Probabilités et Statistique pour SIC:
Exercices 2011

Exercice 1 Le nombre d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments est n^p.
a) Combien de mots de passe de 8 symboles peut-on créer avec 66 caractères?
b) Si, dans un pays, les voitures ont des plaques avec deux lettres (leur alphabet à 26 caractères) et en suite, trois chiffres, combien de plaques possibles y-a-t-il?

Exercice 2 Le nombre de permutations de n objets est $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$. Un professeur dispose de 32 livres sur un rayon de sa bibliothèque. 23 d'entre eux sont des livres de mathématiques et 9 de physique. Le professeur aimerait ranger ses livres de façon que tous les livres traitant du même sujet restent groupés. Combien y a-t-il de dispositions possibles?

Exercice 3 4 Américains, 3 Suisses et 5 Anglais doivent s'asseoir sur un même banc. Les gens de même nationalité doivent rester ensemble. Combien de dispositions peut-on imaginer?

Exercice 4 Le nombre de sous-ensembles de r objets choisis dans un ensemble à n éléments est $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$.

On veut former un comité comprenant 4 des 23 personnes d'un groupe. Combien y a-t-il de ces comités?

Exercice 5 Combien de mains de poker existe-t-il? Le jeu comprend 52 cartes, une main en contient 5.

Exercice 6 Théorème du binôme: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$. Expliquer, en employant le Théorème du binôme, pourquoi le nombre de sous-ensembles d'un ensemble avec n éléments est 2^n. Donner une autre preuve en utilisant l'exercice 1.

Exercice 7 Le nombre de répartitions possibles de n objets en k groupes de tailles respectives n_1, n_2, ..., n_k est $\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$. Il faut répartir 14 étudiants en deux groupes A et B de 7 personnes chacun. Le groupe A sera placé dans une salle et le groupe B dans une autre. Combien y a-t-il de répartitions possibles?

Exercice 8 Il y a C_{n+k-1}^n vecteurs distincts à composantes entières et non-négatives satisfaisant à la relation $x_1 + x_2 + \cdots x_k = n$.
a) Combien de façons y a-t-il de répartir n boules indiscernables dans k urnes discernables?
b) Si 10 tableaux noirs doivent être affectés à 4 écoles, de combien de manières peut-on les répartir? Qu'en est-il si chaque école doit recevoir au moins un tableau?

Exercice 9 a) Démontrer que $C_{n+m}^k = C_n^0 C_m^k + C_n^1 C_m^{k-1} + \cdots + C_n^k C_m^0$ lorsque $k \leq n$, $k \leq m$.
b) Utiliser (a) pour démontrer que $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^n \left(C_n^k\right)^2$.

Exercice 10 On considère une fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ de n variables. Combien de dérivées partielles d'ordre r y a-t-il si on sait qu'on peut échanger l'ordre des dérivées?

Exercice 11 Dans un groupe de 10 femmes et 8 hommes, on doit former un comité de 3 hommes et 3 femmes. Combien de comités différents peut-on former si:
a) 2 des hommes refusent d'être ensemble dans le comité?
b) 2 des femmes refusent d'être ensemble dans le comité?
c) 1 homme et 1 femme refusent d'être ensemble dans le comité?

Exercice 12 Un laboratoire de recherche en psychologie du rêve dispose de 4 chambres à deux lits. Trois paires de vrais jumeaux sont étudiées. On veut placer chaque paire dans une chambre et assigner à chacun un lit bien déterminé. De combien de manières peut-on organiser l'expérience?

Exercice 13 Démontrer que la construction du triangle de Pascal est correcte, c'est-à-dire que

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$$

Exercice 14 n personnes dont A et B se mettent au hasard dans une rangée. Combien des manières y-a-t-il d'avoir k personnes entre A et B?

Exercice 15 Un dé est jeté jusqu'a ce qu'un 6 sorte, ce qui marque la fin de l'expérience. Quel est l'ensemble fondamental pour cette expérience? Notons par E_n l'événement "l'expérience s'arrête au n^{eme} jet". Quels points de l'ensemble fondamental sont contenus dans E_n? Décrire $(\cup_1^\infty E_n)^c$.

Exercice 16 On jette deux dés. On note par E l'evénement "la somme des dés est impaire", par F l'evénement "au moins l'un des dés montre 1", et par G "la somme des dés est 5". Décrire $E \cap F$, $E \cup F$, $F \cap G$, $E \cap F^c$ et $E \cap F \cap G$.

Exercice 17 Trois joueurs, A, B et C, jettent une pièce à tour de rôle: A joue d'abord, puis B, puis C, puis A etc. Le premier qui obtient pile a gagné. L'ensemble fondamental Ω de cette expérience peut être décrit comme suit:

$$S = \begin{cases} 1, 01, 001, 0001, \ldots, \\ 0000 \cdots \end{cases}$$

a) Donner une interprétation des points de S.

b) Décrire les événements suivants en termes de ces points:
premier événement: A="A gagne";
deuxième événement: B ="B gagne";
troisième événement: $(A \cup B)^c$.

Exercice 18 n personnes, dont A et B, se mettent au hasard dans une rangée.
a) Décrire l'ensemble fondamental associé à cette expérience, et en donner le nombre d'éléments.
b) Quelle est la probabilité qu'il y ait k personnes entre A et B $(0 \leq k \leq n-2)$?
c) Vérifier votre résultat pour $n = 3$ en explicitant tous les cas possibles.

Exercice 19 Quelle est la probabilité de tirer au moins un 6 lorsqu'on jette un dé quatre fois?

Exercice 20 On répète n fois le lancer de deux dés. Calculer la probabilité que le six apparaisse au moins une fois. Quelle valeur donner à n pour que cette probabilité atteigne 1/2?

Exercice 21 Combien de personnes faut-il pour que la probabilité qu'au moins deux d'entre elles aient leur anniversaire le même mois soit au moins 1/2? Admettre que tous les mois sont équiprobables.

Exercice 22 Un récepteur se bloque si la durée entre les instants de réception de deux signaux est inférieure au temp mort θ. On sait que les deux signaux atteignent le récepteur dans l'intervalle de temps $(0, t)$, et arrivent indépendamment l'un de l'autre et au "hasard".
a) Décrire l'ensemble fondamental Ω associé à cette experience stochastique.
b) Quelle est la probabilité que le récepteur se bloque?
c) Simplifier votre résultat en admettant que $\theta \ll t$.

Exercice 23 Désignons par f_n le nombre de manières de jeter une pièce n fois sans que deux piles successifs n'apparaissent. Montrer que

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \qquad n \geq 2$$

où $f_0 = 1, f_1 = 2$. Si P_n désigne la probabilité que des piles successifs n'apparaissent jamais lors de n jets, trouver P_n (en fonction de f_n) lorsqu'on admet que toutes les séquences de n jets sont équiprobables.

a) Calculer P_{10}.

b) Montrer que $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$.

c) Soit Q_n la probabilité que la suite $PFPPPFFP$ n'apparaisse jamais lors de n jets. Montrer que $\lim_{n\to\infty} Q_n = 0$.
Indication: La probabilité Q_n que la suite $PFPPPFFP$ n'apparaisse jamais lors de n jets est plus petite que la probabilité R_n que la même suite n'apparaisse jamais entre le jet numéro $8i$ et le jet numéro $8(i+1) - 1$ où i est un entier plus petit ou égal à $n/8 - 8$.

Exercice 24 On jette un dé trois fois.

a) Décrire l'ensemble fondamental de cette expérience.

b) Quelle est la probabilité que la somme des dés soit supérieure ou égale à 15?

Exercice 25 Supposons que l'on jette deux pièces et que chacun des quatre points de l'ensemble fondamental $\Omega = \{(P,P),(P,F),\ (F,P),(F,F)\}$ soit de même probabilité 1/4. Quelle est la probabilité que l'une des deux pièces tombe sur pile (P)?

Exercice 26 En 1654 de Méré propose à Pascal le problème suivant: Est-il plus probable d'obtenir au moins un 6 avec 4 dés que d'obtenir au moins un double 6 lors de 24 jets de deux dés?
Donner la réponse à cette question.

Exercice 27 On compte la somme des valeurs de trois dés jetés simultanément. Il y a six configurations différentes qui permettent d'obtenir 9 ou 10:
pour 9: (6,2,1), (5,3,1), (5,2,2), (4,4,1), (4,3,2) et (3,3,3),
pour 10: (6,3,1), (6,2,2), (5,4,1), (5,3,2), (4,4,2) et (4,3,3).
Soit S la somme obtenue, peut-on en conclure que

$$P(S = 9) = P(S = 10)?$$

Exercice 28 D'une urne contenant 20 boules numérotées de 1 à 20, on tire sans remplacement 3 des boules. Quelqu'un parie qu'au moins une des boules tirées portera un numéro égal ou supérieur à 17. Quelle est la probabilité qu'il gagne?

Exercice 29 Une urne contient 25 boules, 15 sont rouges et 10 sont vertes. Cinq boules sont tirées au hasard, sans remise.

a) Trouver la probabilité que la première, la troisième et la cinquième boule soient rouges et que la deuxième et la quatrième soient vertes.

b) Trouver la probabilité que la première, la deuxième et la troisième boule soient rouges et que la quatrième et la cinquième soient vertes.

c) Trouver la probabilité que la deuxième et la troisième boule soient rouges et que la première, la quatrième et la cinquième soient vertes.

Exercice 30 Une urne contient quatre boules blanches et deux boules noires. On effectue un tirage sans remise de deux boules. Admettons qu'on peut tirer avec les mêmes chances chacune des boules qui sont dans l'urne.

Définissons les événements suivants B_1 = "la première boule est blanche" et B_2 = "la seconde boule est blanche".

a) Décrire l'ensemble fondamental Ω de cette expérience stochastique.

b) Calculer les probabilités $P(B_1)$, $P(B_2|B_1)$, $P(B_2|B_1^c)$ et $P(B_2)$.

c) Vérifier que $P(B_1 \cap B_2) + P(B_1^c \cap B_2) + P(B_1 \cap B_2^c) + P(B_1^c \cap B_2^c) = 1$

Exercice 31 Les Anglais et les Américains orthographient le mot *rigueur*, respectivement, rigour et rigor. Un homme ayant pris une chambre dans un hôtel parisien a écrit ce mot sur un bout de papier. Une lettre est prise au hasard dans ce mot, c'est une voyelle. Or 40% des anglophones de l'hôtel sont des Anglais et les 60% restants sont Américains. Quelle est la probabilité que l'auteur du mot soit anglais?

Exercice 32 Ruine du joueur. On entre dans un casino avec k CHF, et chaque fois qu'une roulette est tourné on parie sur l'événement R que le résultat soit rouge. La roulette est équilibré, et $P(R) = p < 1/2$. Si on perd tout l'argent (k CHF) on doit quitter le jeu, et si on réussit à avoir $K > k$ CHF, alors on choisit de s'arrêter immédiatement.

a) Quelle est la probabilité $p_{K,k}$ qu'on quitte le jeu sans argent?
Indication: Appliquer la formule des probabilités totales à $p_{K,k}$ en conditionnant par rapport à l'événement R.

b) Montrer que $p_{K,k} \to 1$ quand $K \to \infty$.

c) Trouver $p_{K,k}$ quand $p = 1/2$.

d) Montrer que, avec probabilité égale à 1, on quitte le casino.

Exercice 33 On considère 3 cartes à jouer de même forme. Cependant, les deux faces de la première carte ont été colorées en noir, les deux faces de la deuxième carte en rouge tandis que la troisième porte une face noire et l'autre rouge. On mélange les trois cartes au fond d'un chapeau, puis une carte tirée au hasard en est extraite et placée au sol. Si la face apparente est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire?

