Annals of Mathematics, **165** (2007), 1–41

Sur le changement de signe des sommes de Kloosterman

By É. Fouvry and Ph. Michel

Abstract

Combining sieve methods with automorphic form theory and techniques from ℓ-adic cohomology, we prove that the sign of Kloosterman sums $\mathrm{Kl}(1,1;n)$ changes infinitely often as n ranges over the squarefree integers having all their prime factors larger than $n^{1/23.9}$.

1. Introduction

Soient a, b et n trois entiers, avec $n \geqslant 1$. On rappelle que la somme de Kloosterman $\mathrm{Kl}(a,b;n)$ est définie par la formule

$$\mathrm{Kl}(a,b;n) = \sum_{\substack{x \bmod n \\ (x,n)=1}} \exp\Big(2\pi i \frac{ax+b\overline{x}}{n}\Big).$$

(la notation $\overline{x}$ indique l'inverse de x modulo n). Rappelons que c'est un nombre réel, qui, pour $n = p$ est toujours non nul (la lettre p est systématiquement réservée aux nombres premiers), et qui vérifie

• la majoration de Weil (conséquence de la résolution de l'hypothèse de Riemann pour les courbes sur les corps finis)

$$\big|\mathrm{Kl}(a,b;p)\big| \leqslant 2(a,b,p)^{1/2}p^{1/2}, \tag{1.1}$$

• la majoration des sommes de Kloosterman modulo p^k ($k \geqslant 2$) (qu'on peut attribuer à divers auteurs, par exemple [Sa], [Es])

$$\big|\mathrm{Kl}(a,b;p^k)\big| \leqslant \begin{cases} 2(a,b,p^k)^{\frac12}p^{\frac{k}{2}}, \text{ si } p>2 \text{ ou si } p=2 \text{ et } k \leqslant 4, \\ 2(a,b,2^k)^{\frac12}2^{\frac{k+1}{2}} \text{ si } p=2 \text{ et } k\geqslant 5, \end{cases} \tag{1.2}$$

• la multiplicativité croisée (conséquence du théorème chinois)

$$\mathrm{Kl}(a,b;mn) = \mathrm{Kl}(a\overline{m}, b\overline{m}; n)\mathrm{Kl}(a\overline{n}, b\overline{n}; m), \text{ pour } (m,n)=1. \tag{1.3}$$

En mettant ensemble les relations (1.1), (1.2) et (1.3), on obtient la majoration générale suivante

$$\big|\mathrm{Kl}(a,b;n)\big| \leqslant 2^{\nu(n)}(a,b,n)^{\frac12}n^{\frac12}, \text{ si } 2^5 \nmid n, \tag{1.4}$$

où $\nu(n)$ est le nombre de facteurs premiers distincts de n et d'autre part, si 2^5 divise n, le facteur $n^{\frac{1}{2}}$ doit être remplacé par $(2n)^{\frac{1}{2}}$. Nous noterons aussi $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de l'entier n, comptés avec multiplicité, et μ est l'habituelle fonction de Möbius.

Quoique ces sommes soient une des clés de voûte de l'actuelle théorie analytique des nombres, elles sont à beaucoup de points de vue, très mystérieuses. Nous étudions dans cet article le signe des sommes de Kloosterman quand l'un des paramètres a, b ou n varie.

La façon la plus simple de montrer que les sommes $\mathrm{Kl}(1, a; p)$ ($p \geqslant 3$ fixé, $1 \leqslant a \leqslant p-1$) n'ont pas de signe constant est de calculer les moments d'ordre 1 et 2. En effet, si tous les $\mathrm{Kl}(1, a; p)$, $1 \leqslant a \leqslant p-1$, avaient le même signe, on aurait, compte tenu de la majoration (1.1)

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant a\leqslant p-1} \bigl|\mathrm{Kl}(1,a;p)\bigr|^2 &\leqslant \max_{1\leqslant a\leqslant p-1} \bigl|\mathrm{Kl}(1,a;p)\bigr| \times \Bigl|\sum_{1\leqslant a\leqslant p-1} \mathrm{Kl}(1,a;p)\Bigr| \\ &\leqslant 2\sqrt{p} \times 1,\end{aligned}$$

ce qui, pour $p \geqslant 3$, contredit le fait que

$$\sum_{1\leqslant a\leqslant p-1} \bigl|\mathrm{Kl}(1,a;p)\bigr|^2 = p(p-1)-1$$

(noter que $\mathrm{Kl}(1, 0; p) = -1$). Pour une présentation générale des sommes de Kloosterman, on se reportera avec profit à [Iw2, Chap.4].

En fait, on sait bien davantage grâce aux travaux de Katz [Ka2, Ex. 13.6] qui donnent la répartition statistique des valeurs des sommes de Kloosterman. Plus précisément, si on pose, pour $a \not\equiv 0 \bmod p$:

$$\frac{\mathrm{Kl}(1,a;p)}{2\sqrt{p}} = \cos\theta_{p,a} \quad (0 \leqslant \theta_{p,a} \leqslant \pi),$$

Katz a prouvé que les nombres $\{\theta_{p,a};\ 1 \leqslant a \leqslant p-1\}$ se répartissent, lorsque $p \longrightarrow \infty$, suivant la mesure de Sato–Tate μ_{ST}, définie par

$$\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta$$

(c'est la loi de Sato–Tate verticale), ce qui veut dire que pour $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi$, on a, pour $p \longrightarrow \infty$,

$$\frac{1}{p-1}\Bigl|\Bigl\{1 \leqslant a \leqslant p-1\ ;\ \alpha \leqslant \theta_{p,a} \leqslant \beta\Bigr\}\Bigr| \sim \frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta.$$

La loi de Sato–Tate verticale implique ainsi que, asymptotiquement, il y a, modulo p, autant de sommes de Kloosterman positives que de sommes négatives. La loi de Sato–Tate a été généralisée dans plusieurs directions, parmi lesquelles nous citons:

- lorsque a décrit un petit intervalle modulo p, disons de longueur $\geqslant p^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$ (ε positif fixé) [M1, Prop. 2];

- en dimension supérieure: si $f(x)$ est une fraction rationnelle à coefficients entiers, avec $\deg f \neq 0$ et $f(x) \neq x$, le couple d'angles $(\theta_{p,a}, \theta_{p,f(a)})$ est équiréparti dans le produit $[0,\pi] \times [0,\pi]$ pour le produit des mesures de Sato–Tate [M1, Th. 2.7];
- pour a décrivant l'ensemble des nombres premiers de l'intervalle $[2, p[$ [M1, Th. 3].

Les méthodes conduisant aux résultats précédents réapparaîtront au §7. La question de la répartition verticale des signes est ainsi résolue de façon satisfaisante.

Passons maintenant à la répartition horizontale des signes des sommes de Kloosterman, c'est–à–dire à la répartition des signes des sommes $\mathrm{Kl}(1,1;n)$, $n \geqslant 1$, ou des sommes $\mathrm{Kl}(1,1;p)$, $p \geqslant 3$. Cette question paraît très obscure et encore plus délicate que celle de la répartition verticale. Ainsi énonçons–nous, dans un premier temps:

Théorème 1.1. *Il existe une constante effectivement calculable X_0, telle que pour tout $X \geqslant X_0$, l'intervalle $[X, 2X]$ contient deux entiers n et n' vérifiant*

$$\mathrm{Kl}(1,1;n)\mathrm{Kl}(1,1;n') < 0.$$

Preuve. Cette preuve requiert des outils beaucoup plus profonds que ceux utilisés pour les changements de signe de $\mathrm{Kl}(1,a;p)$, a variant. On évalue d'abord un moment d'ordre 1. Un tel moment apparaît naturellement dans la théorie des formes modulaires à travers la formule de Kuznietsov [Ku]. Soit g telle que

$$\begin{cases} g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \\ g \text{ de classe } \mathcal{C}^\infty \\ \operatorname{supp} g = [1,2]. \end{cases} \tag{1.5}$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'égalité (voir par exemple [DI, (0.3)])

$$\sum_n g\Big(\frac{n}{X}\Big)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} = O_{g,\varepsilon}(X^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \tag{1.6}$$

(pour un énoncé plus général, voir (2.3)). En comparant avec (1.4), la formule (1.6) montre une énorme compensation lorsqu'on fait une somme de sommes de Kloosterman de modules consécutifs, sans pouvoir directement évaluer dans quelle mesure cette compensation est due à la petitesse des modules des sommes de Kloosterman ou aux oscillations des signes de ces sommes (se reporter à [FM] pour une discussion de l'origine de cette compensation).

Il n'y a pour l'instant aucune théorie qui fasse apparaître le moment d'ordre 2 des sommes $\mathrm{Kl}(1,1;n)$. Par contre, le deuxième auteur [M1, Th. 1], a montré, en associant des méthodes de géométrie algébrique apparentées à celles développées par Katz, avec des techniques de crible, qu'il existe $c_0 > 0$, tel que pour X suffisamment grand, on ait

$$\Big|\Big\{(p_1,p_2)\ ;X^{1/2}\leqslant p_1<p_2<2X^{1/2},\frac{\mathrm{Kl}(1,1;p_1p_2)}{\sqrt{p_1p_2}}\geqslant 0.64\Big\}\Big|\geqslant c_0\frac{X}{\log^2 X}. \tag{1.7}$$

Pour g vérifiant (1.5) et > 0 sur $]1,2[$, (1.7) implique donc, pour X suffisamment grand, la minoration

$$\sum_n g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Big|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big|\gg_g\frac{X}{\log^2 X}, \tag{1.8}$$

minoration que nous retrouverons sous une forme beaucoup plus forte à la Proposition 5.2. La comparaison de (1.6) et (1.8) donne le Théorème 1.1. $\square$

Il reste à étudier le changement de signe des sommes de Kloosterman $\mathrm{Kl}(1,1;p)$. La conjecture de Sato–Tate horizontale prédit que les angles $\theta_{p,1}$ sont en fait équirépartis, sur $[0,\pi]$ suivant la mesure $\frac{2}{\pi}\sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta$, ce qui signifie que pour tout $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant\pi$, on a,

$$\frac{\Big|\Big\{p\ ;\ X\leqslant p<2X,\ \alpha\leqslant\theta_{p,1}\leqslant\beta\Big\}\Big|}{\Big|\Big\{p\ ;\ X\leqslant p<2X\Big\}\Big|}\longrightarrow\frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta\sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta,\quad X\longrightarrow+\infty.$$

(Voir [Ka1, p. 13–15], pour une présentation de cette conjecture.) Malheureusement, cette conjecture est actuellement inaccessible ; en fait, on ne sait même pas si $\mathrm{Kl}(1,1;p)$ est positive (ou négative) pour une infinité de nombres premiers p. Le but principal de cet article est de prouver que tel est bien le cas si le nombre premier p est remplacé par un nombre presque premier. Nous montrerons le

Théorème 1.2. *Il existe u_0 et δ_0 strictement positifs, tels que, pour tout u_1 réel $> u_0$, pour tout $g>0$ sur $]1,2[$, vérifiant (1.5), il existe X_0, ne dépendant que de g et de u_1, tel qu'on ait l'inégalité*

$$\Big|\sum_{\substack{n\\ p|n\Rightarrow p\geqslant X^{1/u}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big|\leqslant(1-\delta_0)\sum_{\substack{n\\ p|n\Rightarrow p\geqslant X^{1/u}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\frac{\big|\mathrm{Kl}(1,1;n)\big|}{\sqrt{n}} \tag{1.9}$$

pour tout u vérifiant $u_0\leqslant u\leqslant u_1$ et tout $X>X_0$. En particulier, pour X suffisamment grand, on a les minorations

$$\Big|\Big\{n\ ;\ X\leqslant n<2X,\ p|n\Rightarrow p\geqslant X^{\frac{1}{u_0}},\mathrm{Kl}(1,1;n)>0\Big\}\Big|\gg\frac{X}{\log X}$$

et

$$\Big|\Big\{n\ ;\ X\leqslant n<2X,\ p|n\Rightarrow p\geqslant X^{\frac{1}{u_0}},\mathrm{Kl}(1,1;n)<0\Big\}\Big|\gg\frac{X}{\log X}.$$

En fait, avec davantage de soin, on montre qu'on peut choisir X_0, indépendant de u_1. Nous préférons rendre plus éloquent ce théorème, en proposant des valeurs pour les constantes δ_0 et u_0. La preuve du Théorème 1.2, montrera implicitement, qu'on peut prendre $\delta_0 > 0$ arbitrairement proche de 1 (voir (5.8), lemme fondamental du crible), pourvu qu'on prenne u_0 extrêmement grand. Dans la direction opposée, il est plus intéressant de proposer des valeurs très petites de u_0, pour tendre vers le cas $u_0 = 2$, correspondant aux nombres premiers, quitte à exhiber des valeurs de $\delta_0 > 0$, extrêmement petites. En reprenant de façon plus précise les inégalités menant à la preuve du Théorème 1.2, nous montrerons au §6, le

Théorème 1.3. *Le Théorème* 1.2 *est vrai*[1] *avec* $u_0 = 23.9$.

Ce théorème entraîne en particulier que l'ensemble de nombres réels

$$\Big\{\mathrm{Kl}(1,1;n);\ n \geqslant 1, \mu^2(n) = 1, \nu(n) \leqslant 23\Big\}$$

contient une infinité de nombres positifs et une infinité de nombres négatifs.

Remarque 1.1. Comme nous l'on fait remarquer J.-M. Deshouillers et le rapporteur, on peut montrer de manière élémentaire qu'il existe une infinité d'entiers n ayant au plus quatre facteurs premiers tels que $\mathrm{Kl}(1,1;n) > 0$. En effet, soit q un entier, comme $q \equiv 1 \bmod q-1$ et $q-1 \equiv -1 \bmod q$, on a par multiplicativité croisée

$$\mathrm{Kl}(1,1;q(q-1)) = \mathrm{Kl}(1,1;q)\mathrm{Kl}(1,1;q-1)$$

de sorte que l'un des trois nombres

$$\mathrm{Kl}(1,1;q(q-1)),\ \mathrm{Kl}(1,1;q) \text{ ou } \mathrm{Kl}(1,1;q-1)$$

est toujours positif ; finalement, on remarque que, par une variante du théorème de Chen, on peut toujours trouver une infinité de q tels que q et $q-1$ aient chacun au plus deux facteurs premiers. Notons que le nombre de tels n ainsi produit n'est pas de densité positive et qu'il n'est pas clair qu'une telle approche permette de montrer l'existence d'une infinité de sommes de Kloosterman $\mathrm{Kl}(1,1;n)$ négatives.

Donnons maintenant quelques idées de la preuve des Théorèmes 1.2 et 1.3. Pour majorer la quantité

$$\Big|\sum_{\substack{n \\ p|n \Rightarrow p \geqslant X^{1/u}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big|,$$

[1]Les scripts PARI-GP ainsi que les tables de valeurs numériques utilisées pour démontrer le Théorème 1.3 sont disponibles à l'URL suivante: http://www.math.univ-montp2.fr/~michel/kloosterman.html .

une approche directe conduit inexorablement à des sommes de sommes de Kloosterman “de type I” et “de type II”; les premières peuvent être traitées par des méthodes automorphes évoquées dans la preuve du Théorème 1.1, mais il n’existe pour l’instant aucune théorie faisant apparaître les secondes. Pour contourner cet écueil, nous écrivons pour n impair

$$\pm\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}g\Big(\frac{n}{X}\Big) = \Big(\pm\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}+2^{\Omega(n)}\Big)g\Big(\frac{n}{X}\Big)-2^{\Omega(n)}g\Big(\frac{n}{X}\Big):=a_n^{\pm}-b_n.$$

Par (1.4), on voit que le coefficient $a_n^{\pm}$ est $\geqslant 0$, on cherche donc à utiliser certaines méthodes de crible. Mais l’application n’est pas du tout immédiate, puisqu’on ne peut travailler avec l’habituelle hypothèse du crible

$$\sum_{d|n}a_n^{\pm}=\frac{\omega(d)}{d}Y+r_d,$$

avec ω fonction multiplicative, qui dans notre cas vaudrait en moyenne 2, Y indépendant de d et r_d un terme qui se comporte comme un terme d’erreur. La présence du terme multiplicatif $2^{\Omega(n)}$ engendre une distorsion dans la formule précédente par l’apparition d’un second terme principal en $\log d$, qui, en aucun cas, n’est un terme d’erreur (voir formule (3.2)). On travaille donc avec une formule d’approximation à trois termes

$$\sum_{d|n}a_n^{\pm}=\frac{\omega(d)}{d}Y-\Big(\frac{\omega(d)}{d}\log d\Big)Z+r'_d,$$

où Y et Z sont $\geqslant 0$, ne dépendent que de X et sont tels que $Y/Z\asymp\log X$. Cette situation est, à notre avis, nouvelle et nous lui avons donné le nom de *crible étrange*. Nous la traitons par une adaptation du crible de Selberg (version majoration) en dimension 2, mais il y a certainement d’autres possibilités: la première version de cet article partait du crible de Brun dans la version très élégante que l’on trouve dans [FH], mais menait à une valeur plus grande de u_0 au Théorème 1.3.

