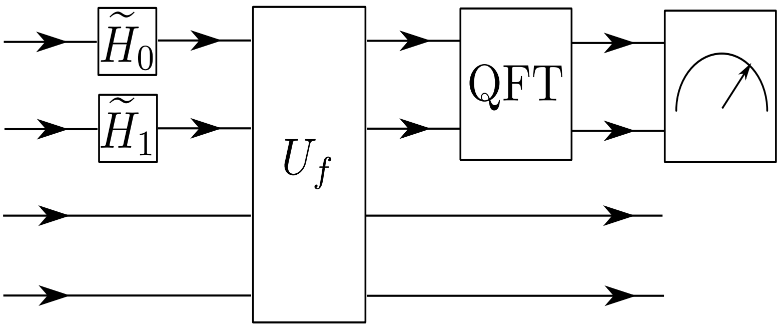
Série 8
Calcul Quantique

Exercice 1 *Effet des “imperfections” sur quelques portes dans l'algorithme de Shor*

On considère une fonction sur $\mathbb{Z}$, de période égale à 2. C'est à dire $f(x) = f(x+2)$, $x \in \mathbb{Z}$. Nous voulons étudier le circuit ci-dessous (voir figure) où les portes de Hadamard usuelles sont modifiées par une perturbation aléatoire

$$\widetilde{H}_0 |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + (-1)^b e^{i\varphi_0} |1\rangle \right), \text{ où } b = 0, 1$$
$$\widetilde{H}_1 |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + (-1)^b e^{i\varphi_1} |1\rangle \right), \text{ où } b = 0, 1$$

avec φ_0 et φ_1 uniformément distribués sur $[0, 2\pi]$.



Le circuit est initialisé dans l'état $|\psi_0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$. On prendra la convention $|0\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle$; $|0\rangle \otimes |1\rangle = |1\rangle$; $|1\rangle \otimes |0\rangle = |2\rangle$; $|1\rangle \otimes |1\rangle = |3\rangle$ et les définitions pour $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$U_f |x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |y + f(x)\rangle$$
$$\text{QFT} |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} \sum_{y=0}^{3} \exp\left(\frac{2\pi i}{4} xy \right) |y\rangle$$

a) Montrez que l'état après les portes de type Hadamard est :

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{4}} \left(|0\rangle + e^{i\varphi_1} |1\rangle + e^{i\varphi_0} |2\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)} |3\rangle \right) \otimes |0\rangle$$

b) Montrez que l'état juste avant la mesure est

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{4} \sum_{y=0}^{3} \left(1 + e^{i(\varphi_0+\pi y)}\right) |y\rangle \otimes |f(0)\rangle + \left(e^{i\left(\varphi_1+\frac{\pi}{2}y\right)} + e^{i\left(\varphi_0+\varphi_1+\frac{3\pi}{2}y\right)}\right) |y\rangle \otimes |f(1)\rangle$$

c) On mesure les deux premiers qu-bit dans la base définie par les projecteurs

$$\{P_y \otimes \mathbb{I}_{4\times 4} = |y\rangle \langle y| \otimes \mathbb{I}_{4\times 4};\ y = 0, 1, 2, 3\}$$

Calculez l'état juste après la mesure (a un facteur de normalisation près). Ensuite calculez la probabilité d'obtenir y. Vous devrez trouver un résultat indépendant de φ_1 .

d) Dans la question précédente vous avez calculé une probabilité étant donné φ_0 et φ_1 fixés. En principe vous avez trouvé un résultat dépendant uniquement de φ_0. Faire un dessin de $\Pr(y|\varphi_0)$ pour $\varphi_0 = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$. Calculez et dessinez la probabilité totale $\Pr(y)$ en considérant que φ_0 est distribuée uniformément sur $[0, 2\pi]$.