Exercice 34 Pour dépister une maladie, on applique un test. Si le patient est effectivement atteint, le test donne un résultat positif dans 99% des cas. Mais il se peut aussi que le résultat du test soit positif alors que le consultant est en bonne santé, et ceci se produit dans 2% des cas. Sachant qu'en moyenne un consultant sur 1000 est atteint de la maladie à dépister, calculer la probabilité pour qu'un client soit atteint sachant que son test a été positif. Comment améliorer ce resultat?

Exercice 35 Les Trois Prisonniers Trois prisonniers croupissent dans une prison, quelque part dans un pays lointain. Deux d'entre eux ont été condamnés à mort et passeront par les armes le lendemain matin, à l'aube comme le veut l'usage. Les prisonniers ne savent même pas lesquels d'entre eux seront fusillés. Par contre le geôlier qui leur a appris la nouvelle connaît les deux victimes, mais il décide de ne rien leur dire. Cependant, un des prisonniers (que nous appellerons A) s'adresse au gardien:

- Écoute, geôlier, je sais que tu ne veux donner aucun renseignement, mais peut-être pourras-tu répondre à une seule de mes questions?
- Pas d'argent, pas de réponse, dit le gardien.
- Attend un peu, insiste le prisonnier, il s'agit d'une question telle que ta réponse ne peut me donner aucune information ... Tu nous a déjà dit que deux d'entre nous allaient mourir. Parmi mes deux collègues, au moins un va donc être fusillé demain.
- Beau raisonnement ...
- Au moins un, mais peut-être deux. Ce que tu ne veux pas me dire, c'est si c'est un seul ou les deux, car cela me renseignerait immédiatement sur mon sort.
- Juste, je ne te le dirai pas !
- Par contre si tu me dis le nom d'un parmi eux qui va mourir, je n'ai aucune information, car je ne saurais toujours pas si c'est celui-là tout seul qui va mourir, ou si tous les deux vont être fusillés.

Le gardien réfléchit un instant et dit :

- Oui, en effet, ça ne changerait rien pour toi.
- Alors, dis-moi le nom !
- D'accord. Je t'annonce que B va mourir.
- Merci ! Avant ton renseignement, j'avais deux chances sur trois de mourir. Mais maintenant tout se passe entre C et moi puisque le sort de B est réglé. J'ai donc une chance sur deux d'être fusille !

Pouvez vous résoudre ce paradoxe?
Indication: On peut supposer que si B et C vont mourir, alors le geôlier choisit de dire le nom de B avec probabilité $1/2$, et le nom de C avec probabilité $1/2$.

Exercice 36 Pendant un concours à la télévision, le présentateur cache un prix derrière une porte (il y a 3 portes: A, B et C). Il invite un concurrent à se présenter et à choisir l'une des trois portes, sans l'ouvrir. A ce moment-là, le présentateur ouvre l'une des portes qui n'a pas été choisie par le concurrent, en sachant que la voiture ne se trouve pas derrière. Ensuite, le présentateur offre au concurrent la possibilité de changer la porte qu'il a choisie par l'autre que reste fermée. Quelle est le meilleur choix pour le concurrent? C'est à dire, est-ce que la probabilité de gagner en changeant de porte est plus grande que la probabilité de gagner sans changer de porte?

Exercice 37 Les jours peuvent être ensoleillés ou nuageux. Le temps du lendemain est le même que celui d'aujourd'hui avec probabilité p, et différent avec probabilité q, où $p+q=1$. S'il est ensoleillé aujourd'hui, montrez que la probabilité s_n qu'il soit ensoleillé le n^{eme} jour suivant satisfait

$$s_n = (p-q)s_{n-1} + q; \qquad n \geq 1$$

où $s_0 = 1$. En déduire que

$$s_n = \frac{1}{2}(1 + (p-q)^n); \qquad n \geq 0$$

Exercice 38 Une unité de production comprend deux machines automatiques fonctionnant indépendamment l'une de l'autre. Chaque machine a la fiabilité p au cours d'une journée, ce qui signifie que sa probabilité de tomber en panne pendant cette période est égale à $1-p$. Dans ce cas, elle sera réparée pendant la nuit et se retrouvera en état de marche le lendemain. Une seule machine peut être réparée à la fois.
On note X_n = nombre de machines en panne au début de la $n^{\text{ième}}$ journée, $n = 1, 2, \ldots$. Calculer les probabilités conditionnelles $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0)$, $P(X_{n+1} = 1|X_n = 0)$, $P(X_{n+1} = 0|X_n = 1)$ et $P(X_{n+1} = 0|X_n = 0)$.

Exercice 39 Les pièces fabriquées par une usine sont soumises à un contrôle, mais le mécanisme de contrôle n'est pas entièrement fiable. En effet, si une pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 0.9, par contre si elle est défectueuse, elle est refusée avec une probabilité de 0.8.

1. Si un lot comprend trois pièces bonnes et une pièce défectueuse, quelle est la probabilité que ces quatre pièces soient acceptées lors du contrôle?

2. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur lors du contrôle d'une pièce si l'on sait qu'il y a en moyenne 20% de pièces défectueuses dans la production?

3. Quelle est la probabilité qu'une pièce acceptée par le contrôle soit défectueuse (si l'on admet de nouveau qu'il y a en moyenne 20% de pièces défectueuses dans la production)?

Exercice 40 On considère 3 cartes à jouer de même forme. Cependant, les deux faces de la première carte ont été colorées en noir, les deux faces de la deuxième carte en rouge tandis que la troisième porte une face noire et l'autre rouge. On mélange les trois cartes au fond d'un chapeau, puis une carte tirée au hasard en est extraite et placée au sol. Si la face apparente est rouge, quelle est la probabilité que l'autre soit noire?

Exercice 41 Un couple a deux enfants. Quelle est la probabilité que les deux soient des filles sachant que l'aînée en est une?

Exercice 42 On jette deux dés équilibrés. Quelle est la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux montre 6, sachant que les deux résultats sont différents?

Exercice 43 On choisit trois cartes au hasard et sans remise dans un jeu ordinaire de 52 cartes. Calculer la probabilité que la première carte tirée soit un pique, sachant que les deux dernières en sont.

Exercice 44 On admet que 5% des hommes et $0,25\%$ des femmes sont daltoniens. On sélectionne une personne daltonienne au hasard. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un homme? On admettra que les hommes sont aussi nombreux que les femmes. Si au contraire il y en avait deux fois plus que de femmes, que deviendrait le résultat?

Exercice 45 La couleur des yeux d'une personne est déterminée par une unique paire de gènes. Si les deux sont des gènes yeux bleus, la personne aura les yeux bleus; si les deux sont des gènes yeux marrons, la personne aura les yeux marrons; si l'un est un gène oeil bleu et l'autre un gène oeil marron, la personne aura les yeux marrons (car le gène oeil marron est dominant par rapport au gène oeil bleu). Un nouveau-né reçoit indépendamment un gène oeil de chacun de ses parents et le gène qu'il reçoit d'un de ses parents a autant de chances d'être l'un des deux gènes oeil de ce parent. Supposons que Xavier et ses deux parents ont les yeux marrons, mais que la soeur de Xavier a les yeux bleus.

a) Quelle est la probabilité que Xavier ait un gène oeil bleu?

b) Si la femme de Xavier a les yeux bleus, quelle est la probabilité que leur premier enfant ait les yeux bleus?

c) Si la femme de Xavier a les yeux bleus, et leur premier enfant a les yeux marrons, quelle est la probabilité que leur prochain enfant ait aussi les yeux marrons?

Exercice 46 Cinq ouvriers travaillent successivement sur une chaîne de montage, au même poste, pendant 24h. La table ci-dessous indique le nombre des heures qu'effectue chaque ouvrier, le nombre de pièces que chacun fabrique par heure et le pourcentage de pièces défectueuses que chacun fabrique.

Ouvrier	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
Heures	6	5	5	4	4
Pièces/heure	110	100	130	140	150
% pièces defect.	8	7	6	4	4

Au bout des 24 heures, les productions des ouvriers sont mélangées pour constituer la production totale journalière. On suppose qu'en tirant au hasard une pièce dans cette production totale, on obtienne une pièce sans défaut, quelle est alors la probabilité pour qu'elle ait été fabriquée par chacun des ouvriers?

Exercice 47 Un dé A a quatre faces rouges et deux faces blanches, alors qu'un dé B a quatre faces blanches et deux faces rouges. On choisit un des deux dés au hasard avec probabilité $1/2$. On utilise ensuite le dé choisi.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une face rouge lors d'un jet.

b) Si les deux premiers jets donnent rouge, quelle est la probabilité que le troisième donne aussi rouge.

c) Si les n premiers jets donnent rouge, quelle est la probabilité que le dé A soit utilisé? Donner cette probabilité dans la limite $n \to \infty$.

Exercice 48 **a)** On tire au hasard n boules sans remise d'une urne en contenant N de couleur blanche et M de couleur noire. Donner la distribution de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de boules blanches tirées. Démontrer que l'espérance de X est $\frac{Nn}{M+N}$.
Indication: écrire le nombre de boules blanches tirées comme la somme de X_i, $1 \leq i \leq N$, où X_i est égal à 1 si la i-ème boule blanche a été tirée parmi les n boules, et 0 sinon.

b) Une urne contient N boules blanches et M noires. On prélève ces boules une à une jusqu'à ce que la première boule blanche apparaisse. Si on désigne par X le nombre de boules alors prélevées, quelle est l'espérance de X?

Exercice 49 On jette simultanément deux dés à six faces jusqu'à l'obtention d'une somme de 5 ou de 7.

a) Quelle est la probabilité de finir de jouer avec une somme de 5?

b) Quel est le nombre moyens de jets jusqu'à l'arrêt du jeu?

Exercice 50 Variable aléatoire binomiale de paramètres (n, p). On jette n pièces. Supposons que lors de chaque jet, la probabilité d'obtenir pile est p, où $p \in [0, 1]$. Les résultats sont supposés indépendants.

a) Donner la loi de probabilité de la variable X qui compte le nombre de piles obtenus.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 51 La probabilité p_n que n clients visitent un supermarché pendant un jour est $p^n(1-p)$, $n = 0, 1, \ldots$. La probabilité qu'un client qui visite le supermarché achète un certain type de produit est $2/3$. La probabilité que cet produit soit défectueux est $1/4$.

a) Quelle est la probabilité qu'un client achète un produit non-défectueux?

b) Si on sait que k produits non-défectueux ont été vendus, montrer que la probabilité conditionnelle que n clients aient visité le supermarché est donnée par

$$C_n^k p^{n-k}(2-p)^{k+1}/2^{n+1}$$

Exercice 52 Variable aléatoire de Poisson. La distribution de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par $P(X = i) = c\lambda^i/i!$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, où λ est un réel positif. Trouver c et,

a) $P(X = 0)$.

b) $P(X > 2)$.

c) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 53 On jette n pièces identiques. Supposons que lors de chaque jet, la probabilité d'obtenir pile est p, où $p \in [0, 1]$. Les résultats sont supposés indépendants.

a) Donner la distribution de probabilité de la variable X qui compte le nombre de piles obtenus.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 54 On considère une variable aléatoire binomiale de paramètres (n, p). Soit k fixé compris entre 1 et n. Pour quelle valeur de p la probabilité $P(X = k)$ est-elle maximale? Ce résultat est utilisé en statistique pour estimer p lorsqu'on a observé que $X = k$. Le paramètre n étant connu, cette valeur de p qui rend maximale $P(X = k)$ est appelée estimation de p par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 55 On sait que la transformée de Laplace d'une variable aléatoire X est $L_X(s) = \left(\frac{e^s+2}{3}\right)^5$. Calculer la probabilité que $X = 1$.
Indication: Montrer que X suit une loi binomiale.