Le contrôle du nouveau terme d’erreur r'_d, se fait en moyenne, jusqu’à $d\leqslant X^{\vartheta-\varepsilon}$, avec $\vartheta=1/2$, c’est une conséquence de résultats profonds de la théorie des formes modulaires (voir Proposition 2.1). Signalons que pour obtenir le Théorème 1.2, il suffit d’avoir un tel contrôle pour un certain $\vartheta>0$. On montre alors, pour tout $u\geqslant 1$, l’existence d’une constante $C(u)$, telle que pour $X>X(u)$, on ait l’inégalité

$$\sum_{n,\,p|n\Rightarrow p>X^{\frac{1}{u}}}a_n^{\pm}\leqslant C(u)\hat{g}(1)\cdot\frac{X}{\log X},\tag{1.10}$$

alors que, par des arguments heuristiques, on espère la relation

$$\sum_{n,\, p|n \Rightarrow p > X^{\frac{1}{u}}} a_n^{\pm} \sim C^{\mathrm{hyp}}(u)\hat{g}(1) \cdot \frac{X}{\log X}.$$

Ici, comme dans la suite, on désigne par $\hat{g}$ la transformée de Mellin

$$\hat{g}(s) = \int_0^{\infty} g(t)t^s \, \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Les coefficients vérifient

$$C(u),\ C^{\mathrm{hyp}}(u) \longrightarrow +\infty,\ u \longrightarrow +\infty$$

mais, par la construction de ce crible et le lemme fondamental du crible, on a

$$C(u) - C^{\mathrm{hyp}}(u) \longrightarrow 0,\ u \longrightarrow +\infty.$$

Maintenant, par des méthodes classiques d'analyse complexe et par application itérée du théorème des nombres premiers, on montre, pour tout $u \geqslant 1$,

$$\sum_{n,\, p|n \Rightarrow p > X^{\frac{1}{u}}} b_n \sim C^{\mathrm{hyp}}(u)\hat{g}(1) \cdot \frac{X}{\log X},\ X \longrightarrow \infty. \tag{1.11}$$

En soustrayant la formule (1.11) à la formule (1.10) (appliquée aux suites a_n^+ et a_n^-), on obtient, pour tout $u \geqslant 1$, la majoration

$$\Big| \sum_{n,\, p|n \Rightarrow p > X^{\frac{1}{u}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} \Big| \leqslant \Big(C(u) - C^{\mathrm{hyp}}(u)\Big)\hat{g}(1) \cdot \frac{X}{\log X},$$

pour X suffisamment grand, ce qui termine la majoration de la partie gauche de (1.9). La minoration de la partie droite commence par l'inégalité évidente suivante valable pour tout $u_0 > 3$,

$$\sum_{n,\, p|n \Rightarrow p \geqslant X^{\frac{1}{u_0}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \Big| \frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} \Big| \geqslant \sum_{n}{}^{\flat} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \Big| \frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} \Big|,$$

où la somme est faite sur les $n = p_1p_2p_3$, avec $p_1 > p_2 > p_3$, et $\frac{\log p_i}{\log X}$ proche de $1/3$. Par l'inégalité du grand crible et la loi de Sato–Tate verticale, on démontre que chacune des trois familles d'angles

$$\theta_{p_1, \overline{p_2p_3}^2},\ \theta_{p_2, \overline{p_1p_3}^2},\ \theta_{p_3, \overline{p_1p_2}^2}$$

(avec les p_i comme ci–dessus) est équirépartie suivant μ_{ST}. On déduit alors que, pour une proportion positive de tels (p_1, p_2, p_3), aucun des trois angles précédents n'est proche de $\pi/2$. Par la multiplicativité croisée, on voit que, pour de tels $n = p_1p_2p_3$, on a la minoration $\frac{|\mathrm{Kl}(1,1;\sqrt{n})|}{\sqrt{n}} \gg 1$, ce qui conduit donc à la minoration

$$\sum_{n,\, p|n \Rightarrow p \geqslant X^{\frac{1}{u_0}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \Big| \frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} \Big| \gg \hat{g}(1) \cdot \frac{X}{\log X}. \tag{1.12}$$

Le Théorème 1.2 découle alors de (1.11) et (1.12). Signalons que la minoration (1.8) est insuffisante pour conclure et que, en adaptant le raisonnement précédent à des entiers n ayant un nombre non borné de facteurs premiers, les auteurs sont parvenus à la minoration

$$\sum_n g\Big(\frac{n}{X}\Big)\frac{|\mathrm{Kl}(1,1;n)|}{\sqrt{n}} \gg \hat{g}(1)\cdot\frac{X}{\log X}\cdot\psi(X),$$

où $\psi(X)$ est une certaine fonction tendant vers l'infini avec X [FM, Th. 1.2].

Le problème de diminuer la constante u_0 est tout à fait intéressant par la richesse et la diversité des méthodes et des thèmes pouvant y être incorporés. En voici quelques uns. Au §3, nous minimisons la forme quadratique Q_1, par le choix optimal des coefficients λ_d (méthode de Selberg), puis nous incorporons ces valeurs dans la forme quadratique Q_2 ; ce choix est réminiscent des méthodes de " mollification" utilisées pour les problèmes de non-annulation de fonctions L (voir [IS] et [KM] où certaines formes quadratiques sont minimisées optimalement suivant ce principe). Nous n'avons pas vérifié que notre choix minimise la forme quadratique $YQ_1 - ZQ_2$ quand u fixé et $X \to +\infty$ (voir (3.3)); on sait que, néanmoins, ces poids sont optimaux asymptotiquement (quand u est grand). Concernant le crible, il serait intéressant de voir l'influence des travaux de Diamond, Halberstam et Richert, qui combinent, dans le cas du crible de dimension > 1, le crible de Selberg et l'itération infinie de l'identité de Buchstab ([DHR1], [DHR2]).

Comme dans tout problème de crible, la qualité numérique des résultats dépend fortement de la valeur de l'exposant de répartition ϑ. Dans notre cas, on travaille avec $\vartheta = \frac{1}{2} - \varepsilon$, et nous conjecturons que $\vartheta = 1 - \varepsilon$ convient (Conjecture 2.1). Avec cette conjecture, les méthodes de cet article permettraient d'obtenir le Théorème 1.3 pour $u_0 = 11.1$; dans un travail à venir, nous retournerons sur les conséquences de cette conjecture, en travaillant cette fois dans le contexte du crible asymptotique de Bombieri. La question d'accroître la valeur de ϑ est tout à fait fascinante, une telle amélioration, si elle est possible, ne pourra, à notre avis, se faire sans idées ni outils nouveaux de la théorie des formes modulaires. Cet état de fait n'est pas sans rappeler la situation concernant la répartition des nombres premiers dans les progressions arithmétiques: théorème de Bombieri–Vinogradov, conjecture de Elliott–Halberstam, travaux de Bombieri, Fouvry, Friedlander et Iwaniec dans la direction de cette conjecture, par un calcul de variance et des majorations en moyenne de sommes de sommes de Kloosterman.

Tout ce qui précède concerne la majoration de la partie gauche de (1.9). La minoration de la partie droite dépend essentiellement de résultats de géométrie algébrique ; la preuve du Théorème 1.2 est en fait fort simple, dès qu'on met en jeu l'inégalité du grand crible et une variante de la loi de Sato–Tate verticale, concernant la répartition des angles θ_{p,a^2} $(1 \leqslant a \leqslant p-1)$. Le résultat numérique du Théorème 1.3 est à notre avis beaucoup plus subtil: poursuivant notamment un argument apparu dans [FIK], et exploité en profondeur dans [M2], nous sommes menés à étudier l'indépendance des angles d'une famille de sommes de Kloosterman, dont les coefficients sont des fractions rationnelles. Il est clair que l'on n'a pas exploité toute la richesse du jeu que l'on peut mener avec ces sommes d'exponentielles, d'autant qu'elles sont très souples par le nombre important de petites variables qu'elles contiennent. Nul doute qu'une étude plus poussée, tout en faisant diminuer la valeur de u_0, ne fasse apparaître d'intéressantes questions sur les sommes d'exponentielles.

Mentionnons pour finir, que grâce à un travail récent de Livné et Patterson qui utilise la théorie des formes automorphes sur le groupe metaplectique [LP], les techniques développées dans cet article devraient permettre de montrer la variation de l'argument des sommes cubiques

$$S(1,1;n)=\sum_{x \bmod n}\exp\Big(2\pi i\frac{x^3+x}{n}\Big),$$

quand n est presque premier.

Remerciements. Une partie de ce travail a été accomplie lors d'un séjour du premier auteur au Max–Planck–Institut (Bonn). Il remercie cet institut de son hospitalité. La recherche du second auteur a bénéficié du support de l'Institut Universitaire de France et de l'ACI Jeune Chercheur, "Arithmétique des fonctions L". Les auteurs remercient F. Alouges, Ph. Elbaz-Vincent et F. Nicoud de leur aide pour divers calculs numériques du §5 et tiennent à exprimer leur gratitude à H. Iwaniec qui, de multiples manières, a généreusement inspiré ce travail.

2. Résultats issus de la théorie des formes automorphes

L'objet principal de ce paragraphe est de prouver la

Proposition 2.1. *Soit g vérifiant* (1.5). *Pour tout $A>0$, il existe $B>0$ tel qu'on ait, pour $X\geqslant 1$, les égalités*

$$\sum_{q\leqslant\sqrt{X}(\log 2X)^{-B}}\Big|\sum_{q\mid n} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| = O_{g,A}\Big(X(\log 2X)^{-A}\Big),$$

et

$$\sum_{\substack{q\leqslant\sqrt{X}(\log 2X)^{-B}\\ 2\nmid q}}\Big|\sum_{\substack{q\mid n\\ 2\nmid n}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| = O_{g,A}\Big(X(\log 2X)^{-A}\Big).$$

La majoration triviale des quantités étudiées est $O\big(X(\log 2X)^3\big)$. C'est le gain d'une puissance de logarithme qui autorisera l'emploi des méthodes de crible. Cette proposition rappelle le théorème de Bombieri–Vinogradov, qui donne, en moyenne, la répartition des nombres premiers $p \leqslant X$, dans les progressions arithmétiques jusqu'à $X^{\frac{1}{2}}(\log 2X)^{-B}$. Mais contrairement au cas des nombres premiers, nous donnerons une majoration individuelle non triviale pour tout $q \leqslant X^{\frac{1}{2}}(\log 2X)^{-B}$ (voir (2.3)).

En fait, nous pensons que davantage est vrai et nous proposons la conjecture suivante qu'on peut regarder comme un analogue de celle proposée par Elliott et Halberstam dans le contexte des nombres premiers:

Conjecture 2.1. *Pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $A > 0$, *tout* g *vérifiant* (1.5), *on a, pour* $X \geqslant 1$, *l'égalité*

$$\sum_{q \leqslant X^{1-\varepsilon}} \Big| \sum_{q \mid n} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} \Big| = O_{g,\varepsilon,A}\Big(X(\log 2X)^{-A}\Big).$$

2.1. *Preuve de la Proposition* 2.1. Pour passer de la première relation à la seconde on écrit d'abord l'inégalité

$$\sum_{q \leqslant \sqrt{X}(\log 2X)^{-B}} \Big| \sum_{\substack{2\mid n \\ q\mid n}} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} \Big|$$
$$\leqslant 2 \sum_{q \leqslant 2\sqrt{X}(\log 2X)^{-B}} \Big| \sum_{q \mid n} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} \Big| \ll X(\log 2X)^{-A},$$

puis on fait la différence avec la première relation, pour n'avoir la somme que sur les n impairs. La preuve de la première relation consiste à mettre ensemble divers résultats déjà existants ; notre point de départ est la preuve, Section 7.1, pp. 264–268 du Théorème 8 de [DI]. Nous renvoyons à cet article pour les notations. Pour $X \geqslant 1$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,+\infty[)$, on pose

$$S_q(X) = \sum_{n \equiv 0 \bmod q} \frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{n} f\Big(\frac{4\pi X}{n}\Big),$$

d'après les arguments de [DI, p.267–268], on a l'égalité

$$S_q(X) = \sum_{\substack{j \geqslant 1 \\ 1/2 < s_{j,q} < 1}} \frac{|\rho_{j,q}(1)|^2}{\cos(\pi(2s_{j,q} - \frac{1}{2}))} \check{f}_X\Big(s_{j,q} - \frac{1}{2}\Big) + O_f(\log 2X). \tag{2.1}$$

La somme porte sur une base orthonormée $\{u_{j,q}\}_{j \geqslant 1}$ de formes de Maass sur $\Gamma_0(q)\backslash\mathbf{H}$, formes propres du laplacien hyperbolique pour des valeurs propres exceptionnelles

$$0 < \lambda_{1,q} \leqslant \cdots \leqslant \lambda_{j,q} = s_{j,q}(1 - s_{j,q}) \leqslant \cdots < \frac{1}{4}.$$

En outre, d'après Selberg, on a, pour tout q, la minoration $\lambda_{1,q} \geqslant \frac{3}{16}$.

Le coefficient $\rho_{j,q}(1)$ est le premier coefficient de Fourier de $u_{j,q}(z)$:

$$u_{j,q}(z) = y^{\frac{1}{2}} \sum_{m\neq 0} \rho_{j,q}(m) K_{s_{j,q}-\frac{1}{2}}(2\pi|m|y)e(mx),$$

et $\check{f}_X(s)$ désigne la transformée

$$\check{f}_X(s) = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{J_{2s}(x) - J_{-2s}(x)}{\sin(\pi s)} f(xX)\ \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

D'après [DI, Lemma 7.1 p. 264], on a alors

$$S_q(X) \ll_f \log 2X + \sum_{\substack{1\leqslant j\\ 1/2<s_{j,q}\leqslant 3/4}} |\rho_{j,q}(1)|^2 X^{2s_{j,q}-1}.$$

Ainsi, pour $q \leqslant X^{\frac{1}{2}}$, on a

$$\begin{aligned} S_q(X) &\ll_f \log 2X + \Big(\frac{X}{q^2}\Big)^{2s_{1,q}-1} \sum_{\substack{1\leqslant j\\ 1/2<s_{j,q}\leqslant 3/4}} |\rho_{j,q}(1)|^2 q^{2(2s_{j,q}-1)} \\ &\ll_f \log 2X + \Big(\frac{X}{q^2}\Big)^{2s_{1,q}-1} \tau(q)\log^6 q \end{aligned} \tag{2.2}$$

cette dernière majoration provenant de [Iw1, (11.25) p.187]. Le résultat de [LRS] fut le premier à améliorer la minoration universelle de Selberg de $\lambda_{1,q}$; il existe δ, avec $0 < \delta < \frac{1}{4}$, tel qu'on ait, pour tout $q \geqslant 1$

$$s_{1,q} \leqslant \frac{3}{4} - \delta.$$

On a donc l'inégalité

$$S_q(X) \ll_f \log 2X + \Big(\frac{X}{q^2}\Big)^{\frac{1}{2}-2\delta} \tau(q)\log^6 q. \tag{2.3}$$

En sommant sur les $q \leqslant Q$, avec $Q \leqslant X^{\frac{1}{2}}$, on déduit

$$\sum_{q\leqslant Q} |S_q(X)| \ll_f Q\log 2X + X^{\frac{1}{2}}\Big(\frac{Q^2}{X}\Big)^{2\delta}(\log 2X)^7.$$

On en déduit immédiatement la première égalité de la Proposition 2.1 en prenant $f(x) = g(4\pi/x)\sqrt{x}$ et $Q = \sqrt{X}(\log 2X)^{-\frac{(A+7)}{4\delta}}$. □

Remarquons que c'est l'expression (2.1) qui nécessite l'introduction du facteur lisse $g(n/X)$ dans les sommes que nous étudions. Le remplacement de cette fonction par la fonction caractéristique de l'intervalle $[X, 2X]$, alourdirait immédiatement les formules de ce paragraphe, pour mener à une valeur numérique de u_0 probablement moins bonne.

