# Midterm

**NOM :**

**PRENOM** :

**SECTION** :

— Vous avez 1h55 : 8h15 - 10h10
— Il y a 4 exercices.
— Rédigez vos réponses sur les feuilles doubles distribuées.
— Justifiez vos réponses et détaillez vos calculs.

## Conventions

— Le nombre imaginaire pur sera noté $i$ (c.a.d. $i^2 = -1$).

— Par convention $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

— La matrice de Hadamard est $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et la matrice identité est $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

— Le Control-NOT est défini par CNOT $|x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |y \oplus x\rangle$ ou $x, y \in \{0, 1\}$ et $\oplus$ est l'addition modulo 2.

**Exercice 1** *Etats généraux à un qubit*

On vous donne les deux portes quantiques agissant sur un qubit $R(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix}$ et $R(\psi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\psi} \end{pmatrix}$ ainsi que la porte de Hadamard $H$. Imaginez un circuit à un seul qubit qui produit (à une phase globale près) l'état suivant :

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)|0\rangle + e^{i\psi}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)|1\rangle$$

Le circuit est initialisé à $|0\rangle$. Vous pouvez utiliser chaque porte ci-dessus autant de fois que vous voulez, mais vous ne pouvez pas utiliser d'autres portes.

**Exercice 2** *Calculs de circuits*

Considérez l'opération unitaire

$$U = (CNOT_{13} \otimes I_2)(CNOT_{12} \otimes I_3)(H_1 \otimes I_2 \otimes I_3)$$

où les indices $1, 2, 3$ indiquent sur quels qubits ces portes agissent et $CNOT_{ij}$ signifie que le bit $i$ controle le bit $j$.

**a)** Quel est l'espace de Hilbert du problème ? Quelle est sa dimension ?

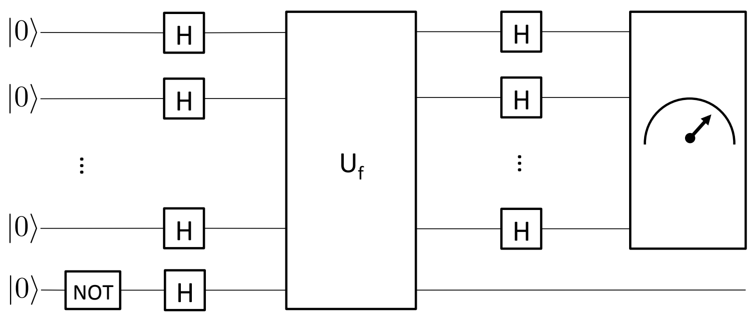
**b)** Faites un dessin du circuit.

**c)** Le circuit est initialisé dans état $|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$. Calculez état de sortie.

**d)** Supposons que l'architecture du hardware ne permette pas de faire l'opération $CNOT_{13}$ mais permette de faire uniquement l'opération $CNOT_{31}$. Proposez une modification du circuit, uniquement sur les bits 1 et 3, et qui donne le même état de sortie qu'avant. Justifiez.

**Exercice 3** *Variante sur le problème de Deutsch et Josza*

Considérez le circuit usuel du problème de Deutsch et Josza initialisé dans l'état $|0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle$ à $(n+1)$ qubits.




où nous rappelons que $U_f|x_1\rangle \otimes \cdots \otimes |x_n\rangle \otimes |y\rangle = |x_1\rangle \otimes \cdots \otimes |x_n\rangle \otimes |y \oplus f(x_1, \cdots, x_n)\rangle$. Dans ce problème la fonction $f$ n'est pas nécessairement balancée ou constante. Nous avons deux hypothèses :

(H1) la fonction n'est ni balancée ni constante.

(H2) la fonction est balancée ou constante.

**a)** La sortie du circuit avant la mesure est de la forme $|\psi\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ où $|\psi\rangle$ est l'état des $n$ premiers qubits. Prouvez que $|\psi\rangle$ est intriqué si et seulement si létat des $n$ premiers qubits juste avant la dernière série de portes de Hadamard est aussi intriqué (*indication* : pas de grands calculs pour cette preuve !).

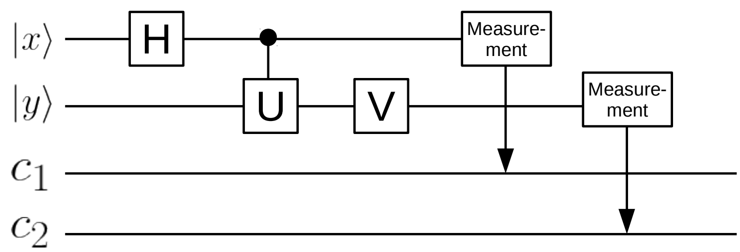
**b)** Considérez maintenant le cas particulier $n = 2$ (il y a donc 3 qubits au total). Montrez que si $f$ satisfait à (H1) alors $|\psi\rangle$ est intriqué.

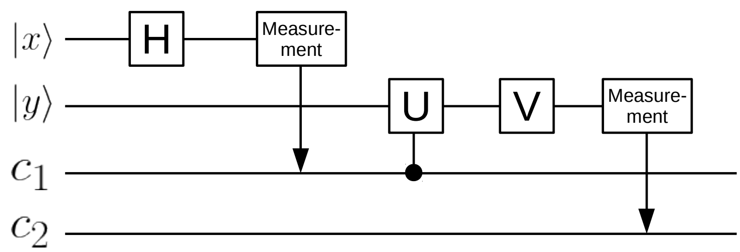
**c)** Toujours pour $n = 2$ montrez que, au contraire, si $f$ satisfait (H2) alors $|\psi\rangle$ n'est pas intriqué.

*Note* : cet exercice montre qu'un test d'intrication à la sortie du circuit permet de décider quelle est la bonne hypothèse.

**Exercice 4** *Calcul quantique semi-classique*

Considérez les deux cicuits ci-dessous. Les lignes $c_1$ et $c_2$ représentent des bits classiques qui stockent le resultat d'une mesure dans la base computationelle. Dans le deuxième circuit le bit classique $c_1$ est utilisé comme un signal qui controle la porte unitaire $U$ (si $c_1 = 0$ alors $U$ n'est pas effectuée et si $c_1 = 1$ alors $U$ est effectuée). On initialise les circuits dans l'état produit $|x\rangle \otimes |y\rangle$ avec $x, y \in \{0, 1\}$.




**a)** Montrez que l'état de sortie du premier circuit avant les mesures finales (étapes de calcul calculs détaillés svp)

$$|0\rangle \otimes V|y\rangle + (-1)^x|1\rangle \otimes VU|y\rangle$$

**b)** Calculez la distribution de probabilité $Prob(c_1, c_2)$ après la mesure pour le premier circuit.

**c)** Calculez la distribution de probabilité $Prob(c_1, c_2)$ après la mesure pour le second circuit. Obtenez vous les mêmes formules qu'en b) ?