Exercice 56 Calculer les deux premiers moments d'une variable aléatoire X distribuée géométriquement (paramètre p) en utilisant sa transformée de Laplace.

Exercice 57 Soient X et Z deux variables à valeurs entières ≥ 0. On suppose que:

a) Z est une variable de Poisson de paramètre λ.

b) $X \leq Z$ et:

$$\forall n \geq 0 \quad , \quad \forall k \leq n \quad , \quad P\{X = k | Z = n\} = C_n^k p^k (1-p)^{(n-k)}$$

(autrement dit: la loi conditionnelle de X sachant que $Z = n$ est binomiale de paramètres n et p, pour un $0 < p < 1$ fixé).

Prouver que X et $Y = Z - X$ sont deux variables de Poisson indépendantes, et donner leurs paramètres respectifs.

Exercice 58 Variable aléatoire gaussienne ou normale. On dit que la variable aléatoire réelle X est gaussienne de loi $N(m, \sigma^2)$, si et seulement si elle admet la densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}$$

a) On admet que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$. Vérifier que $f_X(x)$ est bien une densité de probabilité.

b) Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 59 Variable aléatoire exponentielle. On dit que la variable aléatoire X est exponentielle de paramètre λ si et seulement si elle admet la densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & si \quad x \geq 0 \\ 0 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

a) Vérifier que $f_X(x)$ est bien une densité, et calculer l'espérance et la variance de X.

b) Montrer que pour $x, y \geq 0$ on a que $P(X \geq x + y | X \geq y) = P(X \geq x)$.

Exercice 60 Variable aléatoire uniforme sur $[a, b]$. On dit que la variable aléatoire réelle X est uniformément distribuée sur l'intervalle fini $[a, b]$ si et seulement si elle admet la densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Calculer l'espérance, la variance et la fonction caractéristique (c'est à dire $E(e^{iuX})$) de X.

Exercice 61 On suppose que la taille, en centimètres, d'un homme âgé de 25 ans est une variable aléatoire normale de paramètres $m = 175$ et $\sigma^2 = 36$. Quelle est la pourcentage d'hommes de 25 ans ayant une taille supérieure à 185 cm? Parmi les hommes mesurant plus de 180 cm, quel pourcentage d'entre eux dépassent 192 cm?

Exercice 62 Le nombre de kilomètres couvert par une batterie de voiture avant défaillance est distribuée exponentiellement et sa valeur moyenne est de 10000 kilomètres. Une personne souhaite se lancer dans un voyage de 5000 kilomètres. Avec quelle probabilité terminera-t-elle son voyage sans avarie de batterie?

Exercice 63 Pour fonctionner, un système utilise une cellule interchangeable. On dispose de la pièce originale et d'une cellule de rechange. Si le système a une durée de vie aléatoire X et si sa densité est donnée (en mois) par:

$$f(x) = \begin{cases} cxe^{-x/2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

quelle est la probabilité que le système fonctionne pendant au moins 5 mois?

Exercice 64 La vitesse d'une molécule au sein d'un gaz homogène en état d'équilibre est une variable aléatoire, dont la fonction de densité est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} ax^2e^{-bx^2} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

où $b = m/2kT$ et k, T, m sont respectivement la constante de Boltzmann, la température absolue et la masse de la molécule. Évaluer a en termes de b.

Exercice 65 Les pièces d'une voiture sont souvent copiées, et vendues comme des pièces originales. On veut remplacer certains pièces d'une voiture. Avec probabilité $1/4$ on achète une pièce pirate, et avec probabilité $3/4$ on achète une pièce originale. La durée de vie est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 5 pour une pièce pirate, et de paramètre 2 pour une pièce originale. Appelons T la durée de vie de la pièce que l'on achète. Supposons que la pièce ait survécu jusqu'au temps t après son installation. Quelle est la probabilité $\pi(t)$ que cette pièce soit pirate? Trouver la limite de $\pi(t)$ lorsque $t \to \infty$.

Exercice 66 Dans un salon de coiffure travaillent 6 coiffeurs. Un client entre et constate que tous les coiffeurs sont occupés et que trois personnes attendent. Une coupe dure 30 minutes. Les coupes sont indépendantes les unes des autres et elles ont débuté depuis un temps uniformément réparti entre 0 et 30 minutes.

a) Soit A_1 un des coiffeurs. Calculer la probabilité que, t minutes après que le client soit entré, le coiffeur A_1 soit encore occupé avec le même client.

b) Calculer la fonction de répartition du temps d'attente du client.

c) Calculer l'espérance du temps d'attente du client.

Exercice 67 Soit un processus de Poisson de paramètre λ : $\{X(t) : t \geq 0\}$. (Cela signifie que $X(t)$ suit une distribution de Poisson de paramètre λt, et que le processus est à accroissements indépendants.)

a) Sans utiliser la propriété principale des processus de Poisson, calculer la densité de probabilité du temps d'occurence T du premier des événements aléatoires considérés.
Indication: Calculer d'abord $P(T > t)$.

b) De même, si l'on sait qu'un seul événement s'est produit dans un intervalle de temps donné: $[0, t_1]$. (Noter bien que l'on a maintenant $0 < T < t_1$).

Exercice 68 Soit $(N_t)_{t \geq 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ, S_n la variable de temps d'occurence du n-ième événement compté. On définit les variables:

$A_t = t - S_{N_t}$ (temps écoulé depuis l'occurence du dernier événement),

$B_t = S_{N_t+1} - t$ (temps à venir jusqu'à l'occurence du prochain événement).

Montrer que les variables A_t et B_t sont indépendantes, que B_t suit une loi exponentielle de paramètre λ et que A_t a même loi que la variable $\min(S_1, t)$.

Exercice 69 Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires exponentielles indépendantes de paramètre commun λ. Déterminer la distribution de $\min(X_1, \ldots, X_n)$.

Exercice 70 Si X est une variable aléatoire exponentielle de paramètre $\lambda = 1$, calculer la densité de la variable aléatoire Y définie par $Y = \ln X$.

Exercice 71 Soient X et Y deux variables aléatoires normales centrées réduites (c'est-à-dire, des variables aléatoires normales avec une variance égale à 1, et une espérance égale à 0). Supposons qu'elles sont indépendantes (c'est-à-dire que $P(\{X \in A\} \cap \{Y \in B\}) = P(\{X \in A\})P(\{Y \in B\})$, où A et B sont des ensembles ouverts de nombres réels). Trouver la fonction de répartition et la densité de probabilité de la variable aléatoire $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$.
Indication: employer des coordonnées polaires dans le plan.

Exercice 72 Soit X une variable aléatoire normale d'espérance nulle et de variance 1. Calculer la densité de la loi de $Y = e^X$.

Exercice 73 Soient X et Y deux variables aléatoires avec une densité conjointe $f(x, y)$. Calculer la loi de X et de Y dans les cas suivantes.

a) $f(x, y) = xe^{-x(1+y)}$ pour $x, y \geq 0$, et $f(x, y) = 0$ sinon.

b) $f(x, y) = 60xy^2$ pour $x, y \geq 0$ et $x + y \leq 1$, et $f(x, y) = 0$ sinon.

Est-ce que les variables X et Y sont indépendantes?

Exercice 74 **a)** Si X et Y sont deux variables poissonniennes indépendantes de paramètres respectifs λ_1 et λ_2, quelle est la distribution de leur somme?

b) Si X et Y sont deux variables normales indépendantes de paramètres respectifs (μ_1, σ_1^2) et (μ_2, σ_2^2), quelle est la distribution de leur somme?
Indication: Calculer la fonction caractéristique de la somme $X + Y$.

Exercice 75 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans un espace Ω. On définit la covariance de X et Y par $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$. On peut montrer que si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors $Cov(X, Y) = 0$. Cependant, en général $Cov(X, Y) = 0$ n'implique pas que X et Y soient indépendantes. Montrer que dans le cas particulier où X et Y sont de variables aléatoires à deux valeurs et si $Cov(X, Y) = 0$, alors X et Y sont indépendantes.

Exercice 76 Donner une expression pour la fonction de répartition et pour la densité du maximum Z puis du minimum $\tilde{Z}$ de deux variables aléatoires continues indépendantes X et Y .

Exercice 77 Donner la distribution de $Z = X + Y$ si:

a) X et Y sont des variables de Poisson indépendantes de paramètres λ_1 et λ_2.

b) X et Y sont des variables gaussiennes indépendantes de paramètres $(\mu_1, {\sigma_1}^2)$ et $(\mu_2, {\sigma_2}^2)$.

c) X et Y sont des variables exponentielles indépendantes de paramètres λ_1 et λ_2 .

Exercice 78 Retrouver les résultats de l'exercice précédent en calculant dans chaque cas la transformée de Laplace de Z. Que peut-on dire de la somme de deux variables Γ indépendantes de paramètres (α_1, β_1) et (α_2, β_2)?

Exercice 79 D'un vecteur aléatoire $(X,\, Y)$ on donne la densité de probabilité jointe :

$$h(x,\, y) = \begin{cases} 1/\pi & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

a) Peut-on dire, sans effectuer de calcul, si les variables aléatoires X et Y sont
- indépendantes,
- de corrélation positive,
- de corrélation négative?

b) Calculer les densités marginales f et g de X et de Y. Confirmer la réponse précédente à propos de l'indépendance.

c) Trouver $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et confirmer la réponse précédente à propos du signe de la corrélation.

d) Calculer la probabilité $P(X < 0|X < Y)$.

Exercice 80 Soit X une variable aléatoire distribuée uniformément dans l'intervalle $]0; 1[$, i.e. : X prend ses valeurs dans $]0; 1[$ et $P\{\alpha < X < \beta\} = \beta - \alpha$, si $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$.

a) On pose $Y = \ln X$. Calculer l'espérance de Y et la variance de Y.

b) Si $X_1, ..., X_{100}$ sont 100 variables indépendantes de même loi que X et si $Z = X_1 X_2 ... X_{100}$, donner une approximation de $P\{Z < 10^{-40}\}$.

Exercice 81 Soit X une variable normale centrée réduite et $Y = e^X$(on dit que Y est une variable lognormale).

a) Calculer la moyenne et la variance de Y.

b) Quelle est la densité de Y?

Exercice 82 Un représentant se présente dans les 1000 appartements d'une cité. La probabilité que ce représentant place un contrat dans un appartement quelconque est estimée à 0,04. Ces événements étant supposés indépendants, quelle est la probabilité pour qu'il place plus de 30 contrats?

Exercice 83 Un livre de 350 pages contient 450 erreurs d'impression réparties au hasard. Calculer de deux façons différentes la probabilité pour qu'il y ait au moins trois erreurs dans une page déterminée.

Exercice 84 On tire sans remise 5 boules dans une urne contenant 600 boules blanches et 400 noires. Donner la valeur exacte de la probabilité que 3 des 5 boules tirées soient noires. Donner une valeur approchée en utilisant l'approximation binomiale.

Exercice 85 Un professeur sait par expérience que la note de test d'un étudiant se présentant à un examen final est une variable aléatoire d'espérance 75.

a) Donner une borne supérieure à la probabilité que la note de test d'un étudiant dépasse 85.

Supposons maintenant que le professeur sache en plus que la variance de la note de test d'un étudiant est 25.

b) Que peut-on dire de la probabilité qu'un étudiant obtienne une note comprise entre 65 et 85?

c) Combien faudrait-il qu'il se présente d'étudiants à cet examen pour assurer, avec une probabilité d'au moins 0,9, que la moyenne de la classe soit de 75 plus ou moins 5? Ne pas utiliser le théorème central limite.

d) Utiliser le théorème central limite pour résoudre la partie **c)**.