3. Le crible étrange

Énonçons en termes généraux les hypothèses du problème. Soit X un réel grand. À ce réel est associé une suite $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X)$ de réels $a_n = a_n(X)$ tels que

$$\begin{cases} a_n \geqslant 0 & n \geqslant 1, \\ a_n = 0 & \text{si } n \notin [X, 2X]. \end{cases} \tag{3.1}$$

Pour $z \geqslant 2$, on cherche à majorer la quantité

$$S(\mathcal{A}, z) := \sum_{n,\ p|n \Rightarrow p \geqslant z} a_n,$$

à partir d'une écriture de la quantité

$$|\mathcal{A}_d| := \sum_{d|n} a_n \quad (d \geqslant 1)$$

sous la forme

$$|\mathcal{A}_d| = \frac{\omega(d)}{d} Y - \Big(\frac{\omega(d)}{d} \log d\Big) Z + r_d \quad (d \geqslant 1), \tag{3.2}$$

où ω est une fonction multiplicative vérifiant

$$0 \leqslant \omega(p) < p,$$

Y et Z sont des réels $\geqslant 0$, indépendants de l'entier d.

On espère pour la quantité r_d un comportement de reste, soit individuellement, soit en moyenne sur d. Nous travaillons avec la méthode Λ^2 de Selberg. Soit donc $(\lambda_d)_{d \geqslant 1}$, une suite de réels vérifiant

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_d = 0 & \text{si } d \nmid P(z) \text{ ou si } d > x. \end{cases}$$

On fixera le paramètre x ultérieurement pour rendre acceptable le terme d'erreur apparaissant dans la Proposition 3.1. On note aussi $P(z) = \prod_{p<z} p$. On a donc l'inégalité

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}, z) &\leqslant \sum_n a_n \Big(\sum_{d|(n, P(z))} \lambda_d \Big)^2 \\ &\leqslant \sum_{d_1|P(z)} \sum_{d_2|P(z)} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} |\mathcal{A}_{[d_1, d_2]}|. \end{aligned}$$

Introduisant la formule (3.2), on a

$$S(\mathcal{A}, z) \leqslant Y Q_1 - Z Q_2 + R \tag{3.3}$$

avec

$$Q_1 = \sum_{d_1|P(z)} \sum_{d_2|P(z)} \frac{\omega([d_1, d_2])}{[d_1, d_2]} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2}, \tag{3.4}$$

$$Q_2 = \sum_{d_1 | P(z)} \sum_{d_2 | P(z)} \frac{\omega([d_1, d_2])}{[d_1, d_2]} \Big(\log[d_1, d_2] \Big) \lambda_{d_1} \lambda_{d_2}, \tag{3.5}$$

et

$$R = \sum_{d_1 | P(z)} \sum_{d_2 | P(z)} \lambda_{d_1} \lambda_{d_2} r_{[d_1, d_2]}. \tag{3.6}$$

La tactique que nous utiliserons est de minimiser la forme quadratique Q_1 par choix optimal des λ_d, puis de reporter les valeurs trouvées dans l'expression de Q_2.

3.1. *Optimisation de Q_1.* Cette démarche est tout à fait classique. Elle est due à Selberg et se retrouve dans de multiples ouvrages ([HR], [Gr],...). On décompose $[d_1, d_2]$ sous la forme $[d_1, d_2] = (d_1, d_2) d_1' d_2' := a d_1' d_2'$ avec $(d_1', d_2') = 1$, puis on interprète cette condition de coprimalité par l'habituel détecteur

$$\sum_{\substack{b | d_1' \\ b | d_2'}} \mu(b).$$

On a donc l'égalité

$$Q_1 = \sum_a \sum_b \frac{\omega(a)}{a} \mu(b) \frac{\omega(b)^2}{b^2} \sum_{d_1} \sum_{d_2} \frac{\omega(d_1) \omega(d_2)}{d_1 d_2} \lambda_{abd_1} \lambda_{abd_2} = \sum_d v(d) \xi_d^2,$$

avec

$$\begin{aligned} v(d) := \sum_{ab = d} \sum \frac{\omega(a)}{a} \mu(b) \frac{\omega(b)^2}{b^2} &= \frac{\omega(d)}{d} \sum_{b | d} \mu(b) \frac{\omega(b)}{b} \\ &= \frac{\omega(d)}{d} \prod_{p | d} \Big(1 - \frac{\omega(p)}{p} \Big), \end{aligned}$$

et

$$\xi_d = \sum_{d_1} \frac{\omega(d_1)}{d_1} \lambda_{dd_1}.$$

Noter que cette dernière égalité équivaut à

$$\lambda_d = \sum_{d_1} \frac{\mu(d_1) \omega(d_1)}{d_1} \xi_{dd_1}$$

et que, par conséquent, on a les égalités

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_d \frac{\mu(d) \omega(d)}{d} \xi_d = 1, & \\ \qquad \xi_d = 0 & \text{si } d \nmid P(z) \text{ ou si } d > x. \end{cases}$$

On minimise la forme quadratique Q_1 en écrivant, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$1 = \Big(\sum_d \frac{\mu(d)\omega(d)}{d}\xi_d\Big)^2 = \Big(\sum_d \frac{\mu(d)\omega(d)}{d\sqrt{v(d)}}\sqrt{v(d)}\xi_d\Big)^2$$
$$\leqslant \Big(\sum_{\substack{d\mid P(z)\\ d\leqslant x}} \frac{\omega(d)^2}{d^2 v(d)}\Big) Q_1\Big((\xi_d)\Big),$$

avec la convention que si $v(d) = 0$, on pose $\omega(d)^2/(d^2 v(d)) = 0$. Le minimum de Q_1 vaut ainsi

$$Q_{1,\min} = 1\Big/\Big(\sum_{d\mid P(z),\ d\leqslant x} \frac{\omega(d)^2}{d^2 v(d)}\Big) := 1\Big/G(x,z); \tag{3.7}$$

soit encore

$$G(x,z) = \sum_{d\mid P(z),\ d\leqslant x} \frac{\omega(d)}{d\prod_{p\mid d}(1-\frac{\omega(p)}{p})}.$$

Cette valeur minimale de Q_1 est obtenue lorsque

$$\xi_d = \frac{\mu(d)\omega(d)}{dv(d)}\cdot Q_{1,\min} = \frac{\mu(d)}{G(x,z)\prod_{p\mid d}(1-\frac{\omega(p)}{p})},$$

pour $d \leqslant x$, $d\mid P(z)$, et 0 dans le cas contraire. Les ξ_d ayant été ainsi fixés, les λ_d le sont aussi. Il est bien connu que les λ_d correspondants vérifient l'inégalité [HR, p. 100]

$$|\lambda_d| \leqslant 1.$$

Reportant cette majoration dans (3.6), on a directement l'inégalité

$$|R| \leqslant \sum_{\substack{d_1,\,d_2\mid P(z)\\ d_1,\,d_2\leqslant x}} \sum |r_{[d_1,d_2]}| \leqslant \sum_{\substack{d\mid P(z)\\ d\leqslant x^2}} 3^{\Omega(d)}|r_d|. \tag{3.8}$$

3.2. *Étude de Q_2.* Nous reportons donc les valeurs de ξ_d trouvées précédemment dans la forme quadratique Q_2, définie en (3.5). Par un calcul proche de celui fait pour Q_1, nous décomposons d'abord Q_2 en

$$Q_2 = Q_{2,1} + Q_{2,2} + 2Q_{2,3}, \tag{3.9}$$

avec

$$Q_{2,1} = \sum_d v(d)\log d\ \xi_d^2,$$
$$Q_{2,2} = \sum_d \Big(\sum_{ab=d}\sum \frac{\omega(a)}{a}\mu(b)\frac{\log b\ \omega(b)^2}{b^2}\Big)\xi_d^2,$$
$$Q_{2,3} = \sum_d v(d)\xi_d\xi'_d,$$

où

$$\xi'_d = \sum_{d_1} \frac{\omega(d_1)}{d_1} \log d_1 \ \lambda_{dd_1}.$$

3.3. *Calcul de $Q_{2,3}$.* Puisque d_1 est sans facteur carré, on a $\log d_1 = \sum_{p|d_1} \log p$, d'où la relation

$$\xi'_d = \sum_p \sum_{d_1} \frac{\omega(p)}{p} \log p \frac{\omega(d_1)}{d_1} \lambda_{pdd_1} = \sum_p \frac{\omega(p)}{p} \log p \ \xi_{pd},$$

ce qui conduit à l'égalité

$$Q_{2,3} = \sum_p \frac{\omega(p)}{p} \log p \sum_d v(d) \xi_d \xi_{pd}.$$

Noter que dans cettte somme, on peut se restreindre au cas où $(p,d) = 1$ (sinon $\xi_{pd} = 0$), et qu'on a la relation

$$\frac{\omega(p)}{p} v(d) \xi_d = -\mu(p) \frac{\omega(p)}{pv(p)} v(p) v(d) \xi_d = -v(pd) \xi_{pd}.$$

Reportant cette égalité, et posant alors $d' = pd$, on a l'égalité

$$Q_{2,3} = -\sum_p \sum_d \log p \ v(pd) \xi_{pd}^2 = -\sum_{d'} v(d') \xi_{d'}^2 \Big(\sum_{p|d'} \log p \Big) = -Q_{2,1}.$$

3.4. *Calcul de $Q_{2,2}$.* On constate d'abord les égalités

$$\sum_{ab=d} \sum \frac{\omega(a)}{a} \mu(b) \frac{\log b \ \omega(b)^2}{b^2} = \frac{\omega(d)}{d} \sum_{b|d} \mu(b) \frac{\log b \ \omega(b)}{b},$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{b|d} \mu(b) \frac{\log b \ \omega(b)}{b} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} \prod_{p|d} \Big(1 - \frac{\omega(p)}{p^s}\Big)_{|_{s=1}} \\ &= -\Big\{ \prod_{p|d} \Big(1 - \frac{\omega(p)}{p}\Big) \Big\} \Big\{ \sum_{p|d} \log p \frac{\omega(p)}{p(1 - \frac{\omega(p)}{p})} \Big\}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$Q_{2,2} = \sum_d v(d) \xi_d^2 \sum_{p|d} \Big(1 - \frac{1}{1 - \frac{\omega(p)}{p}}\Big) \log p = Q_{2,1} - \sum_d v(d) \xi_d^2 \sum_{p|d} \frac{\log p}{1 - \frac{\omega(p)}{p}}.$$

En reportant dans (3.9), les diverses expressions des $Q_{2,1}$, $Q_{2,2}$ et $Q_{2,3}$, on obtient finalement

$$
\begin{aligned}
Q_2 &= -\sum_{d} v(d)\xi_d^2 \sum_{p\mid d} \frac{\log p}{1-\frac{\omega(p)}{p}} \\
&= -\sum_{p<z} \frac{\log p}{1-\frac{\omega(p)}{p}} \sum_{d\leqslant x/p} v(pd)\xi_{pd}^2 \\
&= -\sum_{p<z} \frac{\omega(p)\log p}{p} \sum_{d\leqslant x/p} \mu^2(pd)v(d)\xi_{pd}^2 \\
&= -\frac{1}{G(x,z)^2} \sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p} \frac{\log p}{\left(1-\frac{\omega(p)}{p}\right)^2} G_p(x/p,z),
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

avec

$$
G_p(y,z) = \sum_{\substack{d\mid P(z),\, d\leqslant y\\ (p,d)=1}} \frac{\omega(d)^2}{d^2 v(d)} = \sum_{\substack{d\mid P(z),\, d\leqslant y\\ (p,d)=1}} \frac{\omega(d)}{d\prod_{p\mid d}(1-\frac{\omega(p)}{p})}.
$$

Regroupant (3.3), (3.7), (3.8) et (3.10), on parvient à la

Proposition 3.1. *Sous les hypothèses* (3.1) *et* (3.2), *on a l'inégalité*

$$
\begin{aligned}
S(\mathcal{A},z) \leqslant \frac{Y}{G(x,z)} &+ \frac{Z}{G(x,z)^2} \sum_{p<z} \frac{\omega(p)}{p} \frac{\log p}{(1-\frac{\omega(p)}{p})^2} G_p(x/p,z) \\
&+ \sum_{\substack{d\mid P(z)\\ d\leqslant x^2}} 3^{\Omega(d)} |r_d|.
\end{aligned}
$$

3.5. *Majoration dans un cas particulier.* Pour pousser plus avant les calculs, il faut introduire une hypothèse sur la valeur moyenne de $\omega(p)$, c'est–à–dire une hypothèse de dimension, par exemple les hypothèses Ω_1 et $\Omega_2(\kappa, L)$ de [HR, p. 29 et 142]. Au lieu de travailler en toute généralité, nous nous bornons à traiter le cas qui nous intéresse ici. De la Proposition 3.1, nous déduirons

Corollaire 3.1. *On suppose que* (3.1) *et* (3.2) *sont vérifiées, et qu'en outre, on a* $\omega(2) = 0$ *et* $\omega(p) = 2$, *pour* p *impair. On a alors, uniformément pour* $\exp\Big((\log x)^{\frac{6}{7}}\Big) \leqslant z \leqslant \sqrt{x}$, *la majoration*

$$
\begin{aligned}
S(\mathcal{A},z) \leqslant \frac{W(z)}{\sigma_2(2\tau)} \Big\{ Y + Z\frac{2\log z}{\sigma_2(2\tau)} &\int_0^1 \sigma_2(2\tau-2t)\mathrm{d}t + O\Big(\frac{\tau^5(Y+Z\log z)}{\log z}\Big)\Big\} \\
+ \sum_{\substack{d\mid P(z)\\ d\leqslant x^2}} 3^{\Omega(d)} |r_d|,
\end{aligned}
$$

avec

$$\tau = \frac{\log x}{\log z},$$

$$W(z) = \prod_{2<p<z}\Big(1 - \frac{2}{p}\Big)$$

et σ_2 *est la fonction* $\mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$, *continue et définie par l'équation différentielle aux différences*

$$\begin{cases} \sigma_2(u) = \dfrac{u^2}{8\mathrm{e}^{2\gamma}} & \text{pour} \quad 0 \leqslant u \leqslant 2 \\ \\ (u^{-2}\sigma_2(u))' = -2u^{-3}\sigma_2(u-2) & \text{pour} \qquad u > 2, \end{cases}$$

avec γ *constante d'Euler.*

Preuve. Nous sommes dans les conditions d'application de [HR, Lemma 6.1, p. 197], d'où, uniformément pour $z \leqslant x$, la relation

$$\frac{1}{G(x,z)} = W(z)\Big\{\frac{1}{\sigma_2(2\tau)} + O\Big(\frac{\tau^5}{\log z}\Big)\Big\},$$

avec $\tau = \log x/\log z$. On a même plus généralement, pour $2 < p < z$ et $pz < x$, la relation

$$\frac{1}{G_p(x/p,z)} = W(z)\Big(1 - \frac{2}{p}\Big)^{-1}\Big\{\frac{1}{\sigma_2(2\tau - 2\frac{\log p}{\log z})} + O\Big(\frac{\tau^5}{\log z}\Big)\Big\},$$

qui entraîne, puisque, par hypothèse, $\tau^5/\log z \longrightarrow 0$, l'égalité

$$G_p(x/p,z) = W(z)^{-1}\Big(1 - \frac{2}{p}\Big)\Big\{\sigma_2\Big(2\tau - 2\frac{\log p}{\log z}\Big) + O\Big(\frac{\tau^5}{\log z}\Big)\Big\}.$$

