

Exercice 1 *Variation sur le problème de Simon*

Un qu-trit est un système quantique à 3 niveaux d'énergie. Les 3 états de base correspondants sont notés $|0\rangle$, $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Un état général appartient à l'espace d'Hilbert \mathbb{C}^3 ,

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle + \gamma |2\rangle$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ et $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Soit \mathbb{F}_3^n l'espace vectoriel des vecteurs $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ à n composantes avec chaque composante prise mod 3. Le corps de l'espace vectoriel est \mathbb{F}_3 (entiers avec $+$ et \times mod 3). Soit H le sous-espace vectoriel

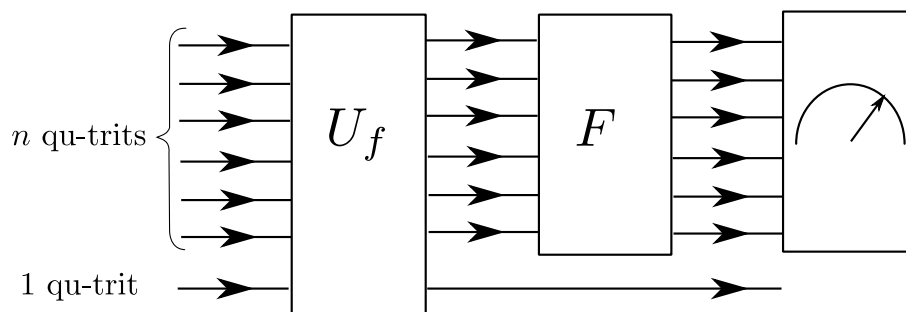
$$H = \{\vec{x} \in \mathbb{F}_3^n \mid \vec{x} = (0, \vec{x}') \text{ avec } \vec{x}' \in \mathbb{F}_3^{n-1}\}.$$

On se donne une fonction telle que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{F}_3^n &\rightarrow \{0, 1, 2\} \\ \vec{x} &\mapsto f(\vec{x}) \end{aligned}$$

avec $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ si et seulement si $\vec{x} - \vec{y} \in H$.

On considère le circuit quantique suivant :



— L'état d'entrée est initialisé à :

$$|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in \mathbb{F}_3^n} |\vec{x}\rangle \otimes |0\rangle$$

— La porte U_f (unitaire) est définie par

$$U_f |\vec{x}\rangle \otimes |y\rangle = |\vec{x}\rangle \otimes |y + f(\vec{x})\rangle \text{ avec } y = 0, 1, 2$$

Ici $y + f(\vec{x})$ est calculé mod 3.

— La porte F est une version de la transformée de Fourier quantique

$$F |\vec{x}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{y} \in \mathbb{F}_3^n} \exp\left(\frac{2\pi i}{3} \vec{x} \cdot \vec{y}\right) |\vec{y}\rangle$$

où $\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i \pmod{3}$.

1. Montrez que H est un sous-groupe de \mathbb{F}_3^n pour l'addition mod 3. Donnez sa cardinalité. Montrez qu'il y a 3 classes d'équivalence de H dans \mathbb{F}_3^n et donnez leur cardinalité.
2. Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ des représentants des 3 classes d'équivalence avec $f(\vec{a}) = 0$, $f(\vec{b}) = 1$, $f(\vec{c}) = 2$. Montrez que l'état juste après la porte U_f est

$$U_f |\psi_{in}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in H} \left\{ |\vec{a} + \vec{x}\rangle \otimes |0\rangle + |\vec{b} + \vec{x}\rangle \otimes |1\rangle + |\vec{c} + \vec{x}\rangle \otimes |2\rangle \right\}$$

3. Montrez que l'état juste après la porte F peut s'écrire :

$$(F \otimes \mathbb{I}) U_f |\psi_{in}\rangle = \frac{1}{3} \sum_{y_1=0,1,2} |y_1, 0, \dots, 0\rangle \otimes \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3} y_1 a_1} |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3} y_1 b_1} |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3} y_1 c_1} |2\rangle \right\}$$

Indication : utilisez la formule

$$\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3} \vec{x} \cdot \vec{y}\right) = \begin{cases} 3^{n-1} & \text{si } \vec{y} \in H^\perp \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Prouvez cette formule avec une méthode analogue à celle vue en cours sur \mathbb{F}_2 .

4. Appliquez le postulat de la mesure sur les n premiers qu-trits et montrez que

$$\Pr(\vec{y}) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } \vec{y} = (y_1, 0, \dots, 0) \text{ avec } y_1 = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

5. En admettant que H est un sous-groupe caché de dimension connue $n - 1$, combien de mesures faut-il faire pour reconstruire H avec une probabilité de succès égale à $1 - \varepsilon$ (ε très petit) ?