Exercice 86 On arrondit 50 nombres à l'entier le plus proche et on effectue la somme. Si les erreurs d'arrondi individuelles sont distribuées uniformément sur $(-0,5,\ 0,5)$, quelle est la probabilité que la somme obtenue ait un écart de plus de 3 par rapport à la somme exacte?

Exercice 87 On a 100 ampoules dont les durées de vie sont des variables aléatoires indépendantes exponentielles de moyenne 5 heures. Si l'on allume une ampoule à la fois et que chaque ampoule grillée est instantanément remplacée par une neuve, qu'elle est la probabilité qu'il reste encore au moins une ampoule intacte après 525 heures?

Exercice 88 Quelle est la probabilité qu'un dé honnête jeté 120 fois produise moins de 16 fois le nombre six?

Exercice 89 Loi faible des grands nombres pour le processus de Poisson.
Montrer que si $(N_t)_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ alors:

$$P\{|\frac{N_t}{t} - \lambda| > \epsilon\} \longrightarrow_{t \to \infty} 0.$$

Exercice 90 Variable aléatoire de Poisson de paramètre λ. La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par $P(X = i) = c\lambda^i/i!$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, où λ est un réel positif. Soit Y_n une loi de Binomial de paramètres (n, p_n). Supposons que pour λ fixé on a $np_n = \lambda$. Démontrer que $\lim_{n\to\infty} P(Y_n = k) = P(X = k)$ et trouver la valeur de c.

Exercice 91 a) Enoncer le théorème central limite. Indiquer avec précision les hypothèses nécessaires.

b) Une pièce est lancée 500 fois. Quelle est la probabilité pour que le nombre de faces diffère de 250 d'au plus 10? (utiliser la table).

Exercice 92 Dans une usine de menuiserie, 25 armoires d'un certain type sont produites chaque jour, et la probabilité pour qu'une telle armoire soit sans défaut à la sortie de la chaîne de production est de 95%.
Donner une bonne approximation de la probabilité pour qu'au moins 600 armoires sans défaut aient été produites à l'issue de 25 journées de travail.

Exercice 93 On effectue 25 mesures d'une constante physique m dans un laboratoire, en supposant que ces mesures suivent une loi normale $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$ de variance σ^2 connue. A l'issue de ces 25 mesures, l'intervalle de confiance à 90% obtenu pour m est: $[6, 04; 6, 18]$. Combien de mesures supplémentaires doit-on effectuer si l'on veut:

a) diminuer de moitié la longueur de l'intervalle de confiance à 90% pour m?

b) obtenir un intervalle de confiance à 95% pour m ayant la même longueur?

Exercice 94 On observe les données $x_1, ..., x_6$, distribuées selon la loi $\mathcal{N}(m_1; \sigma_1^2)$, et $y_1, ..., y_{12}$ distribuées selon la loi $\mathcal{N}(m_2; \sigma_2^2)$ (m_1, m_2, σ_1^2 et σ_2^2 sont inconnus, et les variables sont supposées indépendantes dans leur ensemble). Pour le premier échantillon, les moyenne et variance empirique sont de: $\hat{m}_x = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} x_k = 49, 2$ et $\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{6}(x_k - \hat{m}_x)^2 = 2, 8$, tandis que pour le deuxième échantillon on obtient: $\hat{m}_y = 48, 4$ et $\hat{\sigma}_y^2 = 3, 04$.

a) Construire des intervalles de confiance à 95% pour m_1 et pour m_2.

b) On dispose à présent de plus d'information qu'au point a): les variances σ_1^2 et σ_2^2 sont maintenant supposées connues, de valeurs respectives $2, 5$ et 3. Donner de nouveaux intervalles de confiance à 95% pour m_1 et m_2.

c) En supposant toujours que $\sigma_1^2 = 2, 5$ et $\sigma_2^2 = 3$, donner la distribution de la différence $(\hat{m}_X - \hat{m}_Y)$ des moyennes empiriques de chaque échantillon, puis construire un intervalle de confiance à 90% pour $(m_1 - m_2)$.

Exercice 95 Les poids en grammes de 1000 pots de confiture sortis successivement d'une machine à conditionner ont été les suivants (les résultats sont donnés par classes de longueur 2, l'origine de la 1ère classe étant 2000 et l'extrémité de la dernière 2024):

classe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
nombre de pots	9	21	58	131	204	213	185	110	50	16	3	0

On admet que les poids X des pots sont indépendants de loi $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$.

1. Donner une estimation de m et σ^2.
2. Donner des intervalles de confiance de niveau 95% et 99% pour m.

Exercice 96 Une entreprise fabrique une pièce de moteurs industriels. Parfois ces pièces se révèlent immédiatement défaillantes après la vente. Le taux de défaillance doit être limité à 0,04. Sur 500 pièces contrôlées, 28 sont défaillantes.

a) Donner un intervalle de confiance pour le taux en question (avec le risque 0,005).

b) Est-ce que la norme de qualité de production est respectée?

Exercice 97 Deux statisticiens, Alain et Bernard, veulent estimer un certain paramètre θ inconnu ($\theta > 0$). Alain veut estimer le paramètre θ d'une distribution Gamma (3,θ) de densité

$$f(y) = \frac{1}{2}\theta e^{-\theta y}(\theta y)^2 \qquad y > 0.$$

Il observe pour cela un échantillon $y_1, ..., y_n$. Bernard veut estimer le paramètre θ d'une distribution de Poisson (2θ). Il observe pour cela un échantillon $z_1, ..., z_m$.

a) Déterminer les estimateurs du maximum de vraisemblance de θ, de Alain et Bernanrd.

b) On suppose $n = m$. Pour quelles valeurs de $y_1, ...y_n$ et $z_1, ..., z_n$ les estimations de Alain et Bernard sont-elles identiques?

Exercice 98 Dans la population des ménages d'un pays lointain on considère la hauteur des économies mensuelles X (exprimées en milliers de maravedis) qui possède la distribution de densité

$$f(x) := k^2 x e^{-kx} \mathbf{1}_{[0,+\infty]}(x) \qquad x \in \mathbf{R},$$

où le paramètre k est inconnu. On prélève un échantillon de 400 ménages et on a calculé la moyenne $\bar{x} = 2$.

a) Estimer k en utilisant la méthode de maximum de vraisemblance.

b) Quel est le pourcentage des familles qui économisent moins de 1000 maravedis par mois (on oublie l'erreur d'estimation de k)?

Exercice 99 Considérons un disque $\mathcal{D}$ de centre O connu et de rayon R inconnu.

a) On choisit un point x uniformément dans $\mathcal{D}$. Ceci signifie que si A est un sous-ensemble de $\mathcal{D}$ de surface $s(A)$, alors: $P\{x \in A\} = \frac{s(A)}{\pi R^2}$. Soit ρ la distance de x à O. Pour $r \geq 0$, que vaut la probabilité $P\{\rho \leq r\}$? En déduire que la variable aléatoire ρ a une densité que l'on explicitera.

b) On choisit maintenant n points indépendamment et uniformément dans $\mathcal{D}$, en notant $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ leurs distances au centre O. Donner l'estimateur du maximum de vraisemblance de R comme fonction de $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$, que l'on notera $\hat{R}(\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n)$. Calculer le biais de $\hat{R}$ et donner ensuite un estimateur sans biais $\hat{\hat{R}}$ de R.

Exercice 100 On considère un échantillon *i.i.d.* $X_1, X_2, ..., X_n$ de variables de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

a) Montrer qu'il n'y a pas d'estimateur sans biais de $\frac{p}{1-p}$.

b) On cherche maintenant à estimer la variance $p(1-p)$ à partir de $X_1, X_2, ..., X_n$.
$\overline{X}_n$ étant la moyenne empirique de l'échantillon, on propose l'estimateur: $T = \overline{X}_n(1 - \overline{X}_n)$.
Vérifier que T n'est pas sans biais et donner un estimateur sans biais de $p(1-p)$ qui soit un multiple de T.

Exercice 101 Soit $U_{a,b}$ une loi uniforme sur $[a, b]$; on observe $(X_1, ..., X_n)$, n-échantillon de $U_{a,b}$ pour estimer la moyenne $\frac{a+b}{2}$ de cette loi.

a) Quelle est l'erreur quadratique $E(\overline{X} - \frac{a+b}{2})^2$ de la moyenne empirique?

b) Soit

$$T := \frac{1}{2}\left\{ \sup_{1\leq i\leq n}(X_i) - \inf_{1\leq i\leq n}(X_i) \right\}$$

Calculer $E(T)$ *et* $E\left(T - \frac{a+b}{2}\right)^2$.

Exercice 102 a) Un parc contient L lions et T tigres. Un employé du parc est chargé de silloner le parc. Chaque fois qu'il voit un lion ou un tigre, il note sur un calepin le type d'animal (lion ou tigre) qu'il a vu. Il s'arrête une fois qu'il a vu n animaux pour faire un rapport à son chef. Quelle est la loi du nombre de lions notés dans le rapport? Donner la probabilité que k lions aient été notés.

b) Dans un parc concurrent, une autre statégie est adoptée: chaque fois que l'employé (courageux!) voit un lion ou un tigre, il le capture. Après avoir capturé n animaux, l'employé fait un rapport à son chef. Quelle est la loi du nombre de lions notés dans le rapport? Donner la probabilité que k lions aient été capturés.

Exercice 103 On lance deux dés équilibrés. On note X_1 (resp. X_2) le plus grand (resp. le plus petit) des deux résultats. Donner les fonction de masse de X_1 et de X_2 et les tracer.

Exercice 104 42800 mariages ont été célébrés en Suisse en 2010. En expliquant vos hypothèses et en donnant les lois de probabilités correspondantes, calculer la probabilité que pour exactement 2 de ces couples:

a) les deux époux soient nés un 1er janvier,

b) les deux époux aient le même jour d'anniversaire.

Exercice 105 Un chef d'entreprise, pour éviter l'attente des camions venant livrer, envisage de construire de nouveaux poste de déchargement. Actuellement, 5 postes sont en activité. Pour simplifier l'étude, on considère qu'il faut une journée entière pour décharger un camion. On désigne par X la variable aléatoire mesurant le nombre de camions venant livrer chaque jour. Une enquête statistique préalable a montré qu'on pouvait assimiler la loi de X à une loi de Poisson de paramètre 4.

a) Quelle est la probabilité de n'avoir aucun camion en attente?

b) Combien faudrait-il de postes de déchargement pour porter cette probabilité à plus de 0.9?

Exercice 106 Un concierge rentre de soirée. Il dispose de n clés dont une seule ouvre la porte de son domicile mais il ne sait plus laquelle.

a) Il essaie les clés les unes après les autres en éliminant après chaque essai la clé qui n'a pas convenu. Quelle est la probabilité que la porte ouvre après le $k$ième essai?

b) En réalité la soirée a été bien arrosée et le concierge ne pense pas à mettre de côté la mauvaise clé après l'avoir essayée. Donner la loi du nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé. Quelle est la probabilité que la porte ouvre après le $k$ième essai?

Exercice 107 Pour l'étude des sols d'une région, on effectue des tests à partir d'échantillons prélevés sur le terrain. Cinq échantillons doivent être soumis aux tests et on sait que la probabilité qu'un échantillon prélevé s'avère être inadéquat (endommagé par exemple) est de 0.2. Si l'on veut être assuré de disposer de cinq échantillons utilisables avec une probabilité au moins égale à 0.99, combien d'échantillons faut-il prélever?