Utilisant alors la majoration de la Proposition 3.1, on a l'inégalité

$$S(\mathcal{A},z) \leqslant \frac{W(z)}{\sigma_2(2\tau)}\Big\{Y + \frac{Z}{\sigma_2(2\tau)}\sum_{2<p<z}\frac{2\log p}{p-2}\sigma_2\Big(2\tau - 2\frac{\log p}{\log z}\Big) + O\Big(\frac{\tau^5(Y + Z\log z)}{\log z}\Big)\Big\} + \sum_{\substack{d|P(z)\\ d\leqslant x^2}} 3^{\Omega(d)}|r_d|.$$

Il suffit de faire une sommation par parties et d'appliquer le théorème des nombres premiers, pour conclure la preuve du Corollaire 3.1. Signalons qu'en raison de la croissance de la fonction σ_2, le Corollaire 3.1 entraîne directement la majoration un peu moins forte

(3.11)
$$S(\mathcal{A},z) \leqslant \frac{W(z)}{\sigma_2(2\tau)}\Big\{Y + 2Z\log z + O\Big(\frac{\tau^5(Y + Z\log z)}{\log z}\Big)\Big\} + \sum_{\substack{d|P(z)\\ d\leqslant x^2}} 3^{\Omega(d)}|r_d|,$$

et qu'on perd peu d'information pour τ grand, puisqu'on sait que la fonction σ_2 tend très rapidement vers 1 (voir (5.8)). $\square$

4. Les termes principaux

Soit g une fonction satisfaisant (1.5). Au §5, nous rencontrerons, avec plusieurs valeurs du paramètre z, la quantité

$$\Omega_g(X,z)=\sum_{\substack{n\\ p\mid n\Rightarrow p\geqslant z}}2^{\Omega(n)}g\Big(\frac{n}{X}\Big)=\sum_n f_z(n)2^{\Omega(n)}g\Big(\frac{n}{X}\Big),$$

avec $f_z(n)$ fonction caractéristique de l'ensemble des entiers n dont tous les facteurs premiers sont $\geqslant z$. Pour donner une formule d'approximation de la quantité à cribler (quantités Y et Z de la formule (3.2)), nous aurons besoin d'évaluer asymptotiquement ces quantités. Notons par $G(s)$ le produit eulérien

$$G(s)=\Big(1-\frac{1}{2^s}\Big)^2\prod_{p\geqslant 3}\Big(1+\frac{1}{p^s(p^s-2)}\Big),$$

absolument convergent pour $\Re e s>\frac{\log 2}{\log 3}$. On a d'abord le très simple

Lemme 4.1. *Pour $X\longrightarrow\infty$, on a la relation*

$$\Omega_g(X,3)=\hat g(1)G(1)X\log X+c_1(g)X+O_g(X^{\frac{7}{8}}).$$

pour une certaine constante $c_1(g)$ qui ne dépend que de g.

Preuve. On part de l'écriture en série de Dirichlet

$$F(s)=\sum_{2\nmid n}\frac{2^{\Omega(n)}}{n^s}=\prod_{p\geqslant 3}\Big(1-\frac{2}{p^s}\Big)^{-1}=\zeta^2(s)G(s).$$

Par transformation de Mellin inverse, puis par déformation du contour d'intégration, on a l'égalité

$$\begin{aligned}\Omega_g(X,3)&=\frac{1}{2\pi\imath}\int_{2-\imath\infty}^{2+\imath\infty}\hat g(s)F(s)X^s\,\mathrm{d}s\\ &=\frac{1}{2\pi\imath}\int_{\frac{7}{8}-\imath\infty}^{\frac{7}{8}+\imath\infty}\zeta^2(s)\hat g(s)G(s)X^s\,\mathrm{d}s+\mathrm{res}_{s=1}\Big(\zeta^2(s)\hat g(s)G(s)X^s\Big).\end{aligned}$$

On a un pôle double en $s=1$, ainsi

$$\mathrm{res}_{s=1}\Big(\zeta^2(s)\hat g(s)G(s)X^s\Big)=\hat g(1)G(1)X\log X+c_1(g)X$$

alors que l'intégrale est majorée par $O_g(X^{7/8})$. Enfin, signalons que la série de Dirichlet $F(s)$ associée à la quantité $\Omega_g(X,2)$, admet en $s=1$ un pôle triple, ce qui rendrait moins agréable l'application du crible étrange (voir la définition de a_n au §5). □

Nous passons à l'évaluation de $\Omega_g(X, z)$.

Rappelons la définition de la fonction de Buchstab: $u \mapsto \omega(u)$ (aucune confusion de notation n'est possible avec la fonction multiplicative du §3). C'est l'unique fonction définie sur $\mathbf{R}$, continue pour $u \geqslant 1$, vérifiant

$$\begin{cases} \omega(u) = 0 & (u < 1) \\ u\omega(u) = 1 & (1 \leqslant u \leqslant 2) \\ \big(u\omega(u)\big)' = \omega(u-1) & (u > 2). \end{cases}$$

Ces propriétés entraînent (voir [Te, p. 405–407], par exemple)

$$\begin{cases} u\omega'(u) = \omega(u-1) - \omega(u) & (u > 1) \\ \omega(u) = \mathrm{e}^{-\gamma} + O\big(u^{-\frac{u}{2}}\big) & (u \longrightarrow +\infty). \end{cases} \tag{4.1}$$

Nous désignons par $*$ la convolution de deux fonctions et nous montrons

Proposition 4.1. *Soit* $u_0 \geqslant 2$, *et soit* $z = X^{\frac{1}{u}}$. *Alors, uniformément pour* $2 \leqslant u \leqslant u_0$ *et pour* $X \geqslant 2$, *on a la formule*

$$\Omega_g(X, z) = \hat{g}(1) u\Big(2\omega(u) + (\omega * \omega)(u)\Big)\frac{X}{\log X} + O_{u_0, g}\Big(\frac{X}{(\log X)^2}\Big).$$

Preuve. La preuve de cette proposition résulte par une facile intégration par partie de l'estimation (4.2) ci-dessous: posons

$$\Omega(X, z) = \sum_{\substack{n \leqslant X \\ p|n \Rightarrow p \geqslant z}} 2^{\Omega(n)},$$

alors avec les notations et hypothèses précédentes, on a

$$\Omega(X, z) = u\Big(2\omega(u) + (\omega * \omega)(u)\Big)\frac{X}{\log X} + O_{u_0}\Big(\frac{X}{(\log X)^2}\Big). \tag{4.2}$$

Soit $\tau(n)$ l'habituelle fonction nombre de diviseurs, et soit

$$D(X, z) = \sum_{n \leqslant X} \tau(n) f_z(n).$$

La fonction $\Omega(X, z)$ ne diffère guère de $D(X, z)$ puisqu'on a la relation

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \Omega(X, z) - D(X, z) &\leqslant \sum_{p \geqslant z,} \sum_{\substack{n \leqslant X \\ p^2 | n}} 2^{\Omega(n)} f_z(n) \\ &\leqslant 4 \sum_{p \geqslant z,} \sum_{m \leqslant X/p^2} 2^{\Omega(m)} f_z(m) = O_{u_0}\big(X z^{-1}\big). \end{aligned} \tag{4.3}$$

On adapte maintenant la méthode bien connue de l'hyperbole à l'étude de $D(X, z)$. Soit

$$\Phi(x, z) := |\{n \leqslant x \; ; p|n \Rightarrow p \geqslant z\}| = \sum_{n \leqslant x} f_z(n).$$

Rappelons que, uniformément pour $x \geqslant z \geqslant 2$, on a (par exemple [Te, Th. 3 p. 406])

$$\Phi(x,z) = \frac{x\omega(\log x/\log z) - z}{\log z} + O\Big(\frac{x}{(\log z)^2}\Big). \tag{4.4}$$

On a donc

$$D(X,z) = \sum\sum_{mn\leqslant X} f_z(m)f_z(n) = 2\sum_{m\leqslant\sqrt{X}} f_z(m)\Phi\Big(\frac{X}{m},z\Big) - \Phi(\sqrt{X},z)^2.$$

La formule (4.4) implique

$$\begin{aligned} D(X,z) =& 2X\sum_{m\leqslant\sqrt{X}} \frac{f_z(m)}{m}\frac{\omega((\log X/m)/\log z)}{\log z} - \frac{X}{(\log z)^2}\omega^2\Big(\frac{\log X}{2\log z}\Big) \\ &+ O\Big(\frac{z\sqrt{X}}{\log^2 z}\Big) + O_{u_0}\Big(\frac{X}{(\log X)^2}\prod_{z\leqslant p\leqslant\sqrt{X}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big) \\ =& 2X\sum_{m\leqslant\sqrt{X}} \frac{f_z(m)}{m}\frac{\omega((\log X/m)/\log z)}{\log z} + O_{u_0}\Big(\frac{X}{(\log X)^2}\Big). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Le terme principal de la partie droite de (4.5) s'écrit, en séparant la valeur $m=1$, comme

(4.6)

$$\begin{aligned} &\frac{2X}{\log z}\Big\{\omega(u) + \int_z^{\sqrt{X}} \frac{\omega\Big((\log X/t)/\log z\Big)}{t}\ \mathrm{d}\Phi(t,z)\Big\} \\ &\quad = \frac{2X}{\log z}\Big\{\omega(u) + \Big[\Phi(t,z)\frac{\omega((\log X/t)/\log z)}{t}\Big]_{t=z}^{t=\sqrt{X}} \\ &\qquad - \int_z^{\sqrt{X}} \Phi(t,z)\Big(-\frac{\omega((\log X/t)/\log z)}{t^2} - \frac{\omega'((\log X/t)/\log z)}{t^2\log z}\Big)\ \mathrm{d}t\Big\} \\ &\quad = \frac{2X}{\log z}\Big\{\omega(u) + \int_z^{\sqrt{X}} \Phi(t,z)\frac{\omega((\log X/t)/\log z)}{t^2}\ \mathrm{d}t\Big\} + O_{u_0}\Big(\frac{X}{(\log X)^2}\Big). \end{aligned}$$

On applique de nouveau (4.4), pour traiter l'intégrale à droite de (4.6), on a

(4.7)

$$\begin{aligned} &\int_z^{\sqrt{X}} \Phi(t,z)\frac{\omega((\log X/t)/\log z)}{t^2}\ \mathrm{d}t \\ &\qquad = \int_z^{\sqrt{X}} \frac{\omega(\log t/\log z)}{\log z}\frac{\omega((\log X/t)/\log z)}{t}\ \mathrm{d}t + O\Big(\frac{1}{\log z}\Big) \\ &\qquad = \int_1^{\frac{u}{2}} \omega(x)\omega(u-x)\ \mathrm{d}x + O\Big(\frac{1}{\log z}\Big) \\ &\qquad = \frac{1}{2}(\omega*\omega)(u) + O\Big(\frac{1}{\log z}\Big), \end{aligned}$$

par changement de variable $x = \log t / \log z$ et par définition de la fonction ω. Il suffit de regrouper (4.3), (4.5), (4.6) et (4.7) pour terminer la preuve de (4.2). $\square$

Lors de la preuve des Théorèmes 1.2 et 1.3, nous aurons besoin du comportement, pour u grand, du coefficient $u\Big(2\omega(u) + (\omega * \omega)(u)\Big)$, grâce au

LEMME 4.2. *Pour tout $u \geqslant 2$, on a l'inégalité*

$$\left|\Big(2\omega(u) + (\omega * \omega)(u)\Big) - \mathrm{e}^{-2\gamma}(u+2)\right| \leqslant (2u+6) \sup_{t \geqslant \frac{u}{2}-1} \left|\omega(t) - \mathrm{e}^{-\gamma}\right|.$$

Preuve. On désigne par θ un réel de valeur absolue inférieure à 1, dont la valeur peut changer d'une ligne à l'autre, on pose aussi

$$\kappa = \sup\nolimits_{t \geqslant \frac{u}{2}-1} \left|\omega(t) - \mathrm{e}^{-\gamma}\right|.$$

On utilise essentiellement les relations (4.1), pour illustrer le fait que $\omega(u)$ tend très vite vers sa limite $\mathrm{e}^{-\gamma}$, lorsque $u \longrightarrow \infty$. Par raison de symétrie, on a

$$(\omega * \omega)(u) = 2\int_1^{\frac{u}{2}} \omega(v)\omega(u-v)\ \mathrm{d}v = 2\Big(\mathrm{e}^{-\gamma} + \theta\kappa\Big) \int_1^{\frac{u}{2}} \omega(v)\ \mathrm{d}v. \tag{4.8}$$

Pour $y = \frac{u}{2} \geqslant 1$, on a, comme conséquences de (4.1), les égalités suivantes:

$$\begin{aligned}
\int_1^y \omega(v)\ \mathrm{d}v = [t\omega(t)]_1^y - \int_1^y t\omega'(t)\ \mathrm{d}t& \\
&= y\omega(y) - \omega(1) + \int_1^y \Big(\omega(t) - \omega(t-1)\Big)\ \mathrm{d}t \\
&= y(\mathrm{e}^{-\gamma} + \theta\kappa) - 1 + \int_{y-1}^y \omega(t)\ \mathrm{d}t \\
&= y(\mathrm{e}^{-\gamma} + \theta\kappa) - 1 + (\mathrm{e}^{-\gamma} + \theta\kappa) \\
&= \mathrm{e}^{-\gamma}(y+1) - 1 + \theta\kappa(y+1).
\end{aligned}$$

Reportant cette expression dans (4.8), on voit que

$$\begin{aligned}
(\omega * \omega)(u) &= 2(\mathrm{e}^{-\gamma} + \theta\kappa)\Big(\mathrm{e}^{-\gamma}(y+1) - 1\Big) + 2\theta\kappa(y+1) \\
&= 2\mathrm{e}^{-\gamma}\Big(\mathrm{e}^{-\gamma}(y+1) - 1\Big) + 2\theta\kappa(y+1)(\mathrm{e}^{-\gamma}+1) \\
&= (u+2)\mathrm{e}^{-2\gamma} - 2\mathrm{e}^{-\gamma} + \theta\kappa(2u+4)
\end{aligned}$$

(notons qu'on a toujours $\kappa < \frac{1}{2}$ et $\omega(u) \leqslant 1$). Ajoutons à la formule précédente, la relation triviale $2\omega(u) = 2\mathrm{e}^{-\gamma} + 2\theta\kappa$, on termine la preuve du Lemme 4.2. $\square$

5. Preuve du Théorème 1.2

5.1. *Majoration de la partie gauche de* (1.9). Pour $g>0$ vérifiant (1.5) et $X\geqslant 2$, on pose

$$a_n^{\pm}=\begin{cases} g\Big(\dfrac{n}{X}\Big)\Big(\pm\dfrac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}+2^{\Omega(n)}\Big) & \text{si } 2\nmid n,\\ 0 & \text{si } 2\mid n.\end{cases}$$

Par l'inégalité (1.4) et l'inégalité triviale $2^{\nu(n)}\leqslant 2^{\Omega(n)}$, on déduit

$$a_n^{\pm}\geqslant 0,\quad (n\geqslant 1). \tag{5.1}$$

On a ainsi masqué les changements de signe de $\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}$ en ajoutant la quantité $2^{\Omega(n)}$, on peut donc appliquer des méthodes de crible. Au vu de (1.4), il eût été plus naturel d'ajouter $2^{\nu(n)}$, mais cette fonction n'est pas totalement multiplicative, d'où une complication supplémentaire pour écrire la formule correspondant à (3.2). Pour appliquer le Corollaire 3.1, on choisit donc la fonction multiplicative

$$\begin{cases}\omega(2)=0\\ \omega(p)=2 \quad (p\geqslant 3).\end{cases}$$

Cherchons les quantités Y et Z et r_d pour satisfaire à (3.2). Par le Lemme 4.1, on a, pour tout d impair

$$\begin{aligned}(5.2)\quad &\sum_{\substack{d\mid n\\ 2\nmid n}} 2^{\Omega(n)} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\\ &\qquad=\frac{2^{\Omega(d)}}{d}X\Big\{\hat g(1)G(1)\log X+c_1(g)-\hat g(1)G(1)\log d\Big\}+r'(d,X),\end{aligned}$$

où le terme d'erreur vérifie

$$r'(d,X)=O_g\Big(2^{\Omega(d)}\Big(\frac{X}{d}\Big)^{\frac{7}{8}}\Big). \tag{5.3}$$

