Homework 8 : 30 Avril - 1Mai 2020 - Graded deadline 8 Mai
Calcul Quantique

Exercise 1 *Estimation de phase basée sur la transformée de Fourier quantique*

Soit U une matrice unitaire $2^n \times 2^n$ (ici $n \geq 1$) possédant un vecteur propre $|u\rangle$ avec valeur propre $e^{2\pi i \varphi}$. C'est à dire :

$$U|u\rangle = e^{2\pi i \varphi}|u\rangle.$$

On suppose

$$\varphi = \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_0}{4}$$

avec $\varphi_1, \varphi_0 \in \{0, 1\}$ binaires. Dans ce problème on étudie un "algorithme d'estimation de phase" qui permet de découvrir φ en supposant le vecteur propre $|u\rangle$ connu.

On rappelle que la transformée de Fourier quantique agissant sur deux qubits est définie par

$$QFT|x_1, x_0\rangle = \frac{1}{2} \sum_{y_0, y_1 \in \{0,1\}} e^{\frac{2\pi i}{4}(2x_1+x_0)(2y_1+y_0)}|y_1, y_0\rangle$$

où ici $x_1, x_0 \in \{0, 1\}$. Nous définissons aussi les opérations (controllées) suivantes qui agissent sur $2 + n$ qubits (ici $x, y \in \{0, 1\}$ et $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^{\otimes n}$)

$$R_1 \, |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |\psi\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes U^{2x}|\psi\rangle$$

$$R_2 \, |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes |\psi\rangle = |x\rangle \otimes |y\rangle \otimes U^{y}|\psi\rangle.$$

Soit maintenant la matrice unitaire

$$S = ((QFT)^\dagger \otimes I_n) \; R_2 \; R_1 \; (H \otimes H \otimes I_n)$$

où H est la matrice de Hadamard usuelle et I_n est la matrice unité agissant sur n qubits. Ici $(QFT)^\dagger$ est l'adjoint de QFT (c.à.d transposé et complexe conjugué).

(a) Quelle est la dimension de la matrice unitaire S ? Faites un dessin du circuit correspondant à S.

(b) On initialise le circuit dans l'état $|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |u\rangle$. Calculez l'état des $2 + n$ qubits juste avant la porte $(QFT)^\dagger$.

(c) Vérifiez que l'expression trouvée sous (b) n'est rien d'autre que $QFT|\varphi_1, \varphi_0\rangle$. Quel est donc l'état à la sortie du circuit ?

(d) En déduire que l'on peut découvrir φ en faisant *une et une seule mesure* des deux premiers qubits à la sortie du circuit.