Probabilités et Statistique pour SIC: Correction des exercices 2011

Corrigé 1 a) 66^8 b) $26^2 10^3$

Corrigé 2 23!9!2!

Corrigé 3 4!3!5!3!

Corrigé 4 C_{23}^4

Corrigé 5 C_{52}^5

Corrigé 6 $\sum_{k=0}^n C_n^k = (1+1)^n = 2^n$

Corrigé 7 $\frac{14!}{7!7!}$

Corrigé 8 pas de corrigé

Corrigé 9 En employant le théorème du binôme, la identitée $(x+y)^{n+m} = (x+y)^n(x+y)^m$ devient,

$$\sum_{k=0}^{m+n} x^{m+n-k} y^k C_{m+n}^k = \left(\sum_{i=0}^{n} x^{n-i} y^i C_n^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} x^{m-j} y^j C_m^j\right) \tag{1}$$

Mais,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{n} x^{n-i} y^i C_n^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} x^{m-j} y^j C_m^j\right) &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} x^{m+n-i-j} y^{j+i} C_m^j C_i^n \\
&= \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=i}^{m+n} x^{m+n-k} y^k C_m^{k-i} C_n^i \\
&= \sum_{k=0}^{m+n} x^{m+n-k} y^k \sum_{i=0}^{k} C_m^{k-i} C_n^i
\end{aligned} \tag{2}$$

où dans l'avant-dernière égalité on a changé la variable j par $k = i + j$, et dans la dernière égalité on a inversé l'ordre des sommations. La comparaison des coefficients de $x^p y^q$ dans (10) et dans (2) donne l'égalité recherchée.

Corrigé 10 Le nombre de dérivées partielles d'ordre r d'une fonction f de n variables est égal au nombre de façons de répartir r boules indistingables dans n urnes distingables: C_{n+r-1}^r.

Corrigé 11 Remarquons qu'il y a $C_{10}^3 C_8^3 = 6720$ façons de choisir un comité de 3 hommes et 3 femmes dans un groupe de 10 femmes et 8 hommes.

a) Le nombre de comités de 3 hommes qui contiennent les deux hommes qui refusent d'être ensemble est $C_6^1 = 6$. Alors, le nombre de comités de 3 hommes qui ne contiennent pas les 2 hommes qui refusent d'être ensembles est $C_8^3 - 6 = 50$. Il s'en suit que la réponse cherchée est

$$C_{10}^3 (C_8^3 - 6) = 120 \cdot 50 = 6000$$

b) Le raisonemment ici est similaire. On obtient:

$$(C_{10}^3 - C_8^1)C_8^3 = (120-8)\cdot 56 = 6272$$

c) Le nombre des comités avec l'homme et la femme qui refusent d'être ensemble est $C_9^2 C_7^2 = 756$. Alors la réponse est

$$C_{10}^3 C_8^3 - C_9^2 C_7^2 = 6720 - 756 = 5964$$

Corrigé 12 Il y a $4! = 24$ façons de placer les trois paires de jumeaux dans les 4 chambres. D'autre part, pour chaque placement, il y a $2^3 = 8$ façons de distribuer les trois paires de jumeaux dans les lits. Il y a donc $4!2^3 = 192$ façons d'organiser l'expérience.

Corrigé 13 On a

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} = \frac{(n-1)!(k+n-k)}{(n-k)!k!} = C_n^k$$

Corrigé 14 On s'apercoit d'abord qu'il y a $1+(n-k-2) = n-k-1$ manières de placer le bloc "A... B" de longeur $k+2$ dans la rangée. Il faut ensuite tenir compte des permutations de A et B: $2! = 2$. Et des permutations des $(n-2)$ personnes différentes de A et B: $(n-2)!$. Il y a donc $2(n-2)!(n-k-1)$ façons d'avoir k personnes entre A et B.

Corrigé 15 L'ensemble fondamental de cette expérience est $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ où $\Omega_1 = \{(D_1, D_2, \ldots)\ \textit{où}\ D_i \in \{1,2,3,4,5\} \quad 1 \le i < \infty\}$ (l'événement "aucun 6 ne sort") et $\Omega_2 = \cup_{n=1}^{\infty}\{(D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}, 6)\ \textit{où}\ D_i \in \{1,2,3,4,5\} \quad 1 \le i \le n-1\}$ (l'événement que l'expérience s'arrête). Les points de l'ensemble fondamental qui sont contenus dans E_n sont de la forme $(D_1, \ldots, D_{n-1}, 6)$. L'ensemble $\Omega_1 = (\cup_1^{\infty} E_n)^c$ est égal à l'événement "aucun 6 ne sort". C'est à dire $\Omega_1 = \{(D_1, D_2, \ldots)\}$ où $D_1, D_2, \ldots$ sont des nombres entiers entre 1 et 5.

Corrigé 16 $E \cap F = \{(1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (4,1), (6,1)\}$. $E \cup F$ est égal à l'événement "la somme des dés est impaire où bien l'un des dés montre 1". $F \cap G = \{(1,4), (4,1)\}$. $E \cap F^c$ est égal à l'evénement "la somme des dés est impaire et chaque dé montre un nombre plus grand où égal à 2". $E \cap F \cap G = F \cap G$.

Corrigé 17 a) Le point $\{000\ldots\}$ réprésente l'événement "personne ne gagne". Les autres points correspondent à des événements où A, B ou C gagne.

b) Ceux où le numéro 1 se situe dans la place $3n+1$ pour n entier, correspond à l'evénement où A gagne. Ceux où le numéro 1 se situe dans la place $3n+2$ pour n entier, correspond à l'evénement où B gagne. Ceux où le numéro 1 se situe dans la place $3n$ pour n entier, correspond à l'evénement où C gagne. Finalement, $(A \cup B)^c$ est égal à l'evénement que C gagne ou personne ne gagne.

Corrigé 18 a) L'ensemble fondamental est formé de tous les arrangements <u>ordonnés</u> possibles de n personnes. Donc $\#(\Omega) = n!$.

b) Soit l'événement $E_k =$"il y a k personnes entre A et B". Déterminons $\#(E_k) =$"nombre de cas favorables de E_k":
On considère d'abord le bloc "$A \overset{k}{\leftarrow\cdots\rightarrow} B$" de longueur $k+2$. On s'aperçoit qu'il y a $1+(n-k-2) = (n-k-1)$ manières de le placer dans la rangée.
Il faut ensuite tenir compte des permutations

- de A et B: $2! = 2$ permutations,
- des $(n-2)$ personnes différentes de A et B: $(n-2)!$ configurations différentes.

Ainsi,

$$\#(E_k) = 2\cdot(n-k-1)(n-2)!$$

et

$$P(E_k) = \frac{\#(E_k)}{\#(\Omega)} = \frac{2\cdot(n-k-1)(n-2)!}{n!} = \frac{2\cdot(n-k-1)}{n(n-1)}.$$

Remarque: On peut contrôler que $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{2\cdot(n-k-1)}{n(n-1)} = 1$.

c) Il est facile d'établir la liste des $3! = 6$ cas possibles. On obtient alors que

$$P(k=0) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \text{ et } P(k=1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$

ce qui correspond bien à l'expression trouvée sous b).

Remarque: On a bien $P(k=0) + P(k=1) = 1$.

Corrigé 19 La probabilité de ne tirer aucun 6 est de $\left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0.4822$. Alors, la probabilité de tirer au moins un 6 est de $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0.5177$.

Corrigé 20 La probabilité de que le six apparaisse au moins une fois est $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n}$. Pour que cette probabilité atteigne 1/2 il faut que $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{2n} \geq 1/2$. C'est à dire que

$$n \geq \frac{\ln 2}{2 \ln \frac{6}{5}}$$

Corrigé 21 La probabilité que les anniversaires de n personnes soient dans des mois différents est

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (12 - n + 1)}{12^n}$$

Alors, la probabilité qu'au moins deux personnes entre n personnes aient leur anniversaire le même mois est

$$1 - \frac{12 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (12 - n + 1)}{12^n}$$

Finalement, il faut au moins 5 personnes pour que cette probabilité soit au moins 1/2.

Corrigé 22 a) Deux signaux S_1 et S_2 atteignent le récepteur dans l'intervalle $(0, t)$. Soient X_1: le temps d'arrivée de S_1 et X_2: le temps d'arrivée de S_2. L'ensemble fondamental ou espace des résultats possibles est donc:

$$\Omega = \left\{(x_1, x_2) \in R^2 \mid 0 \leq x_1 \leq t\ ,\ 0 \leq x_2 \leq t\right\}.$$

Un élément de cet ensemble (un couple (x_1, x_2)) représente une issue possible de cette expérience (c'est-à-dire un événement élémentaire de l'ensemble fondamental): *"le signal S_1 arrive au temps x_1 et le signal S_2 arrive au temps x_2".*

b) L'événement A qui nous intéresse (i.e. "le récepteur se bloque") est un sous-ensemble de Ω défini par:

$$A = \left\{(x_1, x_2) \in \Omega \;\middle|\; |x_1 - x_2| < \theta\right\}.$$

Le fait d'admettre que **"**les deux signaux arrivent indépendamment l'un de l'autre et au "hasard"**"** nous permet d'affirmer qu'on a affaire à un modèle équiprobable. On peut alors calculer la probabilité de l'événement A comme suit:

$$P(A) = \frac{\text{aire de } A}{\text{aire de } \Omega} = \frac{t^2 - 2 \cdot \frac{(t-\theta)^2}{2}}{t^2} = \frac{2\theta t - \theta^2}{t^2}.$$

c) Si $\theta \ll t$, on peut négliger $(\frac{\theta}{t})^2$ par rapport à $2\frac{\theta}{t}$, et donc $P(A) \cong \frac{2\theta}{t}$.

Corrigé 23 Soit S_n le jet numéro n et E_n l'événement "deux piles successifs n'apparaissent pas". Remarquons que $P_n = P(E_n)$ et que

$$P(E_n) = P(E_n \cap \{S_n = P\}) + P(E_n \cap \{S_n = F\})$$

Mais

$$P(E_n \cap \{S_n = F\}) = P(E_{n-1} \cap \{S_n = F\}) = \frac{1}{2} P(E_{n-1})$$

et

$$P(E_n \cap \{S_n = P\}) = P(E_{n-2} \cap \{S_{n-1} = F\} \cap \{S_n = P\}) = \frac{1}{4} P(E_{n-2})$$

On en déduit que

$$P_n = \frac{1}{2}P_{n-1} + \frac{1}{2^2}P_{n-2} \tag{3}$$

Maintenant remarquons que $P_n = \frac{f_n}{2^n}$. Alors,

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Réponses aux questions (a), (b) et (c):

a) $f_{10} = 144$.

b) Remarquons que P_n est une fonction décroisante de n (c'est à dire que $P_{n+1} \leq P_n$). On en déduit que la limite $\lim_{n\to\infty} P_n$ existe. Appelons la P_∞. En prenant la limite $n \to \infty$ dans l'équation (3) on déduit que

$$P_\infty = \frac{3}{4}P_\infty$$

Ceci étant possible seulement si $P_\infty = 0$.

c) Soit $G_{n,i}$ égale à l'événement "$\{S_{8i} = P, S_{8i+1} = F, S_{8i+2} = P, S_{8i+3} = P, S_{8i+4} = P, S_{8i+5} = F, S_{8i+6} = F, S_{8(i+1)-1} = P\}$", et $R_{n,i} = G^c_{n,i}$ (c'est à dire l'événement "la suite $S_j, 8i \leq j \leq 8(i+1)-1$, est différente de P, F, P, P, P, F, F, P"). Soit $R_n = \cap_{i=1}^{n/8-8} R_{n,i}$. Par l'indépendance des événements $R_{n,i}$, $1 \leq i \leq n/8$, on a

$$P(R_n) = \Pi_{i=1}^{n/8} P(R_{n,i}) = \left(1 - \frac{1}{2^8}\right)^{n/8} \tag{4}$$

où dans la dernière égalité on a employé le fait que $P(R_{n,i}) = 1 - \frac{1}{2^8}$. De l'équation (4), on déduit que $\lim_{n\to\infty} P(R_n) = 0$. Mais clairement $P(Q_n) \leq P(R_n)$ (parce que $Q_n \subset R_n$). Alors, $\lim_{n\to\infty} P(Q_n) = 0$.