Au vu de (5.2), on voit que, pour d impair, la relation (3.2) est satisfaite avec

$$\begin{aligned}\omega(d)&=2^{\Omega(d)},\\ Y&=\hat g(1)G(1)X\log X+c_1(g)X,\\ Z&=\hat g(1)G(1)X,\\ r_d&=r'(d,X)\pm\sum_{\substack{d\mid n\\ 2\nmid n}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Pour d pair, (3.2) est trivialement satisfaite, puisque $\omega(d)=0$ et $r_d=0$. Posons maintenant

$$x=X^{\frac{1}{4}}\Big(\log X\Big)^{-B},$$

avec B constante absolue, fixée ultérieurement. Par (1.4), (5.3) et l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on a les majorations

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d\leqslant x^2\\ 2\nmid d}} 3^{\Omega(d)}|r_d| &\ll \sum_{\substack{d\leqslant x^2\\ 2\nmid d}} 3^{\Omega(d)}\Big|\sum_{\substack{d\mid n\\ 2\nmid n}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| + \sum_{\substack{d\leqslant x^2\\ 2\nmid d}} 6^{\Omega(d)}\Big(\frac{X}{d}\Big)^{\frac{7}{8}}\\ &\ll \Big(\sum_{d\leqslant x^2} 9^{\Omega(d)}\Big(\sum_{\substack{n\leqslant 2X\\ d\mid n}} 2^{\Omega(n)}\Big)\Big)^{\frac12}\cdot\Big(\sum_{\substack{d\leqslant x^2\\ 2\nmid d}}\Big|\sum_{\substack{d\mid n\\ 2\nmid n}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big|\Big)^{\frac12} + X^{\frac{16}{17}},\end{aligned}$$

soit finalement la relation

$$\sum_{\substack{d\leqslant x^2\\ 2\nmid d}} 3^{\Omega(d)}|r_d| \ll X(\log X)^{-3}, \tag{5.4}$$

comme conséquence de la Proposition 2.1, pourvu que B soit suffisamment grand.

Nous sommes maintenant dans le cadre de l'application des formules du crible étrange. Pour le Théorème 1.2, nous nous contentons de la forme faible du Corollaire 3.1, donnée en (3.11). On pose donc

$$\tau = \frac{\log x}{\log z}\quad \Big(= \frac{1}{4}\frac{\log X}{\log z} + O\Big(\frac{\log\log X}{\log z}\Big)\Big).$$

Ainsi grâce à (5.4), qui contrôle en moyenne les termes d'erreur, on a les majorations

$$\begin{aligned}S(\mathcal{A}^{\pm}, z) &= \sum_{n,\, p\mid n\Rightarrow p\geqslant z} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Big(\pm\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} + 2^{\Omega(n)}\Big)\\ &\leqslant \hat{g}(1)G(1)\cdot\frac{X}{\sigma_2(2\tau)}\prod_{3\leqslant p<z}\Big(1-\frac{2}{p}\Big)\Big\{\log X + 2\log z\\ &\qquad + O\Big(\frac{\tau^5\log X}{\log z}\Big)\Big\} + O\Big(X(\log X)^{-3}\Big).\end{aligned} \tag{5.5}$$

La formule de Mertens donne l'égalité

$$\prod_{3\leqslant p<z}\Big(1-\frac{2}{p}\Big) = 4\prod_{p<z}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^2\prod_{3\leqslant p<z}\frac{p^2-2p}{(p-1)^2} = \frac{\mathrm{e}^{-2\gamma}G(1)^{-1}}{\log^2 z}\Big(1+O\Big(\frac{1}{\log z}\Big)\Big),$$

qui, reportée dans (5.5), donne la majoration

$$S(\mathcal{A}^{\pm}, z) \leqslant \hat{g}(1)\cdot\frac{\mathrm{e}^{-2\gamma}}{\sigma_2(2\tau)}\cdot X\cdot\Big\{\frac{\log X}{\log^2 z} + \frac{2}{\log z}\Big\} + O\Big(\frac{X\log X}{\log^3 z}\Big). \tag{5.6}$$

On pose maintenant

$$z = X^{\frac{1}{u}},$$

si bien qu'on a la relation $\tau = u/4 + O(1/\log\log X)$. La relation (5.6) devient alors

$$S(\mathcal{A}^{\pm}, z) \leqslant \hat{g}(1) \cdot \frac{\mathrm{e}^{-2\gamma}}{\sigma_2(u/2)} \cdot \frac{X}{\log X} \cdot (u^2 + 2u) + O\Big(\frac{X}{\log X \log\log X}\Big). \tag{5.7}$$

Il est bien connu que la fonction σ_2 tend très vite 1, c'est une des nombreuses formes du lemme fondamental du crible. Ainsi, par [HR, Chap. 6] ou [Gr, Lemma 1, p. 263], on a

$$\frac{1}{\sigma_2(t)} = 1 + O\Big(\big(\frac{t}{2}\big)^{-\frac{t}{2}}\Big) \ (t \geqslant 1), \tag{5.8}$$

ce qui transforme (5.7) en

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}^{\pm}, z) \leqslant \hat{g}(1) \cdot \mathrm{e}^{-2\gamma} \cdot \frac{X}{\log X} \cdot (u^2 + 2u)\Big(1 + O\Big(\big(\frac{u}{5}\big)^{-\frac{u}{5}}\Big)\Big) \\ + O\Big(\frac{X}{\log X \log\log X}\Big). \end{aligned} \tag{5.9}$$

D'autre part, la Proposition 4.1 crible, de façon exacte, la suite $2^{\Omega(n)} g\big(n/X\big)$. Combinant cette proposition avec le Lemme 4.2 et la relation (4.1) on obtient finalement l'égalité

$$\begin{aligned} &\sum_{n,\ p|n \Rightarrow p \geqslant z} 2^{\Omega(n)} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \\ &= \hat{g}(1) \cdot \mathrm{e}^{-2\gamma} \cdot \frac{X}{\log X} \cdot (u^2 + 2u)\Big(1 + O\Big(\big(\frac{u}{5}\big)^{-\frac{u}{5}}\Big)\Big) + O\Big(\frac{X}{\log X \log z}\Big). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Retranchant (5.10) de (5.9), on parvient ainsi à la

Proposition 5.1. *Soit $g > 0$ vérifiant* (1.5) *et soit u_1 un nombre réel $\geqslant 1$. Il existe une constante $c_2 > 0$, ne dépendant que de g, et une constante c_2', ne dépendant que de g et u_1, telles que, pour tout u vérifiant $1 \leqslant u \leqslant u_1$, tout $X \geqslant 3$, on ait l'inégalité*

$$\Big| \sum_{n,\ p|n \Rightarrow p \geqslant X^{\frac{1}{u}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} \Big| \leqslant c_2 \frac{X}{\log X} \cdot \Big\{ \big(\frac{u}{5}\big)^{-\frac{u}{5}} + \frac{c_2'}{\log\log X} \Big\}.$$

5.2. *Minoration de la partie droite de* (1.9). Pour démontrer le Théorème 1.2, il reste à minorer la partie droite de (1.9). L'objet de ce paragraphe est de montrer la

Proposition 5.2. *Pour tout réel $u > 3$, il existe une constante $c_3(u) > 0$, telle que, pour tout $g > 0$ vérifiant* (1.5), *il existe $X_0(g, u)$, telle que, pour $X > X_0(g, u)$, on ait la minoration*

$$\sum_{n,\ p|n \Rightarrow p \geqslant X^{\frac{1}{u}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \Big| \frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} \Big| \geqslant c_3(u) \hat{g}(1) \cdot \frac{X}{\log X}.$$

La preuve de ce résultat est presque explicitement dans [FM]. Néanmoins, nous en résumons la preuve. Nous aurons besoin du

Lemme 5.1 ([FM, Prop. 4.1]). *Soit g une fonction vérifiant* (1.5). *Pour $P \longrightarrow +\infty$, on a l'égalité*

$$\sum_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ \theta_{p,\bar{n}^2}\in[\alpha,\beta]}}\sum_{n} f(n)g\Big(\frac{pn}{X}\Big)=\sum_{p\in\mathcal{P}}\sum_{n} f(n)g\Big(\frac{pn}{X}\Big)\Big(\frac{2}{\pi}\int_\alpha^\beta \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta+O(P^{-\frac{1}{8}})\Big)$$
$$+O_g\Big((P|\mathcal{P}|)^{\frac{1}{2}}(\frac{N}{P}+P)^{\frac{1}{2}}(\sum_n |f(n)|^2)^{\frac{1}{2}}\Big),$$

uniformément pour $0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\pi$, pour tout $X\geqslant 1$, pour tout ensemble de nombres premiers $\mathcal{P}\subset[P,2P[$, pour tout $N\geqslant 1$ et toute fonction arithmétique f telle que $f(n)=0$, si $n>N$ ou si n a diviseur premier dans $\mathcal{P}$.

La preuve de cette égalité est donnée en détail dans [FM] quand g est remplacée par la fonction caractéristique de l'intervalle $]0,1]$ (avec un facteur $\log X$ supplémentaire dans le terme d'erreur), elle combine le grand crible – dans une démarche proche de la démonstration du théorème de Barban–Davenport–Halberstam – et la loi verticale de Sato–Tate. La preuve pour g un fonction lisse à support compact est identique. □

5.3. *Preuve de la Proposition* 5.2. Soit maintenant ξ tel que

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\xi \sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta=\frac{3}{8}.$$

Posons $\mathcal{I}=[0,\xi]\cup[\pi-\xi,\pi]$. Définissons les réels

$$\mu_3^-=\max(\frac{1}{u},\frac{2}{7}),\ \mu_3^+=\mu_2^-=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}+\mu_3^-)\ \text{et}\ \mu_2^+=\frac{1}{3}.$$

Puisque $u>3$, on a les inégalités

$$\frac{2}{7}\leqslant\mu_3^-<\mu_3^+=\mu_2^-<\mu_2^+=\frac{1}{3},\tag{5.11}$$

$$\frac{1}{u}<\frac{1}{3}<1-(\mu_2^++\mu_3^+)<1-(\mu_2^-+\mu_3^-)<\mu_2^-+\mu_3^-.\tag{5.12}$$

On effectue un partition dyadique sur les variables de sommation. Notons P_2 et P_3 des nombres de la forme

$$P_2=2^{\lambda_2}X^{\mu_2^-}\quad(\lambda_2=0,\ 1,\ \cdots)\ \text{ avec }\ P_2<\frac{1}{2}X^{\mu_2^+}$$

et

$$P_3=2^{\lambda_3}X^{\mu_3^-}\quad(\lambda_3=0,\ 1,\ \cdots)\ \text{ avec }\ P_3<\frac{1}{2}X^{\mu_3^+}.$$

Soient P_2^-, P_3^-, P_2^+ et P_3^+, les plus petits et les plus grands éléments de ces deux listes. En appliquant le Lemme 5.1 avec

$$f(n) = \left|\left\{(p_2,p_3);\ n=p_2p_3,\ p_2\sim P_2,\ p_3\sim P_3\right\}\right|,$$

(la notation $n\sim N$, signifie $N\leqslant n<2N$), en utilisant les inégalités (5.12) et la définition de l'intervalle $\mathcal{I}$, on parvient à l'égalité (on note $1_{\mathcal{I}}(\theta)$ la fonction caractéristique de l'intervalle $\mathcal{I}$)

$$\begin{aligned}\sum_{p_1}\sum_{p_2\sim P_2}\sum_{p_3\sim P_3} g\Big(\frac{p_1p_2p_3}{X}\Big)1_{\mathcal{I}}(\theta_{p_1,\overline{p_2p_3}^2})\\ =\frac{3}{4}\sum_{p_1}\sum_{p_2\sim P_2}\sum_{p_3\sim P_3} g\Big(\frac{p_1p_2p_3}{X}\Big)\Big(1+O(X(\log X)^{-10})\Big).\end{aligned}$$

On a la même égalité pour les sommes

$$\sum_{p_1}\sum_{p_2\sim P_2}\sum_{p_3\sim P_3} g\Big(\frac{p_1p_2p_3}{X}\Big)1_{\mathcal{I}}(\theta_{p_2,\overline{p_1p_3}^2})$$

et

$$\sum_{p_1}\sum_{p_2\sim P_2}\sum_{p_3\sim P_3} g\Big(\frac{p_1p_2p_3}{X}\Big)1_{\mathcal{I}}(\theta_{p_3,\overline{p_1p_2}^2}).$$

Un raisonnement fort simple d'inclusion–exclusion (utilisé sous la forme du Lemme 2.7 dans [FM], qui apparaîtra sous la forme du Lemme 6.1, ci–dessous), donne la minoration

$$\sum_{p_1}\sum_{p_2\sim P_2}\sum_{p_3\sim P_3}{}^{(*)} g\Big(\frac{p_1p_2p_3}{X}\Big)\geqslant\frac{1}{4}\sum_{p_1}\sum_{p_2\sim P_2}\sum_{p_3\sim P_3} g\Big(\frac{p_1p_2p_3}{X}\Big)\Big(1+O(\frac{X}{\log^{10}X})\Big),$$

$(*)$ signifiant que l'on somme sur les triplets (p_1,p_2,p_3) vérifiant

$$\Big(\theta_{p_1,\overline{p_2p_3}^2},\ \theta_{p_2,\overline{p_1p_3}^2},\theta_{p_3,\overline{p_1p_2}^2}\Big)\in\mathcal{I}^3.$$

Sommant maintenant sur les divers P_2 et P_3, on obtient

$$\begin{aligned}(5.13)\quad \sum_{p_1}\sum_{P_2^-\leqslant p_2<2P_2^+}\sum_{P_3^-\leqslant p_3<2P_3^+}{}^{(*)} g\Big(\frac{p_1p_2p_3}{X}\Big)\\ \geqslant\frac{1}{4}\sum_{p_1}\sum_{P_2^-\leqslant p_2<2P_2^+}\sum_{P_3^-\leqslant p_3<2P_3^+} g\Big(\frac{p_1p_2p_3}{X}\Big)\Big(1+O(\frac{X}{\log^{10}X})\Big).\end{aligned}$$

Par la multiplicativité croisée, on voit que si $n=p_1p_2p_3$ est tel que

$$(\theta_{p_1,\overline{p_2p_3}^2},\ \theta_{p_2,\overline{p_1p_3}^2},\theta_{p_3,\overline{p_1p_2}^2})\in\mathcal{I}^3,$$

on a la minoration

$$\frac{|\mathrm{Kl}(1,1;n)|}{\sqrt{n}} \geqslant 8\cos^3 \xi.$$

Reportant cette minoration dans (5.13), on obtient finalement

$$\begin{aligned}
&\sum_{n,\ p|n \Rightarrow p \geqslant X^{\frac{1}{u}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Big|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| \\
&\qquad \geqslant 2\cos^3(\xi)\Big\{\sum_{p_1} \sum_{P_2^- \leqslant p_2 < 2P_2^+} \sum_{P_3^- \leqslant p_3 < 2P_3^+} g\Big(\frac{p_1p_2p_3}{X}\Big)\Big\}\Big(1 + O(\frac{X}{\log^{10} X})\Big) \\
&\qquad \geqslant c_3(u) \cdot \hat{g}(1) \cdot \frac{X}{\log X},
\end{aligned}$$

par le théorème des nombres premiers. Ceci termine la preuve de la Proposition 5.2. □

Il est alors facile de prouver le Théorème 1.2. Pour $u \geqslant 4$, on a, d'aprés la Proposition 5.2, la minoration

$$\sum_{n,\ p|n \Rightarrow p \geqslant X^{\frac{1}{u}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Big|\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}}\Big| \geqslant c_3(4)\hat{g}(1) \cdot \frac{X}{\log X}.$$

On prend alors u_0 tel que $c_2 \cdot \left(\frac{u_0}{5}\right)^{-\frac{u_0}{5}} < c_3(4)/2$. Par la Proposition 5.1, on a le Théorème 1.2, avec $\delta_0 = 1/3$. On peut d'ailleurs prendre δ_0, arbitrairement proche de 1, à condition de prendre u_0, suffisamment grand. Le Théorème 1.2 est ainsi prouvé. □

6. Preuve du Théorème 1.3

Dans tout ce paragraphe, on pose

$$u_0 = 23.9.$$

Nous montrerons que l'inégalité (1.9) est vraie pour $u = u_0$ (et $\delta_0 > 0$, minuscule). La preuve montrera en fait que l'inégalité est vraie également pour $u_0 \leqslant u \leqslant u_1$ et $X \geqslant X(u_1)$, pour tout u_1 fixé.

