Concaténation :

$x_1 x_2$ et $x_2 x_3$.

$$|0\rangle \xrightarrow{H} |+\rangle \xrightarrow{\text{Rép}} \underline{|+++\rangle} = \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\xrightarrow{\text{Rép}} \underbrace{\frac{|000\rangle+|111\rangle}{\sqrt{2}}} \otimes \underbrace{\frac{|000\rangle+|111\rangle}{\sqrt{2}}} \otimes \underbrace{\frac{|000\rangle+|111\rangle}{\sqrt{2}}} = |0\rangle_S$$

$$|1\rangle \xrightarrow{H} |-\rangle \xrightarrow{\text{Rép}} \underline{|---\rangle} = \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

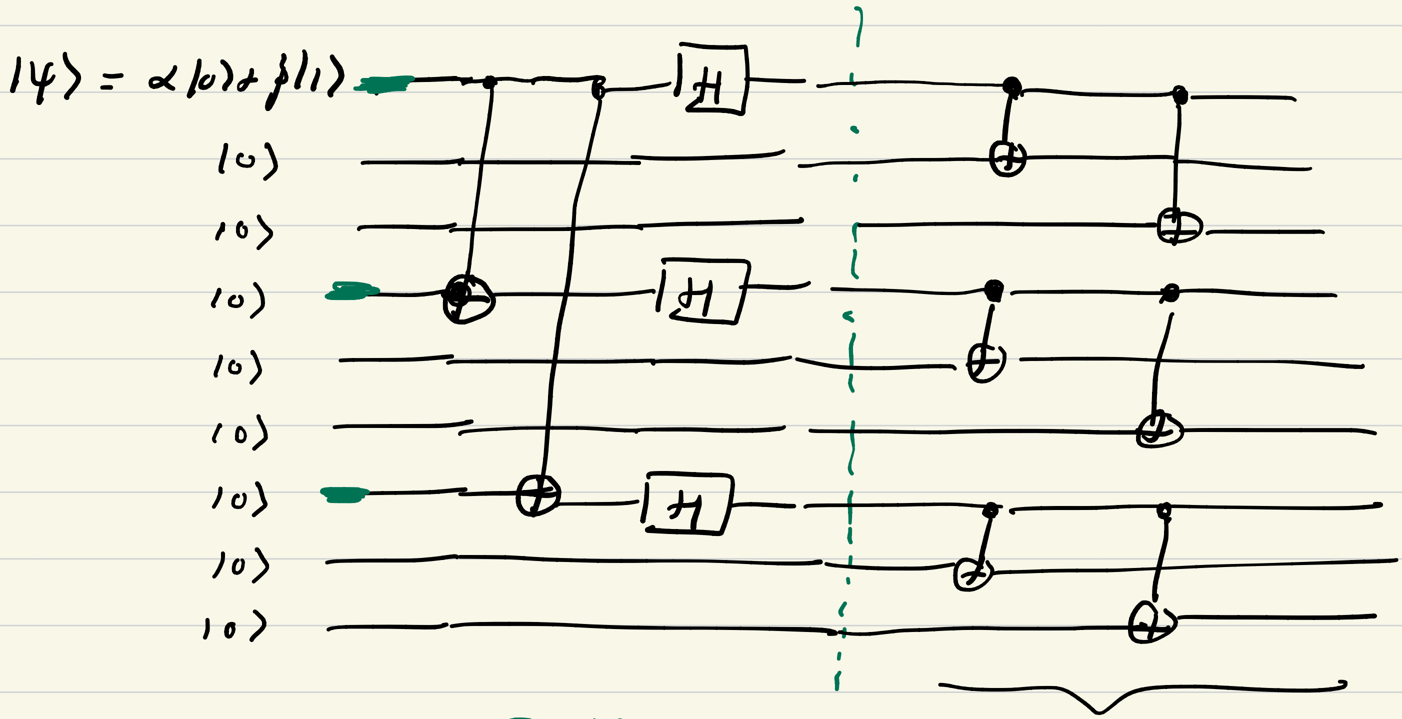
$$\xrightarrow{\text{Rép}} \underbrace{\frac{|000\rangle-|111\rangle}{\sqrt{2}}} \otimes \underbrace{\frac{|000\rangle-|111\rangle}{\sqrt{2}}} \otimes \underbrace{\frac{|000\rangle-|111\rangle}{\sqrt{2}}}. = |1\rangle_S$$

$|0\rangle_S$ et $|1\rangle_S$ sont des états orthogonaux dans l'espace $(\mathbb{C}^2)^{\otimes 9}$.

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \in \mathbb{C}^2 \xrightarrow{\text{codage de Shor}} \alpha|0\rangle_S + \beta|1\rangle_S.$$

$$\in (\mathbb{C}^2)^{\otimes 9}.$$

Circuit Quantique.



Code de répétition pour phase flips.

Code de répétition pour les bits flips.

exercice.

Détection et Correction d'erreur pour le code de Shor.

- Détecter les bits flips en mesurant :

$$\underbrace{Z_1 Z_2 \,,\, Z_2 Z_3}_{\text{1er groupe}} \; ; \; Z_4 \underbrace{Z_5 \,,\, Z_5}_{\text{2ème groupe}} Z_6 \; ; \; \underbrace{Z_7 Z_8 \,,\, Z_8 Z_9}_{\text{3ème groupe}} .$$

- Détecter les phases flips en mesurant :

$$(\underbrace{X_1 X_2 X_3}_{\text{"super } X_1\text{"}})(\underbrace{X_4 X_5 X_6}_{\text{"super } X_2\text{"}}) \quad \text{et} \quad (\underbrace{X_4 X_5 X_6}_{\text{"super } X_2\text{"}})(\underbrace{X_7 X_8 X_9}_{\text{"super } X_3\text{"}})$$

- On vérifie que $|\psi\rangle_S = \alpha|0\rangle_S + \beta|1\rangle_S$ et tous les états $|\psi_S\rangle'$ corrompus avec un seul bit / phase flip sur le même qubit sont vecteurs propres de la liste ci-dessus de matrices ; avec v.p qui sont une liste de ± 1.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Syndrôme : liste avec 8 } +1 \text{ ou } -1\text{'s}}$

Voir dans les notes de cours exemple :

bit-phase flip sur 4ème qubits.

⇒ Syndrome : Z_1Z_2, Z_2Z_3 ; Z_4Z_5, Z_5Z_6 ; Z_7Z_8, Z_8Z_9

$+1$ $+1$ -1 $+1$ $+1$ $+1$

$X_1X_2X_3X_4X_5X_6$; $X_4X_5X_6X_7X_8X_9$

-1 -1.

⇒ Correction : Applique unitaire X_4Z_4.

corrige bit flip. corrige phase flip.

Remarque : equivalent de faire X_4Z_4 ou Z_4X_4.

car $X_4Z_4 = -Z_4X_4$.

phase globale de l'état corrigé

état. physiquement équivalent

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{Code Shor Longueur} = 9\text{, corrige 1 erreur} \Rightarrow \text{bit flip, phase flip, bit et phase flip.}}$