Corrigé 24 **a)** L'ensemble fondamental de cette expérience est $\Omega = \{(Y_1, Y_2, Y_3) \quad \text{où } 1 \leq Y_1, Y_2, Y_3 \leq 6\}$.

b) Soit X_1 le dé qui montre la valeur la plus petite, X_3 le dé qui montre la valeur la plus grande et X_2 le dé qui montre une valeur entre X_1 et X_3 (c'est-à dire $X_1 \leq X_2 \leq X_3$). On veut calculer la probabilité de l'événement "$X_1 + X_2 + X_3 \geq 15$". On appellera cet événement par E. La table ci-dessous donne les valeurs de X_1, X_2 et X_3 qui rend leur somme plus grande ou égale à 15.

X_1	X_2	X_3	somme	poids	probabilité
3	6	6	15	3	1/216
4	5	6	15	3!	1/216
4	6	6	16	3	1/216
5	5	5	15	1	1/216
5	5	6	16	3	1/216
5	6	6	17	3	1/216
6	6	6	18	1	1/216

La cinquième colonne correspond au nombre de façons qu'il y a d'obtenir les valeurs de X_1, X_2 et X_3 données. Et la sixième colonne correspond à la probabilité de chaque configuration (c'est-à-dire $1/6^3 = 1/216$). Alors, la probabilité recherchée est égale à

$$P(E) = \frac{(3+6+3+1+3+3+1)}{216} = \frac{20}{216} \approx 0.0926$$

Corrigé 25 La probabilité qu'aucune des deux pièces ne tombe sur pile est égale à la probabilité d'obtenir (F, F). C'est à dire 1/4. Alors, la réponse récherchée est $1 - 1/4 = 3/4$.

Corrigé 26 On utilise le fait que l'événement "avoir au moins un succès" est le complémentaire de l'événement "n'avoir aucun succès". La probabilité d'obtenir au moins un 6 avec 4 dés est donc de

$$1 - (1 - \frac{1}{6})^4 \simeq 0,518,$$

et la probabilité d'obtenir au moins un double 6 lors de 24 jets de deux dés est de

$$1 - (1 - \frac{1}{36})^{24} \simeq 0,491.$$

Corrigé 27 On ne peut pas en conclure que $P(S=9)=P(S=10)$ car les configurations ne sont pas équiprobables. Si l'on tient compte de l'ordre elles le sont, il faut donc tenir compte des permutations possibles de chaque configuration. Ainsi (3,3,3) ne "compte qu'une fois" alors que (5,2,2) "compte triple" et (5,3,1) "compte six fois". On obtient $P(S=9)=\frac{25}{6^3}$ et $P(S=10)=\frac{27}{6^3}$.

Corrigé 28 $P\{\text{"il gagne"}\}=1-P\{\text{"il perd"}\}=1-\frac{16\times15\times14}{20\times19\times18}$.

Corrigé 29 La réponse est la même pour (a) et (b),

$$P=\frac{15\cdot14\cdot13\cdot10\cdot9}{25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21}=0.03854$$

Pour (c) on obtient,

$$P=\frac{15\cdot14\cdot10\cdot9\cdot8}{25\cdot24\cdot23\cdot22\cdot21}=0.0237$$

Corrigé 30 **a)** L'ensemble fondamental de cette expérience est $\Omega=\{(D_1,D_2),\ où\ \ D_i, i=1,2$ est une couleur qui peut être blanche ou noire$\}$.

b)

$$\begin{aligned}
P(B_1) &= \frac{4}{6}=\frac{2}{3}\\
P(B_2|B_1) &= \frac{P(B_2\cap B_1)}{P(B_1)}=\frac{\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{4}{6}}=\frac{3}{5}\\
P(B_2|B_1^c) &= \frac{P(B_2\cap B_1^c)}{P(B_1^c)}=\frac{\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}}{\frac{2}{6}}=\frac{4}{5}\\
P(B_2) &= P(B_1\cap B_2)+P(B_1^c\cap B_2)=\frac{4}{6}\frac{3}{5}+\frac{2}{6}\frac{4}{5}=\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

c) Remarquons que $P(B_1\cap B_2)+P(B_1^c\cap B_2)=P(B_2)$ et que $P(B_1\cap B_2^c)+P(B_1^c\cap B_2^c)=P(B_2^c)$. Alors, $P(B_2)+P(B_2^c)=1$ donne l'égalité recherchée.

Corrigé 31 Soit V l'événement "la lettre prise au hasard dans le mot est une voyelle", B l'événement "le mot a été ecrit par un anglais", et par A l'événement "le mot a été ecrit par un americain". En employant la formule de Bayes on obtient,

$$P(B|V) = \frac{P(V|B)P(B)}{P(V|B)P(B)+P(V|A)P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{1}{2}\frac{4}{10}+\frac{2}{5}\frac{6}{10}}=\frac{4}{4+\frac{24}{5}}=\frac{5}{11}$$

Corrigé 32 **a)** Si au début on obtient le résultat rouge, on gagne 1 CHF, et on est dans la même position que si on avait débuté le jeu avec $k+1$ CHF. C'est à dire, conditionné à R, la probabilité de quitter le jeu sans argent est $p_{K,k+1}$. Similairement si au début on obtient le résultat noir, on a $k-1$ CHF et la probabilité de quitter sans argent est $p_{K,k-1}$. On en déduit que

$$p_{K,k}=pp_{K,k+1}+(1-p)p_{K,k-1}\qquad 0<k<K$$

où

$$p_{K,k+1}-p_{K,k}=\frac{1-p}{p}(p_{K,k}-p_{K,k-1})\qquad si\quad p>0 \tag{5}$$

Par induction et par le fait que $p_{K,0}=1$, cette équation implique que

$$p_{K,k+1}-p_{K,k}=\left(\frac{1-p}{p}\right)^k(p_{K,1}-1)$$

Alors,

$$p_{K,k}=1+(p_{K,1}-1)\frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^k-1}{\frac{1-p}{p}-1}$$

Mais $p_{K,K} = 0$, on peut en déduire en mettant $k = K$ que

$$0 = 1 + (1 - p_{K,1}) \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^K - 1}{\frac{1-p}{p} - 1}$$

Si on élimine $p_{K,1}$ on obtient finalement que

$$p_{K,k} = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^K - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^K - 1} \tag{6}$$

b) Remarquons que comme $p < 1/2$, on a $\lim_{K\to\infty} \left(\frac{p}{1-p}\right)^K = 0$. On déduit de (6) que

$$\lim_{K\to\infty} p_{K,k} = 1$$

c) Si $p = 1/2$, l'équation (5) devient

$$p_{K,k+1} - p_{K,k} = p_{K,k} - p_{K,k-1}$$

On en déduit que $p_{K,k} - p_{K,k-1} = p_{K,1} - 1$. En employant l'induction en k on déduit que

$$p_{K,k} = k(p_{K,1} - 1) + 1 \tag{7}$$

Mais $p_{K,K} = 0$ d'où $p_{K,1} = 1 - \frac{1}{K}$. Alors,

$$p_{K,k} = 1 - \frac{k}{K} \qquad 0 < k < K$$

d) **Solution 1.** La probabilité $p_{K,k}$ de quitter sans argent est une fonction de p. On l'ecrira comme $p_{K,k}(p)$. Tout d'abord, remarquons que la probabilité de quitter le jeu avec K CHF est égale à $p_{K,K-k}(1-p)$. Il s'en deduit que la probabilité de jamais quitter le jeu est égale à

$$1 - p_{K,k}(p) - p_{K,K-k}(1-p)$$

De l'équation (6) pou le cas $p < 1/2$ et l'équation (7) pour le cas $p = 1/2$ on conclu que cette quantité est égale a zéro.

Solution 2. Soit X_n la quantité d'argent du joueur quand la roulette a été tournée n fois. Soit A_n l'événement "$0 < X_n < K$" (c'est à dire, l'événement de n'avoir pas quitté le casino juste après que la roulette a été tournée n fois). On veut démontrer que

$$P_k(\cap_{m=1}^{\infty} A_m) = 0$$

où $P_k(A)$ est la probabilité de l'événement A quand on démarre avec k CHF. Tout d'abord remarquons que pour tout $n, q > 0$ on a

$$P_k(\cap_{m=1}^{\infty} A_m) \leq P_k(\cap_{m=1}^{n} A_{qm}) \tag{8}$$

Mais

$$P_k(\cap_{m=1}^{n} A_{qm}) = P_k(\cap_{m=2}^{n} A_{qm} | A_q) P_k(A_q)$$

Maintenant on définit par $r := \max_{0<k<K} P_k(A_q)$. Alors,

$$\begin{aligned} \max_k P_k(\cap_{m=1}^{n} A_{qm}) &\leq r \max_k P_k(\cap_{m=2}^{n} A_{qm} | A_q) \\ &\leq r \max_k P_k(\cap_{m=1}^{n-1} A_{qm}) \\ &\leq r^n \end{aligned} \tag{9}$$

Mais $P_k((A_q)^c) \geq P_k(X_q \notin [1, K-1]) = P_k(X_q \geq K) + P_k(X_q \leq 0)$. On choisit $q = k$. Remarquons que la probabilité $P_k(X_q \leq 0)$ est plus grande ou égale à la probabilité de perdre

1 CHF dans chaque tourné de la roulette. C'est à dire $P_k(X_q \leq 0) \geq (1-p)^k$. On en déduit que

$$P_k((A_q)^c) \geq (1-p)^k \geq (1-p)^K$$

Alors, $P_k(A_q) \leq 1-(1-p)^K$ et $r = \max_k P_k(A_q) \leq 1-(1-p)^K < 1$ (parce que $p < 1/2$). En employant ce fait dans (8) et (9) on obtient que

$$P_k(\cap_{m=1}^{\infty} A_m) \leq r^n$$

où $n > 0$ est arbitraire. Prenant la limite $n \to \infty$, la preuve est finie.