6.1. *Version effective de la Proposition* 5.1. Reprenant pas à pas la démonstration du Théorème 1.2, donnée au §5, et utilisant le Corollaire 3.1, plutôt que (3.11), on voit que pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour X suffisamment grand, la majoration

$$\begin{aligned} S(\mathcal{A}^{\pm}, X^{\frac{1}{u_0}}) &\leqslant \hat{g}(1)G(1)X\frac{W(X^{\frac{1}{u_0}})}{\sigma_2(\frac{u_0}{2})} \\ &\qquad \times \Big\{\log X + 2\frac{\log X^{\frac{1}{u_0}}}{\sigma_2(\frac{u_0}{2})}\int_0^1 \sigma_2(\frac{u_0}{2} - 2t)\ \mathrm{d}t\Big\}(1+\varepsilon) \\ &\leqslant \hat{g}(1)\frac{X}{\log X}\frac{\mathrm{e}^{-2\gamma}}{\sigma_2(\frac{u_0}{2})} \\ &\qquad \times \Big\{u_0^2 + \frac{2u_0}{\sigma_2(\frac{u_0}{2})}\int_0^1 \sigma_2(\frac{u_0}{2} - 2t)\ \mathrm{d}t\Big\}(1+\varepsilon). \end{aligned}$$

Un calcul numérique, effectué par F. Alouges, par une méthode de quadrature par triangle donne

$$\sigma_2(\frac{u_0}{2}) > 0.\,999\,03$$

et

$$\int_0^1 \sigma_2(\frac{u_0}{2} - 2t)\ \mathrm{d}t < 0.\,996\,93..$$

Avec ces valeurs, on obtient la majoration

$$\sum_{n,\ p|n\Rightarrow p\geqslant X^{\frac{1}{u_0}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\Big(\pm\frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} + 2^{\Omega(n)}\Big) \leqslant 195\,.293\ \times\ \hat{g}(1)\cdot\frac{X}{\log X}, \tag{6.1}$$

pour X suffisamment grand.

Évaluons maintenant l'autre partie, à savoir

$$\sum_{n,\ p|n\Rightarrow p\geqslant X^{\frac{1}{u_0}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)2^{\Omega(n)}.$$

Par la Proposition 4.1, on a l'égalité

$$\sum_{n, p|n\Rightarrow p\geqslant X^{\frac{1}{u_0}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)2^{\Omega(n)} = \big(u_0 + o(1)\big)\Big((\omega*\omega)(u_0) + 2\omega(u_0)\Big)\hat{g}(1)\cdot\frac{X}{\log X}.$$

Par le Lemme 4.2, on a, pour un certain θ, tel que $|\theta| \leqslant 1$, et pour X suffisamment grand, l'égalité

$$\begin{aligned} &\sum_{n, p|n\Rightarrow p\geqslant X^{\frac{1}{u_0}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)2^{\Omega(n)} \\ &\quad = \Big(\mathrm{e}^{-2\gamma}(u_0^2 + 2u_0) + \theta u_0(2u_0+7)\sup_{t\geqslant 10}|\omega(t) - \mathrm{e}^{-\gamma}|\Big)\hat{g}(1)\cdot\frac{X}{\log X}. \end{aligned} \tag{6.2}$$

On rappelle que la fonction ω est reliée aux fonctions F et f du crible linéaire, par la formule $\omega(t) = (F(t) + f(t))/(2\mathrm{e}^{\gamma})$, que les fonctions F et f sont respectivement décroissante et croissante vers leur limite 1, et que pour $t \geqslant 10$, on a

$0 < 1 - f(t),\ F(t) - 1 < 3 \cdot\ 10^{-10}$ (voir [GR, p. 212]). Ces diverses remarques entraînent que pour $t \geqslant 10$, on a $|\omega(t) - \mathrm{e}^{-\gamma}| \leqslant 10^{-10}$. Par un calcul numérique et les considérations précédentes, la formule (6.2) devient

$$\sum_{n,\ p|n \Rightarrow p \geqslant X^{\frac{1}{u_0}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big) 2^{\Omega(n)} \geqslant 195.\,134 \times \hat{g}(1) \cdot \frac{X}{\log X}. \tag{6.3}$$

Retranchant (6.3) de (6.1), on obtient finalement la majoration

$$\Big| \sum_{n, p|n \Rightarrow p \geqslant X^{\frac{1}{u_0}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \frac{\mathrm{Kl}(1,1;n)}{\sqrt{n}} \Big| \leqslant 0.\,159 \times \hat{g}(1) \cdot \frac{X}{\log X}, \tag{6.4}$$

pour X suffisamment grand.

6.2. *Version effective de la Proposition* 5.2. La démarche la plus naturelle serait de suivre ligne à ligne la preuve de cette proposition. On arrive très vite à une minoration effective, mais la valeur de $c_3(23.9)$ ainsi obtenue est décevante. À cela deux raisons: l'utilisation du grand crible implique *de facto*, que l'application du Lemme 5.1 est limitée par la contrainte

$$p_2 p_3 \geqslant p_1 (\log X)^A, \tag{6.5}$$

(pour une certaine constante A), lors de la minoration de la contribution des $|\mathrm{Kl}(1,1;n)|/\sqrt{n}$ avec $n = p_1 p_2 p_3$ ($p_1 > p_2 > p_3$).

Le deuxième point est qu'on ne dit rien sur l'indépendance supposée des trois variables aléatoires

$$\theta_{p_1, \overline{p_2 p_3}^2},\ \theta_{p_2, \overline{p_1 p_3}^2},\ \theta_{p_3, \overline{p_1 p_2}^2}$$

ce qui amène à appliquer avec k maximal (c'est–à–dire $k = 3$), le lemme suivant

Lemme 6.1. *Soient $k \geqslant 1$, $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_k$, k sous-ensembles mesurables, d'un ensemble $\mathcal{E}$, muni d'une mesure μ de masse totale finie. On a alors l'inégalité*

$$\mu\big(\mathcal{E}_1 \cap \cdots \cap \mathcal{E}_k\big) \geqslant \mu\big(\mathcal{E}_1\big) + \cdots + \mu\big(\mathcal{E}_k\big) - (k-1)\mu\big(\mathcal{E}\big).$$

La méthode que nous présentons ci–après, contourne en partie, les écueils précédents, et ouvre la voie à diverses améliorations possibles par un jeu combinatoire plus élaboré, menant sans doute à des questions plus sophistiquées de géométrie algébrique. Au lieu de travailler sur $[0,\pi]$, muni de μ_{ST}, nous préférons maintenant travailler sur $[-1,1]$, muni de la mesure $\mu^{(1)}$, image directe de μ_{ST} par l'application

$$\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \rightarrow & [-1,1] \\ \theta & \mapsto & \cos\theta \end{array}$$

(on a donc $\mathrm{d}\mu^{(1)}x = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$). Plus généralement, pour tout entier $\omega \geqslant 1$, on note $\mu^{(\omega)}$, la mesure, sur $[-1,1]$, image de la mesure $\mu^{(1)} \otimes \cdots \otimes \mu^{(1)}$ (sur $[-1,1]^\omega$), par l'application

$$\begin{array}{ccc} [-1,1]^\omega & \to & [-1,1] \\ (x_1,\ldots,x_\omega) & \mapsto & x_1 \times \cdots \times x_\omega. \end{array}$$

Par récurrence on a, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, les formules

$$\mu^{(1)}([-x,x]) = \frac{4}{\pi}\int_0^x \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

et

$$\mu^{(\omega+1)}([-x,x]) = \mu^{(\omega)}([-x,x]) + \frac{4}{\pi}\int_x^1 \mu^{(\omega)}([-x/t,x/t])\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Pour alléger les notations, on pose aussi, pour m et n entiers premiers entre eux ($\geqslant 1$)

$$C(m;n) = \frac{\mathrm{Kl}(\overline{m},\overline{m};n)}{2^{\nu(n)}\sqrt{n}}.$$

La multiplicativité croisée donne, pour $(m,n)=1$, l'égalité

$$C(1;mn) = C(m;n)C(n;m).$$

On définit $\theta'_{n,m} \in [0,\pi]$ par la formule

$$\cos\theta'_{n,m} = C(m;n).$$

Avec les notations de l'introduction, on a donc $\theta'_{p,m} = \theta_{p,\overline{m}^2}$. Enfin, on pose $Y = \exp(\sqrt{\log X})$. Les ensembles utilisés pour la minoration sont les suivants

$$\mathcal{P}_3(X,u) = \Big\{n = p_1p_2p_3 \leqslant 2X;\ X^{\frac{1}{u}} < p_3 < p_2 < p_2Y < p_1, p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2\Big\},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_4(X,u) = \Big\{&n = p_1p_2p_3p_4 \leqslant 2X;\\ &X^{\frac{1}{u}} < p_4 < p_3 < p_3Y < p_2 < p_2Y < p_1,\ p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2p_3\Big\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_5(X,u) = \Big\{&n = p_1p_2p_3p_4p_5 \leqslant 2X;\\ &X^{\frac{1}{u}} < p_5 < p_4 < p_3 < p_2 < p_2Y < p_1,\\ &(p_3p_4p_5)^{\frac{1}{2}}Y < p_2,\ p_1^{\frac{1}{2}}Y < p_2p_3p_4\Big\},\end{aligned}$$

avec $u = u_0$.

Remarquons que $\mathcal{P}_3(X,u)$ contient quasiment tous les $n = p_1p_2p_3$ vérifiant (6.5) et l'inégalité $p_3 > X^{\frac{1}{u}}$. Nous montrerons au §7 les trois propositions suivantes, basées sur des méthodes de sommes d'exponentielles, issues de la géométrie algébrique:

Proposition 6.1. *Soit u réel, strictement supérieur à* 3*. Alors, pour X tendant vers l'infini, chacun des ensembles*

$$\{C(p_1; p_2p_3)\ ;\ n = p_1p_2p_3 \in \mathcal{P}_3(X,u)\}$$

et

$$\{C(p_2p_3; p_1)\ ;\ n = p_1p_2p_3 \in \mathcal{P}_3(X,u)\}$$

est équiréparti sur $[-1,1]$*, respectivement pour les mesures* $\mu^{(2)}$ *et* $\mu^{(1)}$*.*

Proposition 6.2. *Soit u réel, strictement supérieur à* 4*. Alors, pour X tendant vers l'infini, chacun des ensembles*

$$\{C(p_1; p_2p_3p_4)\ ;\ n = p_1p_2p_3p_4 \in \mathcal{P}_4(X,u)\}$$

et

$$\{C(p_2p_3p_4; p_1)\ ;\ n = p_1p_2p_3p_4 \in \mathcal{P}_4(X,u)\}$$

est équiréparti sur $[-1,1]$*, respectivement pour les mesures* $\mu^{(3)}$ *et* $\mu^{(1)}$*.*

et

Proposition 6.3. *Soit u réel, strictement supérieur à* 5*. Alors, pour X tendant vers l'infini, chacun des ensembles*

$$\{C(p_1; p_2p_3p_4p_5)\ ;\ n = p_1p_2p_3p_4p_5 \in \mathcal{P}_5(X,u)\}$$

et

$$\{C(p_2p_3p_4p_5; p_1)\ ;\ n = p_1p_2p_3p_4p_5 \in \mathcal{P}_5(X,u)\}$$

est équiréparti sur $[-1,1]$*, respectivement pour les mesures* $\mu^{(4)}$ *et* $\mu^{(1)}$*.*

Ces propositions étant admises, on déduit une version effective de la Proposition 5.2 comme suit: par la définition de $C(1;n)$ et la multiplicativité croisée, on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{n,\, p\mid n \Rightarrow p \geqslant X^{\frac{1}{u_0}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\frac{|\mathrm{Kl}(1,1;n)|}{\sqrt{n}}\\
&\qquad\geqslant 8\sum_{n\in\mathcal{P}_3(X,u_0)} g\Big(\frac{n}{X}\Big)|C(1;n)| + 16\sum_{n\in\mathcal{P}_4(X,u_0)} g\Big(\frac{n}{X}\Big)|C(1;n)|\\
&\qquad\quad +32\sum_{n\in\mathcal{P}_5(X,u_0)} g\Big(\frac{n}{X}\Big)|C(1;n)|\\
&\qquad\geqslant 8x_3y_3\sum_{n\in\mathcal{Q}_3(X,u_0)} g\Big(\frac{n}{X}\Big) + 16x_4y_4\sum_{n\in\mathcal{Q}_4(X,u_0)} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\\
&\qquad\quad +32x_5y_5\sum_{n\in\mathcal{Q}_5(X,u_0)} g\Big(\frac{n}{X}\Big),
\end{aligned}$$

pour tous les réels positifs $x_3,\ x_4,\ x_5,\ y_3,\ y_4$ et y_5, avec

$$\mathcal{Q}_3(X,u_0) = \Big\{p_1p_2p_3 \in \mathcal{P}_3(X,u_0)\ ;\ |C(p_1;p_2p_3)| \geqslant x_3 \text{ et } |C(p_2p_3;p_1)| \geqslant y_3\Big\},$$

$$\mathcal{Q}_4(X,u_0) = \Big\{p_1p_2p_3p_4 \in \mathcal{P}_4(X,u_0)\ ;\ |C(p_1;p_2p_3p_4)| \geqslant x_4 \text{ et } |C(p_2p_3p_4;p_1)| \geqslant y_4\Big\}$$

et

$$\mathcal{Q}_5(X,u_0) = \Big\{p_1p_2p_3p_4p_5 \in \mathcal{P}_5(X,u_0); |C(p_1;p_2p_3p_4p_5)| \geqslant x_5 \text{ et } |C(p_2p_3p_4p_5;p_1)| \geqslant y_5\Big\}.$$

Les Propositions 6.1, 6.2, 6.3, le Lemme 6.1 (avec $k=2$), une sommation par parties et le théorème des nombres premiers entraînent que, pour $\ell = 3,\ 4$ et 5 ($X \longrightarrow \infty$), on a les minorations

$$\sum_{n\in\mathcal{Q}_\ell(X,u_0)} g\Big(\frac{n}{X}\Big) \geqslant (1-o(1))\hat{g}(1)\Big(1-\mu^{(1)}([-x_\ell,x_\ell]) - \mu^{(\ell-1)}([-y_\ell,y_\ell])\Big)A_\ell(u_0)\cdot\frac{X}{\log X}$$

avec

$$A_3(u) = \int_{1/u}^{1/3}\int_{\max(x,\frac{1-x}{3})}^{\frac{1-x}{2}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{xy(1-x-y)},$$

$$A_4(u) = \int_{\frac{1}{u}}^{\frac14}\int_x^{\frac{1-x}{3}}\int_{\max(y,\frac{1-x}{3}-y)}^{\frac{1-x-y}{2}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{xyz(1-x-y-z)},$$

et

$$A_5(u) = \int_{\frac{1}{u}}^{\frac16}\int_x^{\frac{1-2x}{4}}\int_y^{\min(\frac{1-x-y}{3},1/2-x-y)} \int_{\max(z,\frac{1-x}{3}-y-z,\frac{x+y+z}{2})}^{\frac{1-x-y-z}{2}} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t}{xyzt(1-x-y-z-t)}.$$

On est donc parvenu à l'inégalité

$$\sum_{n,\,p|n\Rightarrow p\geqslant X^{\frac{1}{u_0}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\frac{|\mathrm{Kl}(1,1;n)|}{\sqrt{n}} \geqslant (c_3(u_0)-o(1))\frac{X}{\log X} \tag{6.6}$$

avec

$$c_3(u_0) = 8\ \Xi^{(3)}(x_3;y_3)A_3(u_0) + 16\ \Xi^{(4)}(x_4;y_4)A_4(u_0) + 32\ \Xi^{(5)}(x_5;y_5)A_5(u_0),$$

où

$$\Xi^{(\ell)}(x;y) = xy\Big(1 - \mu^{(1)}([-x,x]) - \mu^{(\ell-1)}([-y,y])\Big),$$

et les $x_3, y_3, x_4, y_4, x_5, y_5$ sont des réels compris entre 0 et 1, à notre disposition. Par calcul numérique, on trouve

$$\begin{aligned}
A_3(u_0) &\geqslant 1.\,556\,058,\\
A_4(u_0) &\geqslant 2.\,218\,960,\\
A_5(u_0) &\geqslant 1.\,215\,065,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Xi^{(3)}(0.222\ ; 0.102) &\geqslant 0.\,006\,284,\\
\Xi^{(4)}(0.192\ ; 0.041) &\geqslant 0.\,001\,879,\\
\Xi^{(5)}(0.140\ ; 0.023) &\geqslant 0.\,000\,572.
\end{aligned}$$

Reportant ces valeurs dans (6.6), on parvient à la minoration, valable pour tout X assez grand

$$\sum_{n,\, p|n \Rightarrow p > X^{\frac{1}{u_0}}} g\Big(\frac{n}{X}\Big)\frac{|\mathrm{Kl}(1,1;n)|}{\sqrt{n}} \geqslant 0.\,166 \cdot \hat{g}(1) \cdot \frac{X}{\log X},$$

qui, comparée à la majoration (6.4), fournit le Théorème 1.3. □

7. Équirépartition des angles de certaines sommes d'exponentielles

Nous introduisons les notations suivantes. Pour k entier $\geqslant 0$, on désigne par $\mathrm{sym}_k\theta = \frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$ la k–ième fonction symétrique, associée à l'intervalle $[0,\pi]$, muni de la mesure μ_{ST}. Rappelons que cette fonction est uniformément bornée par $k+1$. Pour (z_n), suite de nombres complexes, on note $\|z_n\|_{_N} = \Big(\sum_{n\sim N}|z_n|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$. Nous montrerons d'abord les deux énoncés suivants:

Proposition 7.1. *Il existe une constante absolue c_4, telle que, pour tout entier $k \geqslant 1$, tout nombre premier p, tous nombres réels M et N vérifiant $1 \leqslant M,\ N \leqslant p$, toutes suites de nombres réels (α_m) et (β_n), toute famille d'intervalles $\mathcal{I}_m$, on ait la majoration*

$$\Big|\sum_{\substack{m\sim M\\(m,p)=1}}\ \sum_{\substack{n\sim N,\ n\in\mathcal{I}_m\\(n,p)=1}} \alpha_m\beta_n \mathrm{sym}_k\Big(\theta'_{p,mn}\Big)\Big|$$
$$\leqslant c_4 k \|\alpha_m\|_{_M}\ \|\beta_n\|_{_N}(MN)^{1/2}\Big(\frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} + \frac{p^{\frac{1}{4}}\log p}{M^{\frac{1}{2}}}\Big).$$

Proposition 7.2. *Il existe une constante absolue c_5 telle que, pour tout entier $k \geqslant 1$, tout k-uplet $(i_1,\dots,i_k)$ d'entiers $\geqslant 1$, tout entier $r = p_1\cdots p_k$,* *sans facteur carré, toutes suites* (λ_m), (η_s) *et* $(\xi_{m,s})$ *de nombres complexes, telle que* $m \equiv m' \bmod s \Rightarrow \xi_{m,s} = \xi_{m',s}$, *on ait la majoration*

$$\sum_{\substack{s\sim S\\(s,r)=1}} \eta_s \sum_{\substack{m\sim M\\(m,r)=1}} \lambda_m\, \xi_{m,s}\, \mathrm{sym}_{i_1}\Big(\theta'_{p_1,m\frac{r}{p_1}s}\Big)\cdots \mathrm{sym}_{i_k}\Big(\theta'_{p_s,m\frac{r}{p_s}s}\Big)$$
$$\leqslant c_5 2^k C(i_1,\dots,i_k)^{\frac14} \|\lambda_m\|_{_M} \|\eta_s\|_{_S} (MS)^{\frac12}\Big(\sup_{\substack{m\sim M\\ s\sim S}} |\xi_{m,s}|\Big)$$
$$\times\Big(\frac{1}{r^{\frac18}} + \frac{r^{\frac18}}{S^{\frac14}} + \frac{S^{\frac12}}{M^{\frac12}}\Big),$$

avec $C(i_1,\dots,i_k) = 5^k \prod_{j=1}^k (i_j+1)^4$.

7.1. *Preuve de la Proposition* 7.1. L'intérêt de cette proposition est d'affirmer des compensations même lorsque les variations des variables sont petites par rapport à p (disons $M \gg p^{\frac12}\log^2 p$ et $N \gg 1$). La preuve utilise une technique de complétion des sommes d'exponentielles et est la même que la démonstration du [M1, Cor. 2.11], à la différence près que la condition supplémentaire de sommation $n \in \mathcal{I}_m$ disparaît dans notre preuve, dès l'application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz. (Signalons que dans les hypothèses du [M1, Cor. 2.11], la condition $MN \leqslant 2p-1$, aurait dû être libellée en $1 \leqslant M, N \leqslant p$.)

7.2. *Preuve de la Proposition* 7.2. En fait, par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, la Proposition 7.2 revient à montrer l'existence d'une constante c_6, telle que, sous les hypothèses de cette proposition, on ait la majoration

$$\mathcal{A} := \sum_{\substack{s\sim S\\(s,r)=1}} \Big|\sum_{m\sim M} \lambda_m \xi_{m,s} \mathrm{sym}_{i_1}\Big(\theta'_{p_1,m\frac{r}{p_1}s}\Big)\cdots \mathrm{sym}_{i_k}\Big(\theta'_{p_s,m\frac{r}{p_s}s}\Big)\Big|^2 \tag{7.1}$$
$$\leqslant c_6 4^k C(i_1,\dots,i_k)^{\frac12} \|\lambda_m\|^2_{_M} MS\Big(\sup_{\substack{m\sim M\\ s\sim S}} |\xi_{m,s}|\Big)^2\Big(\frac{1}{r^{\frac14}} + \frac{r^{\frac14}}{S^{\frac12}} + \frac{S}{M}\Big).$$

La preuve est parallèle à celle de [M2, Th. 4.1, p. 235], elle–même largement inspirée de [FIK, Th. 2]. Suivant donc la même procédure, on voit qu'on a la majoration

$$\mathcal{A} \leqslant \Big(\sup_{\substack{m\sim M\\ s\sim S}} |\xi_{m,s}|\Big)^2 S \sum_{t\leqslant T} \mathcal{A}_t + O\Big(S\Big(\sup_{\substack{m\sim M\\ s\sim S}} |\xi_{m,s}|\Big)^2 \prod_{j=1}^k (i_j+1)^2 \|\lambda_m\|^2_{_M}\Big), \tag{7.2}$$

avec $T = M/S$, et $\mathcal{A}_t$ vérifiant

$$\mathcal{A}_t^2 \leqslant \|\lambda_m\|^2_{_M}\Big(1 + \frac{M}{rt}\Big) \sum_{\substack{m_1\equiv m_2\\ m_1\neq m_2}}\sum_{\substack{(\mathrm{mod}\ t)\\ (m_1m_2,r)=1}} |\lambda_{m_1}|^2 |V_t(a,m_1,m_2;r)|, \tag{7.3}$$

où on a posé, pour $(a,r)=1$,

$$V_t(a,m_1,m_2;r)=\sum_{\substack{z\,(\mathrm{mod}\,tr),\,(z,r)=1\\(z-m_1,tr)=(z-m_2,tr)=t}}\prod_{j=1}^{k}\mathrm{sym}_{i_j}\Big(\theta'_{p_j,am_1\frac{(m_1-z)}{t}\frac{r}{p_j}}\Big)$$
$$\times\,\mathrm{sym}_{i_j}\Big(\theta'_{p_j,az\frac{(m_1-z)}{t}\frac{r}{p_j}}\Big)\mathrm{sym}_{i_j}\Big(\theta'_{p_j,am_2\frac{(m_2-z)}{t}\frac{r}{p_j}}\Big)\mathrm{sym}_{i_j}\Big(\theta'_{p_j,az\frac{(m_2-z)}{t}\frac{r}{p_j}}\Big).$$

Signalons à l'avant–dernière ligne de [M2, p.235], l'oubli typographique du facteur S. Ainsi, comme dans [M2], on voit, grâce à (7.2) et (7.3), que pour prouver (7.1), il suffit de prouver le

Lemme 7.1. *Si* $m_1\equiv m_2\pmod{t}$ *et* $(r,m_1m_2)=1$, *on a pour tout* a *premier avec* r, *la majoration*

$$|V_t(a,m_1,m_2;r)|\leqslant C(i_1,\dots,i_k)(m_1-m_2,r)^{\frac12}r^{\frac12}.$$

Preuve (*du Lemme* 7.1). Si $r=r_1r_2$, donc $(r_1,r_2)=1$, on a par le théorème chinois, l'égalité

$$V_t(a,m_1,m_2;r)=V_t(a_1,m_1,m_2;r_1)V_t(a_2,m_1,m_2;r_2),$$

pour certains entiers a_1 et a_2, respectivement premiers avec r_1 et r_2. On est donc ramené au cas $k=1$, $r=p$, $i_1=i$. Remarquons que, si $p=2$ ou si $p|m_1-m_2$, on a, par sommation triviale

$$|V_t(a,m_1,m_2;p)|\leqslant(i+1)^4p.$$

Autrement, comme $p\nmid t$, quitte à remplacer a par $a\bar t\frac{r}{p}$, on est ramené à majorer, pour $i\geqslant1$, la somme

$$V:=\sum_{\substack{z\pmod p\\(z(z-m_1)(z-m_2),p)=1}}\mathrm{sym}_i\Big(\theta'_{p,am_1(m_1-z)}\Big)\mathrm{sym}_i\Big(\theta'_{p,az(m_1-z)}\Big)$$
$$\times\,\mathrm{sym}_i\Big(\theta'_{p,am_2(m_2-z)}\Big)\mathrm{sym}_i\Big(\theta'_{p,az(m_2-z)}\Big).$$

Pour cela, on adapte l'argument de Katz [FIK, Ap., p. 278–287]. Soit X_p l'ouvert de $\mathbf{P}^1\otimes\mathbf{F}_p$

$$X_p=\mathrm{Spec}\Big(\mathbf{F}_p\Big[T,\frac{1}{T(T-m_1)(T-m_2)}\Big]\Big)=\mathbf{P}^1\otimes\mathbf{F}_p-\{0,m_1,m_2,\infty\}.$$

On considère alors les quatre morphismes de $X_p\longrightarrow\mathbf{G}_m\otimes\mathbf{F}_p-\{0,\infty\}$:

$$f_1(T)=\Big(am_1(m_1-T)\Big)^{-2},\quad f_2(T)=\Big(aT(m_1-T)\Big)^{-2},$$
$$f_3(T)=\Big(am_2(m_2-T)\Big)^{-2},\quad f_4(T)=\Big(aT(m_2-T)\Big)^{-2}.$$

On considère le $\overline{\mathbf{Q}_\ell}$–faisceau de Kloosterman, noté $\mathcal{K}\ell$ (voir [Ka2]): c'est un faisceau lisse sur $\mathbf{G}_m \otimes \mathbf{F}_p$, de rang 2, pur et de poids 0, tel que, pour tout $x \in \mathbf{G}_m(\mathbf{F}_p)$, on ait

$$\mathrm{Trace}\Big(\mathrm{Frob}_x \mid \mathcal{K}\ell\Big) = -\frac{\mathrm{Kl}(1,x;p)}{\sqrt{p}}.$$

De plus, on sait que $\mathcal{K}\ell$ est modérément modifié en 0, sauvagement ramifié en ∞, avec un unique saut en $1/2$. Ses groupes de monodromie arithmétique et géométrique coïncident et valent SL_2. On forme alors les quatre faisceaux lisses sur X_p

$$\mathcal{K}\ell(f_j) := f_j^*(\mathcal{K}\ell),\ j = 1, \dots, 4,$$

puis les faisceaux

$$\mathcal{K}\ell(f_j)^i := \mathrm{Sym}_i(\mathcal{K}\ell_j),$$

obtenus par composition des représentations $\mathcal{K}\ell_j$, avec la représentation puissance symétrique i–ème de SL_2 (on rappelle qu'elle est irréductible de dimension $i+1$). Par définition, la trace du frobenius de $\mathcal{K}\ell(f_j)^i$ en un point fermé x de X_p est $\mathrm{sym}_i(\theta_{p,f_j(x)})$, si bien que la somme V est associée au faisceau

$$\mathcal{F}^i := \mathcal{K}\ell(f_1)^i \otimes \mathcal{K}\ell(f_2)^i \otimes \mathcal{K}\ell(f_3)^i \otimes \mathcal{K}\ell(f_4)^i,$$

qui est lisse sur X_p, de rang $(i+1)^4$, pur et de poids 0. Par la formule des traces de Lefschetz et les travaux de Deligne [Ka1, Chap. 3], il suffit de montrer que le groupe de monodromie géométrique associé, $G_{\text{géom}}(\mathcal{F}^i)$ agit irréductiblement et de majorer $|\chi_c(X_p \otimes \overline{\mathbf{F}_p}, \mathcal{F}^i)|$.

Considérons sur X_p le faisceau lisse

$$\mathcal{F} = \mathcal{K}\ell(f_1) \oplus \mathcal{K}\ell(f_2) \oplus \mathcal{K}\ell(f_3) \oplus \mathcal{K}\ell(f_4).$$

Comme $\mathcal{F}^i$ est obtenu en composant $\mathcal{F}$ par la représentation $\mathrm{Sym}_i(\mathrm{std}_2) \otimes \mathrm{Sym}_i(\mathrm{std}_2) \otimes \mathrm{Sym}_i(\mathrm{std}_2) \otimes \mathrm{Sym}_i(\mathrm{std}_2)$ de dimension $(i+1)^4$, pour montrer que $G_{\text{géom}}(\mathcal{F}^i)$ agit irréductiblement, il suffit de montrer que le groupe de monodromie de $\mathcal{F}$ est maximal, *i.e.*

$$G_{\text{géom}}(\mathcal{F}) = \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2, \tag{7.4}$$

puisque

$$\mathrm{Sym}_i(\mathrm{std}_2) \otimes \mathrm{Sym}_i(\mathrm{std}_2) \otimes \mathrm{Sym}_i(\mathrm{std}_2) \otimes \mathrm{Sym}_i(\mathrm{std}_2)$$

est une représentation irréductible de $\mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2 \times \mathrm{SL}_2$.