Corrigé 33 Soient RR, NN et RN respectivement les événements, "la carte choisie est entièrement rouge", "entièrement noire" et "bicolore". Soit encore R l'événement, "la face apparente de la carte tirée est rouge". On aura

$$\begin{aligned}
P(RN|R) &= \frac{P(R|RN)P(RN)}{P(R|RR)P(RR)+P(R|RN)P(RN)+P(R|NN)P(NN)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{1\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Corrigé 34 Soit M l'événement "le patient est atteint", B l'événement "le patient est en bonne santé", et $+$ l'événement "le résultat du test est positif". De la formule de Bayes on a

$$\begin{aligned}
P(M|+) &= \frac{P(+|M)P(M)}{P(+|M)P(M)+P(+|B)P(B)} \\
&= \frac{\frac{99}{100}\frac{1}{1000}}{\frac{99}{100}\frac{1}{1000}+\frac{2}{100}\frac{999}{1000}} \\
&= \frac{99}{2097} \approx 0.0472
\end{aligned}$$

Ceci n'est pas un très bon résultat. Pour essayer de l'améliorer il faut répéter le test. Pour $m \leq n$ soit $(+)^{n-m}(-)^m$ l'événement "lors de n tests, $n-m$ ont donné un résultat positif et m un résultat négatif". Alors, la probabilité qu'un client soit atteint sachant que son test a été fait n fois et que $n-m$ ont donné un résultat positif et m un résultat négatif, est

$$\begin{aligned}
P(M|(+)^{n-m}(-)^m) &= \frac{P((+)^{n-m}(-)^m|M)P(M)}{P((+)^{n-m}(-)^m|M)P(M)+P((+)^{n-m}(-)^m|B)P(B)} \\
&= \frac{\left(\frac{99}{100}\right)^{n-m}\left(\frac{1}{100}\right)^m\frac{1}{1000}}{\left(\frac{99}{100}\right)^{n-m}\left(\frac{1}{100}\right)^m\frac{1}{1000}+\left(\frac{2}{100}\right)^{n-m}\left(\frac{98}{100}\right)^m\frac{999}{1000}} \\
&= \frac{99^{n-m}}{99^{n-m}+2^{n-m}98^m\cdot 999} \\
&= \frac{1}{1+999\cdot 98^m(2/99)^{n-m}} \\
&= \frac{1}{1+999\cdot(49\cdot 99)^m(2/99)^n}
\end{aligned}$$

De cette formule on peut conclure que par exemple $P(M|(+)^2) \approx 0.710$ et $P(M|(+)^3) \approx 0.992$.

Corrigé 35 Le prisonnier a demandé un nom de condamné, mais on ne sait pas quel nom le geôlier va choisir si les deux autres prisonniers, B et C son condamnés. Si l'on veut décrire complètement la situation en termes probabilistes, il faut dire comment s'effectue le choix du nom. En l'absence de toute autre information le prisonnier doit faire une hypothèse, la plus plausible étant celle qui tient compte de son ignorance totale: Si B et C sont condamnés, le geôlier choisira de nommer B avec la probabilité $1/2$ et par conséquent il nommera C avec la probabilité $1/2$. La formalisation du problème est maintenant possible. L'ensemble fondamental est $\Omega = \{(x,y)\}$ où x prend ses valeurs dans l'ensemble $\{(AB, BC, CA\}$ (la paire de prisonniers condamnés) et y prend ses valeurs dans $\{B, C\}$ (le prisonnier nommé par le gardien). On définit les variables aléatoires X et Y comme les applications coordonnées de Ω:

$$\begin{cases} X(w) &= x \\ Y(w) &= y \end{cases}$$

L'événement “A est condamné” s'écrit

$$\{w : X(w) = AB \quad ou \quad AC\}$$

On veut obtenir la probabilité que A ait été condamné sachant que B a été nommé par le geôlier:

$$P(\{X = AB\} \cup \{X = AC\} | Y = B) \tag{10}$$

Ne sachant rien à priori sur la décision du tribunal, l'hypothèse suivante est raisonnable:

$$P(X = AB) = P(X = AC) = P(X = BC) = \frac{1}{3}$$

Si $X = AB$, le nom du prisonnier nommé par le gardien sera forcément B, donc

$$P(Y = B | X = AB) = 1$$

De même

$$P(Y = C | X = AC) = 1$$

Par contre, si $X = AB$, le geôlier tire au sort B ou C, avec la même probabilité $1/2$ pour B et C, d'où

$$P(Y = B | X = BC) = P(Y = C | X = BC) = \frac{1}{2}$$

D'abord,

$$P(\{X = AB\} \cup \{X = AC\} | Y = B) = P(X = AB | Y = B) + P(X = AC | Y = B)$$

Le deuxième terme du deuxième membre de la dernière égalité disparait:

$$P(X = AC | Y = B) = P(\{X = AC\} \cap \{Y = B\}) / P(Y = B) = 0$$

puisque $\{X = AC\} \cap \{Y = B\} = \phi$ (le geôlier ne ment pas). D'autre part,

$$P(X = AB | Y = B) = P(\{X = AB\} \cap \{Y = B\}) / P(Y = B) \tag{11}$$

Mais si $X = AB$ alors nécessairement $Y = B$. L'égalité (11) se réduit donc à

$$P(X = AB) / P(Y = B)$$

On sait que $P(X = AB) = 1/3$. Il reste donc à calculer $P(Y = B)$. On applique la règle des causes totales: puisque les événements $\{X = AB\}, \{X = AC\}$ et $\{X = BC\}$ forment une partition de Ω,

$$\begin{aligned} P(Y = B) &= P(Y = B | X = AB) P(X = AB) + P(Y = B) | X = AC) P(X = AC) \\ &+ P(Y = B | X = BC) P(X = BC) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalement la probabilité recherchée est égale à $\frac{1}{3} / \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$. Donc la probabilité que A soit condamné sachant que $Y = B$ est la même que la probabilité à priori que A soit condamné. Les événements: “A est condamné” et “Le geôlier a nommé B” sont indépendants.

Corrigé 36 L'espace fondamental de cette expérience est $\Omega = \{(X_V, X_C, X_P)\}$, où $X_V = A, B$ ou C, $X_C = A, B$ ou C et $X_P = A, B$ ou C. Ici, X_V représente la porte où se trouve la voiture, X_C la porte choisit par le concurrent et X_P la porte ouvert par le présentateur. Pour répondre la question “est-ce que la probabilité de gagner en changeant de porte est plus grande que la probabilité de gagner sans changer de porte” il faut calculer la probabilité que le concurrent soit dans une porte différente que la voiture, conditionné à l'événement “ la voiture ne se trouve pas dans la porte choisie par le présentateur”. C'est à dire,

$$P(\{X_V \neq X_c\} | \{X_V \neq X_P\})$$

Mais $P(\{X_V \neq X_P\}) = 1$. Alors, on en déduit,

$$\begin{aligned} P(X_V \neq X_c | X_V \neq X_P) &= \frac{P(\{X_V \neq X_C\} \cap \{X_V \neq X_P\})}{P(\{X_V \neq X_P\})} \\ &= P(X_V \neq X_C) \\ &= P(\{(X_V, X_C) = \{(A, B), (A, C), (B, A), (B, C), (C, A), (C, B)\}\}) \\ &= \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Alors, la probabilité que le concurrent gagne s'il change de porte est $2/3$, et le meilleur choix est de changer de porte.

Corrigé 37 Soit S_n l'événement “le n^{eme} jour est ensoleillé” et N_n l'événement “le $n^{\text{ème}}$ jour est nuageux”. Alors,

$$\begin{aligned} s_n &= P(S_n) = P(S_n|S_{n-1})P(S_{n-1}) + P(S_n|N_{n-1})P(N_{n-1}) \\ &= ps_{n-1} + q(1 - s_{n-1}) \\ &= (p-q)s_{n-1} + q \end{aligned}$$

On démontre que $s_n = \frac{1}{2}(1 + (p-q)^n)$, $n \geq 0$ par induction sur n. Si $n = 0$ c'est clairement vrai. Supposons maintenant que cette formule est valide pour $n \leq m$. Alors,

$$\begin{aligned} s_{m+1} &= (p-q)s_m + q \\ &= (p-q)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(p-q)^m\right) + q \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + (p-q)^m\right) \end{aligned}$$

Corrigé 38 X_n ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. En effet, il ne peut y avoir plus d'une machine en panne au début d'une journée. On a

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0|X_n = 0) &= p^2 + p(1-p) + (1-p)\,p = p(2-p) \\ & \quad \text{(soit ni l'une ni l'autre ne tombe en panne,} \\ & \quad \text{soit l'une tombe en panne et est réparée,} \\ & \quad \text{soit l'autre tombe en panne et est réparée)} \\ P(X_{n+1} = 0|X_n = 1) &= p \\ P(X_{n+1} = 1|X_n = 0) &= (1-p)^2 \\ P(X_{n+1} = 1|X_n = 1) &= 1 - p\,. \end{aligned}$$

Corrigé 39

1. $P(A|B) = 0.9$ et $P(\overline{A}|\overline{B}) = 0.8$.
2. Les 4 pièces sont acceptées, donc le contrôle des 3 bonnes pièces est sans erreur et il y a erreur dans le contrôle de la pièce défectueuse . La probabilité d'un tel événement est:

$$P(A|B)^3 \cdot P(A|\overline{B}) = (0,9)^3 \cdot 0,2 \simeq 0.146.$$

3. Soit l'événement $E =$“il y a erreur dans le contrôle d'une pièce”.
$P(E) = P(\overline{A}|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})$. D'où, puisque $P(\overline{B}) = 0,2$,

$$P(E) = 0,1 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot 0,2 = 0,12.$$

4. $P(\overline{B}|A) = \dfrac{P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})}{P(A)} = \dfrac{P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\overline{B}) \cdot P(\overline{B})} \simeq 0,053.$

Corrigé 40 Soient RR, NN et RN respectivement les événements, “la carte choisie est entièrement rouge”, “entièrement noire” et “bicolore”. Soit encore R l'événement, “la face apparente de la carte tirée est rouge”. On aura

$$\begin{aligned} P(RN|R) &= \frac{P(R|RN)P(RN)}{P(R|RR)P(RR) + P(R|RN)P(RN) + P(R|NN)P(NN)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{3}}{1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Corrigé 41 L'ensemble fondamental de cette expérience est $\Omega = \{(E_1, E_2)$ où E_1 est le sexe du premier enfant et E_2 est le sexe du deuxième$\}$. L'événement “les deux enfants sont des filles” est $A = \{(F,F)\}$, et “l'aînée en est une” est $B = \{(F,F),(F,G)\}$. La probabilité recherchée est

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$$

Corrigé 42 L'ensemble fondamental de cette expérience est $\Omega = \{(D_1, D_2) \textit{ où } 1 \leq D_i \leq 6 \textit{ et } i = 1, 2\}$. Appelons A l'événement "au moins l'un d'entre eux montre 6", et B l'événement "les deux résultats sont différents". On veut calculer

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Mais, $P(B) = \frac{6 \cdot 5}{6 \cdot 6} = \frac{5}{6}$ et

$$P(A \cap B) = P(B) - P(A^c \cap B) = \frac{5}{6} - \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 6} = \frac{5}{6} - \frac{5}{9}$$

Alors, la probabilité recherchée est

$$P(A|B) = 1 - \frac{6}{9} = 1/3$$

Corrigé 43 Soit A l'événement "la première carte tirée est un pique" et B l'événement "les deux dernières en sont". Remarquons que

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{13}{52}\frac{12}{51}\frac{11}{50} \\ P(B) &= \frac{13}{52}\frac{12}{51}\frac{11}{50} + \frac{39}{52}\frac{13}{51}\frac{12}{50} \end{aligned}$$

Alors, la probabilité recherchée est égale à $P(A|B) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11}{13 \cdot 12 \cdot 11 + 39 \cdot 13 \cdot 12} = \frac{11}{50}$.