Pour montrer (7.4), il suffit, d'après le critère de Goursat–Kolchin–Ribet, de montrer que pour tout $j_1 \neq j_2$, et pour tout faisceau (géométrique) $\mathcal{L}$, lisse sur sur $X_p \otimes \overline{\mathbf{F}_p}$, de rang 1, les faisceaux $\mathcal{K}\ell(f_{j_1}) \otimes \mathcal{L}$ et $\mathcal{K}\ell(f_{j_2})$ ne sont pas isomorphes. Comme $p > 2$, les morphismes f_1, f_2, f_3 et f_4 sont modérément ramifiés au–dessus de ∞. Le tableau suivant donne les caractéristiques de la monodromie locale de chaque faisceau $\mathcal{K}\ell(f_j)$ aux points 0, m_1, m_2 et ∞:

	0	m_1	m_2	∞
$\mathcal{K}\ell(f_1)$	triviale	sauvage	triviale	modérée
$\mathcal{K}\ell(f_2)$	sauvage	sauvage	triviale	modérée
$\mathcal{K}\ell(f_3)$	triviale	triviale	sauvage	modérée
$\mathcal{K}\ell(f_4)$	sauvage	triviale	sauvage	modérée

De plus, quand la monodromie locale est sauvage, elle est la somme directe de deux caractères différents du groupe d'inertie de conducteur de Swan égal à 1 [Ka2, 1.14]. En particulier, une représentation "sauvage" du type ci–dessus ne peut devenir "triviale" après torsion par un caractère ; on en déduit donc que, pour tout $j_1 \neq j_2$ et pour tout faisceau (géométrique) $\mathcal{L}$, lisse sur $X_p \otimes \overline{\mathbf{F}_p}$, de rang 1, les faisceaux $\mathcal{K}\ell(f_{j_1}) \otimes \mathcal{L}$ et $\mathcal{K}\ell(f_{j_2})$ ne sont pas (géométriquement) isomorphes.

Il reste à majorer $|\chi_c(X_p \otimes \overline{\mathbf{F}_p}, \mathcal{F}^i)|$. Par la formule de Grothendieck–Ogg–Schafarevich, on a

$$-\chi_c\Big(X_p \otimes \overline{\mathbf{F}_p}, \mathcal{F}^i\Big) = (|S|-2)\mathrm{rang}(\mathcal{F}^i) + \sum_{s\in S} \mathrm{swan}_s(\mathcal{F}^i)$$

où $S \subset \mathbf{P}^1(\overline{\mathbf{F}_p})$ est l'ensemble des points de ramification de $\mathcal{F}^i$. On a

$$\mathrm{swan}_s(\mathcal{F}^i) \leqslant (i+1)^4 \mathrm{swan}_s(\mathcal{F}).$$

Enfin, tous les sauts de $\mathcal{F}$ sont $\leqslant 1$, il en est de même de ceux de $\mathcal{F}^i$, et on a

$$\mathrm{swan}_\infty(\mathcal{F}) = 0 \text{ et } \mathrm{swan}_s(\mathcal{F}) \leqslant \mathrm{rang}(\mathcal{F}^i) = (i+1)^4,\ \ s \in \{0,\, m_1,\, m_2\}.$$

On a donc

$$|\chi_c(X_p \otimes \overline{\mathbf{F}_p}, \mathcal{F}^i)| \leqslant 5(i+1)^4.$$

Ceci termine la preuve du Lemme 7.1. □

7.3. *Preuve des Propositions* 6.1, 6.2 et 6.3. Nous détaillons davantage la preuve de la Proposition 6.1 Pour $n \in \mathcal{P}_3(X,u)$, on a d'après la multiplicativité croisée la relation

$$C(p_1;p_2p_3) = C(p_1p_2;p_3)C(p_1p_3;p_2) = \cos(\theta'_{p_3,p_1p_2})\cos(\theta'_{p_2,p_1p_3}).$$

Ainsi la Proposition 6.1 découlera du

Lemme 7.2. *Quand $X \longrightarrow \infty$, l'ensemble de couples d'angles*

$$\Big\{(\theta'_{p_3,p_1p_2}, \theta'_{p_2,p_1p_3})\,;\, n = p_1p_2p_3 \in \mathcal{P}_3(X,u)\Big\}$$

est équiréparti sur $[0,\pi]\times[0,\pi]$ relativement à la mesure $\mu_{\mathrm{ST}}\otimes\mu_{\mathrm{ST}}$ et l'ensemble d'angles

$$\Big\{\theta'_{p_1,p_2p_3}\,;\, n = p_1p_2p_3 \in \mathcal{P}_3(X,u)\Big\}$$

est équiréparti sur $[0,\pi]$, relativement à la mesure μ_{ST}.

Preuve (*du Lemme* 7.2). Pour prouver ce lemme, il suffit de démontrer, pour tous entiers positifs i_1, i_2 et i_3, tels que $i_1 + i_2 \geqslant 1$ et $i_3 \geqslant 1$, qu'on a, pour $X \longrightarrow \infty$, les relations

$$\sum_{n=p_1p_2p_3 \in \mathcal{P}_3(X,u)} \mathrm{sym}_{i_1}\Big(\theta'_{p_3,p_1p_2}\Big)\mathrm{sym}_{i_2}\Big(\theta'_{p_2,p_1p_3}\Big) = o\Big(\frac{X}{\log X}\Big) \tag{7.5}$$

et

$$\sum_{n=p_1p_2p_3 \in \mathcal{P}_3(X,u)} \mathrm{sym}_{i_3}\Big(\theta'_{p_1,p_2p_3}\Big) = o\Big(\frac{X}{\log X}\Big). \tag{7.6}$$

Pour démontrer (7.5), on décompose la somme en question en $O(\log^3 X)$ sous–sommes par un découpage dyadique sur les variables p_1, p_2 et p_3: on a donc $p_i \in [P_i, 2P_i[$, les bornes vérifiant

$$X^{\frac{1}{u}} < P_3 < P_2/2 < P_1/4, P_1^{\frac{1}{2}}Y < 2P_2,\ P_2Y < 2P_1,\ P_1P_2P_3 \leqslant 2X,$$

les variables p_1, p_2 et p_3 satisfaisant encore les contraintes de définition de $\mathcal{P}_3(X,u)$. L'ordre de grandeur des variables p_i est ainsi contrôlé. Ces contraintes sont de type multiplicatif ; on s'en affranchit par la transformée de Mellin, comme cela est expliqué lors de la preuve du Lemme 5.1, le prix à payer est l'apparition d'un facteur supplémentaire $O(\log^A X)$, pour un certain A absolu. Pour $i_1 \geqslant 1$ et $i_2 \geqslant 0$, on applique la Proposition 7.2 avec

$$k = 1,\ r = p_3,\ s = p_2,\ m = p_1,\ \xi_{m,s} = \mathrm{sym}_{i_2}\Big(\theta'_{p_2,p_1p_3}\Big),$$

et on effectue une sommation triviale sur p_3, pour avoir finalement

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n=p_1p_2p_3 \in \mathcal{P}_3(X,u) \\ p_i \sim P_i}} \mathrm{sym}_{i_1}\Big(\theta'_{p_3,p_1p_2}\Big)\mathrm{sym}_{i_2}\Big(\theta'_{p_2,p_1p_3}\Big) \\
&\quad \ll (i_1+1)(i_2+1)P_3\Big\{P_1P_2\Big(P_3^{-\frac{1}{8}} + (P_3P_2^{-2})^{\frac{1}{8}} + (P_2P_1^{-1})^{\frac{1}{2}}\Big)\Big\}(\log X)^A \\
&\quad \ll_{i_1,i_2} XY^{-\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

En sommant sur les divers P_1, P_2 et P_3, on a prouvé (7.5) pour $i_1 \geqslant 1$ et $i_2 \geqslant 0$.

Dans le cas où $i_1 = 0$ et $i_3 \geqslant 1$, on majore l'expression

$$\sum_{n=p_1p_2p_3 \in \mathcal{P}_3(X,u)} \mathrm{sym}_{i_2}\Big(\theta'_{p_2,p_1p_3}\Big) \ll XY^{-\frac{1}{10}}, \tag{7.7}$$

par la Proposition 7.1, avec, pour choix des variables,

$$p = p_2,\ m = p_1,\ n = p_3,$$

après un découpage de l'intervalle de variation de la variable p_1 en intervalles de longueur $\leqslant p_2$ (pour satisfaire la condition $M \leqslant p$) et une sommation triviale sur p_2. Signalons que la présence, dans l'énoncé de la Proposition 7.1, de la condition de sommation $n \in \mathcal{I}_m$ dispense de séparer les variables p_1 et p_3 et que l'inégalité (7.7) peut aussi se déduire du Lemme 5.1, puisque, dans ce cas, on a $p_1p_3 > p_2Y$ (cf. (6.5)).

La preuve de la relation (7.6) est identique à celle de (7.7): on utilise la Proposition 7.1, avec pour choix de variables $p = p_1$, $m = p_2$ et $n = p_3$. Ceci termine la preuve du Lemme 7.2, et ainsi de la Proposition 6.1. $\square$

La démonstration des deux autres propositions est identique. Indiquons simplement le choix des variables.

La première partie de la Proposition 6.2 se ramène à démontrer que, pour tout triplet $(i_2, i_3, i_4) \neq (0,0,0)$, on a

$$\sum_{p_1\sim P_1}\sum_{p_2\sim P_2}\sum_{p_3\sim P_3}\sum_{p_4\sim P_4} \mathrm{sym}_{i_2}(\theta'_{p_2,p_1p_3p_4}) \times \mathrm{sym}_{i_3}(\theta'_{p_3,p_1p_2p_4})\mathrm{sym}_{i_4}(\theta'_{p_4,p_1p_2p_3}) \ll XY^{-\frac{1}{10}}.$$

On discute suivant le nombre de $i_j \neq 0$.

• Si un seul des indices i est non nul, disons i_k, on applique la Proposition 7.1, avec $m = p_1$, $p = p_k$ et $n = p_2p_3p_4/p_k$.

• Si i_3 et i_4 sont tous non nuls, on applique la Proposition 7.2 avec

$$k = 2,\ r = p_3p_4,\ m = p_1, s = p_2,\ \xi_{m,s} = \mathrm{sym}_{i_2}(\theta'_{p_2,p_1p_3p_4}),$$

et une sommation triviale sur p_3 et p_4.

• Si $i_2 \neq 0$, $i_3 = 0$ et $i_4 \neq 0$, on applique la Proposition 7.2, avec

$$k = 1,\ r = p_4,\ s = p_2,\ m = p_1p_3,\ \xi_{m,s} = \mathrm{sym}_{i_2}(\theta'_{p_2,p_1p_3p_4}),$$

et une sommation triviale sur p_4.

• Le cas où $i_2 \neq 0$, $i_3 \neq 0$ et $i_4 = 0$ se traite comme précédemment en intervertissant les indices 3 et 4.

Cette discussion termine la preuve de la première partie de la Proposition 6.2. La deuxième partie se fait en prouvant pour tout $i_1 \neq 0$, la relation

$$\sum_{p_1\sim P_1}\sum_{p_2\sim P_2}\sum_{p_3\sim P_3}\sum_{p_4\sim P_4} \mathrm{sym}_{i_1}(\theta'_{p_1,p_2p_3p_4}) \ll XY^{-\frac{1}{10}},$$

qui se montre par la Proposition 7.1, en prenant pour variables $p = p_1$, $m = p_2p_3$ et $n = p_4$. Ceci termine la preuve de la Proposition 6.2. Pour la Proposition 6.3, disons simplement que le cas le plus typique, à savoir la majoration

$$\sum_{\substack{p_i\sim P_i\\ i=1,\cdots,5}} \mathrm{sym}_{i_2}(\theta'_{p_2,p_1p_3p_4p_5})\mathrm{sym}_{i_3}(\theta'_{p_3,p_1p_2p_4p_5}) \times \mathrm{sym}_{i_4}(\theta'_{p_4,p_1p_2p_3p_5})\mathrm{sym}_{i_5}(\theta'_{p_5,p_1p_2p_3p_4}) \ll XY^{-\frac{1}{10}},$$

pour i_3, i_4, i_5 tous non nuls se fait par la Proposition 7.2, avec

$$k = 3,\ r = p_3p_4p_5,\ s = p_2,\ m = p_1,\ \xi_{m,s} = \mathrm{sym}_{i_2}(\theta'_{p_2,p_1p_3p_4p_5}).$$

Les autres cas se traitent comme précédemment. Ceci termine la preuve des Propositions 6.2 et 6.3, et ainsi la preuve du Théorème 1.3. □

Mathématique, Bât. 425
Univ. Paris–Sud, Campus d'Orsay.
FR-91405 Orsay Cedex France
E-mail address: fouvry@math.u-psud.fr

Département de Mathématiques,
Univ. Montpellier II, Place E. Bataillon.
FR-34095 Montpellier Cedex France
E-mail address: michel@math.univ-montp2.fr

References

[DI] J.-M. Deshouillers and H. Iwaniec, Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms, *Invent. Math.* **70** (1982/83), 219–288.

[DHR1] H. Diamond, H. Halberstam, and H.-E. Richert, Combinatorial sieves of dimension exceeding one, *J. Number Theory* **28** (1988), 306–346.

[DHR2] ———A boundary value problem for a pair of differential delay equations related to sieve theory. I, in *Analytic Number Theory* (Allerton Park, IL, 1989), Progr. Math. **85**, 133–157, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Es] T. Estermann, On Kloosterman's sum, *Mathematika* **8** (1961), 83–86.

[FH] K. Ford and H. Halberstam, The Brun-Hooley sieve, *J. Number Theory* **81** (2000), 335–350.

[FIK] É. Fouvry and H. Iwaniec, The divisor function over arithmetic progressions, With an appendix by N. M. Katz, *Acta Arith.* **61** (1992), 271–287.

[FM] É. Fouvry and Ph. Michel, Sommes de modules de sommes d'exponentielles, *Pacific J. Math.* **209** (2003), 261–288; Errata, *Pacific J. Math.* **225** (2006), 199–200.

[Gr] G. Greaves, *Sieves in Number Theory*, *Ergeb. Math. Grenzgeb.* **43**, Springer-Verlag, New York, 2001.

[GR] F. Grupp and H.-E. Richert, *The functions of the linear sieve*, *J. Number Theory* **22** (1986), 208–239.

[HR] H. Halberstam, and H.-E. Richert, *Sieve Methods*, *London Math. Soc. Monographs* **4**, Academic Press, New York, 1974.

[Iw1] H. Iwaniec, *Introduction to the Spectral Theory of Automorphic Forms*, Biblioteca de la Revista Matemática Iberoamericana, Madrid, 1995.

[Iw2] ———, *Topics in Classical Automorphic Forms*, *Grad. Stud. in Math.* **17**, A. M. S., Providence, RI, 1997.

[IS] H. Iwaniec and P. Sarnak, The non-vanishing of central values of automorphic L-functions and Landau-Siegel zeros, *Israel J. Math.* **120** (2000), 155–177.

[Ka1] N. M. Katz, *Sommes exponentielles*, *Astérisque* **79**, Course taught at the Univ. of Paris, Fall 1979, Notes written by Gérard Laumon, Soc. Math. France, Paris, 1980.

[Ka2] N. M. Katz, *Gauss Sums, Kloosterman Sums, and Monodromy Groups*, *Ann. of Math. Stud.* **116**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1988.

[KM] E. Kowalski and Ph. Michel, A lower bound for the rank of $J_0(q)$, *Acta Arith.* **94** (2000), 303–343.

[Ku] N. V. Kuznecov, The Petersson conjecture for cusp forms of weight zero and the Linnik conjecture. Sums of Kloosterman sums, *Mat. Sb*. **111** (1980), 334–383.

[LP] R. Livné and S. J. Patterson, The first moment of cubic exponential sums, *Invent. Math.* **148** (2002), 79–116.

[LRS] W. Luo, Z. Rudnick, and P. Sarnak, On Selberg's eigenvalue conjecture, *Geom. Funct. Anal.* **5** (1995), 387–401.

[M1] Ph. Michel, Autour de la conjecture de Sato-Tate pour les sommes de Kloosterman. I, *Invent. Math.* **121** (1995), 61–78.

[M2] ———, Autour de la conjecture de Sato-Tate pour les sommes de Kloosterman. II, *Duke Math. J.* **92** (1998), 221–254.

[Sa] H. Salié, Über die Kloostermanschen Summen $S(u, v; q)$, *Math. Z.* **34** (1932), 91–109.

[Te] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, *Cours Spécialisés* **1**, Soc. Math. France, Paris, 1995.

(Received April 5, 2002)