Corrigé 44 Soit D l'événement "la personne selectionée est un daltonien", H l'événement "elle est un homme" et F l'événement "c'est une femme". Tout d'abord, par la formule de Bayes on a

$$P(H|D) = \frac{P(D|H)P(H)}{P(D|H)P(H) + P(D|M)P(M)}$$

Si on admet que les hommes sont aussi nombreux que les femmes, alors $P(H) = P(F) = 1/2$ et

$$P(H|D) = \frac{\frac{5}{100} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{5}{100} \cdot \frac{1}{2} + \frac{0,25}{100} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{5}{5.25} = \frac{20}{21}$$

Si au contraire il y avait deux fois plus de femmes que des hommes, on aurait,

$$P(H|D) = \frac{\frac{5}{100} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{5}{100} \cdot \frac{2}{3} + \frac{0,25}{100} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{10}{10.25} = \frac{40}{41}$$

Corrigé 45 D'abord remarquons que si Xavier et ses deux parents ont les yeux marrons et si la soeur de Xavier a les yeux bleus, il faut que les deux parents aient chacun un gène oeil bleu et un autre marron.

a) Xavier peut avoir des gènes $(M, M), (M, B)$ et (B, M), alors, la probabilité que Xavier ait un gène oeil bleu est $2/3$.

b) On définira par G_X, G_F et G_E les gènes yeux de Xavier, de sa femme et de son enfant. Alors,

$$P(G_E = (B, B)) = P(G_X \in \{(M, B), (B, M)\})\frac{1}{2} = \frac{2}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

c) On définira par G_{E_1} et G_{E_2} les gènes yeux du premier et du deuxième enfant de Xavier. Similairement, on définira par F_{E_1} et F_{E_2} la couleur des yeux du premier et du deuxième enfant de Xavier. Remarquons que $P(F_{E_2} = M|F_{E_1} = M) = \frac{P(\{F_{E_1}=M\} \cap \{F_{E_2}=M\})}{P(F_{E_1}=M)}$. Mais

$$\begin{aligned} P(F_{E_1} = M) &= P(F_{E_1} = M|G_X = (M, M))P(G_X = (M, M)) \\ &+ P(F_{E_1} = M|G_X \in \{(M, B), (B, M)\})P(G_X \in \{(M, B), (B, M)\}) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\{F_{E_1} = M\} \quad &\cap \quad \{F_{E_2} = M\}) = P(\{F_{E_1} = M\} \cap \{F_{E_2} = M\}|G_X = (M, M))P(G_X = (M, M)) \\ &+ \quad P(\{F_{E_1} = M\} \cap \{F_{E_2} = M\}|G_X \in \{(M, B), (B, M)\})P(G_X \in \{(M, B), (B, M)\}) \\ &= \quad 1 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Alors, la probabilité recherchée est $\frac{1/2}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$.

Corrigé 46 La table permet de calculer le nombre de pièces sans défaut produite par chaque ouvrier. Par exemple, l'ouvrier O_1 produit $6 \cdot 110 = 660$ pièces en 24 heures. La table ci-dessous indique le nombre de pièces produite par chaque ouvrier au bout de 24 heures,

Ouvrier	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
Pièces	660	500	650	560	600

Par la formule de Bayes, on peut maintenant calculer la probabilité que la piéce non-défectueuse tirée au hasard ait été fabriquée par l'ouvrier O_1,

$$\begin{aligned}
P(O_1|N) &= \frac{P(N|O_1)P(O_1)}{P(N|0_1)P(O_1)+P(N|0_2)P(O_2)+P(N|0_3)P(O_3)+P(N|0_4)P(O_4)+P(N|0_5)P(O_5)}\\
&= \frac{\frac{92}{100}\cdot\frac{660}{2970}}{\frac{92}{100}\frac{660}{2970}+\frac{93}{100}\frac{500}{2970}+\frac{94}{100}\frac{650}{2970}+\frac{96}{100}\frac{560}{2970}+\frac{96}{100}\frac{600}{2970}}\\
&= \frac{92\cdot 660}{92\cdot 660+93\cdot 500+94\cdot 650+96\cdot 560+96\cdot 600}\\
&= \frac{60720}{60720+46500+61100+53760+57600}\\
&= \frac{60720}{279680}
\end{aligned}$$

Similairement on peut calculer la probabilité que la pièce ait été fabriquée par chacun des ouvriers. La table ci-dessous indique les résultats que l'on obtient,

Ouvrier	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5
Prob.	6072/27968 $= 0.22$	4650/27968 $= 0.17$	6110/27968 $= 0.22$	5376/27968 $= 0.19$	5760/27968 $= 0.21$

Corrigé 47 a) Appelons A l'événement: "on tire le premier dé" et B son événement complémentaire. Soit R_1 : "on tire une face rouge lors du premier jet ". Alors:

$$P(R_1)=P(R_1\bigcap A)+P(R_1\bigcap B)=P(R_1|A).P(A)+P(R_1|B).P(B)=2/3.1/2+1/3.1/2=1/2$$

b) Soit $R^{(2)}$; "les deux premiers jets donnent rouge" et R_3 : "le troisième jet donne rouge". Alors:

$$\begin{aligned}
P(R_3|R^{(2)}) &= \frac{P(R_3\bigcap R^{(2)})}{P(R^{(2)})}\\
&= \frac{P(R^{(3)}|A)P(A)+P(R^{(3)}|B)P(B)}{P(R^{(2)}|A)P(A)+P(R^{(2)}|B)P(B)}\\
&= \frac{(2/3)^3\times 1/2+(1/3)^3\times 1/2}{(2/3)^2\times 1/2+(1/3)^2\times 1/2}\\
&= \frac{1/3}{5/9}=\frac{3}{5}
\end{aligned}$$

c) Soit $R^{(n)}$: "les n premiers jets donnent rouge".

$$\begin{aligned}
P(A|R^{(n)}) &= \frac{P(A\bigcap R^{(n)})}{P(R^{(n)})}\\
&= \frac{P(R^{(n)}|A)P(A)}{P(R^{(n)})}\\
&= \frac{(2/3)^n\times 1/2}{(2/3)^n\times 1/2+(1/3)^n\times 1/2},
\end{aligned}$$

la limite de la probabilité conditionnelle $P(A|R^{(n)})$ vaut bien 1.

Corrigé 48 a) On numérote les boules blanches de 1 à N . Soit X_i la v.a. définie par:
$X_i = 1$ si la boule blanche numéro i a été tirée, 0 sinon.
On a

$$\begin{aligned}
P\{X_i=0\} &= \frac{M+N-1}{M+N}.\frac{M+N-2}{M+N-1}\cdots\frac{M+N-n}{M+N-n+1}=\frac{M+N-n}{M+N},\\
P\{X_i=1\} &= \frac{n}{M+N}.
\end{aligned}$$

Comme $X = \sum_{i=1}^{N} X_i$, on en déduit que:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{N} E(X_i) = \frac{Nn}{M+N}.$$

b) On numérote les boules noires de 1 à M et pour $1 \leq j \leq M$, on définit Y_j par:
$Y_j = 1$ si la boule noire numéro j a été tirée avant la première boule blanche, 0 sinon. Pour chaque $1 \leq j \leq M$: $P\{Y_j = 1\} = \frac{1}{N+1}$
(les événements "la boule noire numéro j est tirée avant toutes les boules blanches" et "la boule blanche numéro i est tirée avant toutes les autres boules blanches et avant la boule noire numéro j" sont équiprobables). Comme $X = \sum_{j=1}^{M} Y_j + 1$, on obtient: $E(X) = 1 + \frac{M}{N+1}$.

Corrigé 49 a) On appelle X_i la somme de 2 dés au i–ème jet: $X_i \in \{2, \ldots, 12\}$. On a $P(X_i = 5) = 1/9$ et $P(X_i = 7) = 1/6$. On appelle τ le temps d'arrêt du jeu, $\tau = 1, 2, \ldots$, et $F_j = \{\tau = j\}$ est l'événement que le jeu s'arrête au j–ème jet. On note que on peut ecrire l'événement F_j comme

$$\{X_j = 5 \text{ ou } X_j = 7\} \cap \left[\cap_{i=1}^{j-1} \{X_i \neq 5 \text{ et } \mathrm{X_i} \neq 7\}\right]$$

En utilisant cela et l'indépendance des variables X_i on obtient que pour tout j

$$P(X_j = 5|F_j) = P\left(\{X_j = 5\}|\{X_j = 5\} \cup \{X_j = 7\}\right) = \frac{1/9}{1/9 + 1/6} = \frac{2}{5}.$$

Puisque le jeu va s'arrêter presque sûrement (c'est–à–dire $\sum_{j=1}^{\infty} P(F_j) = 1$), par la formule de la probabilité totale on arrive à

$$P(\text{ le jeu s'arrête avec un 5 }) = \sum_{j=1}^{\infty} P(X_j = 5|F_j)P(F_j) = \left(\frac{2}{5}\right) \sum_{j=1}^{\infty} P(F_j) = \frac{2}{5}.$$

b) Par définition de τ et F_j on a

$$E(\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} jP(F_j).$$

Puisque que $P(X_i = 5 \text{ ou } X_i = 7) = 5/18$, on voit facilement que

$$P(F_j) = \left(1 - \frac{5}{18}\right)^{j-1} \left(\frac{5}{18}\right).$$

On est donc en train de calculer l'espérance d'une loi géométrique de parametre 5/18 et on conclut

$$E(\tau) = \frac{18}{5} = 3.6$$

Corrigé 50 a) X peut prendre les valeurs $0, 1, 2, ..., n$, et pour $0 \leq k \leq n$ on a: $P\{X = k\} = C_n^k p^k (1 - p)^{n-k}$.

b) Observons que: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où: $X_i = 1$ si le résultat du ième jet est pile, 0 sinon, et que chaque X_i est une variable de Bernoulli de paramètre p .
Donc: $E(X_i) = 0 \times P\{X_i = 0\} + 1 \times P\{X_i = 1\} = p$, $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$.
Comme les v.a. X_i sont indépendantes (le résultat du 1er jet ne donne pas d'information sur le resultat du 2ème), on a aussi:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i),$$

et: $Var(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i)^2) = p - p^2$. Ainsi: $Var(X) = np(1-p)$.

Corrigé 51 a) Soit A un client ayant visité le supermarché.
$P\{A$ achète un produit non défectueux $\} = P\{A$ achète un produit $\}.P\{$ le produit est non défectueux $\} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

b) Soient: B_n : "n clients ont visité le supermarché" et A_k : "k produits ont été vendus".

$$\begin{aligned}
P(B_n|A_k) &= \frac{P(A_k|B_n)P(B_n)}{\sum_{m=k}^{\infty} P(A_k|B_m)P(B_m)} \\
&= \frac{C_n^k.\frac{1}{2^k}.\frac{1}{2^{n-k}}.p^n(1-p)}{\sum_{m=k}^{\infty} C_m^k.\frac{1}{2^k}.\frac{1}{2^{m-k}}.p^m(1-p)} \\
&= C_n^k \frac{1}{2^{n+1}} p^{n-k}(1-p) \times (\sum_{m=k}^{\infty} C_m^k \frac{1}{2^{m+1}} p^{m-k}(1-p))^{-1} \\
\text{Or: } \sum_{m=k}^{\infty} C_m^k \frac{1}{2^{m+1}} p^{m-k} &= \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+k}^k (\frac{p}{2})^m \\
\text{et: } \sum_{m=0}^{\infty} C_{m+k}^k r^m &= (1-r)^{-(k+1)} \text{ si } 0 \leq |r| < 1. \\
\text{On obtient donc: } P(B_n|A_k) &= C_n^k \frac{1}{2^{n+1}} p^{n-k}.\frac{1}{\frac{1}{2^{k+1}}(1-\frac{p}{2})^{-(k+1)}} \\
P(B_n|A_k) &= C_n^k \frac{1}{2^{n+1}} p^{n-k}.(2-p)^{k+1}.
\end{aligned}$$

Corrigé 52 Puisque: $\sum_{i=0}^{\infty} P\{X=i\} = 1 = c\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = ce^{\lambda}$ nécéssairement: $c = e^{-\lambda}$.

a) $P\{X=0\} = c\frac{\lambda^o}{0!} = e^{-\lambda}$.

b) $P\{X>2\} = 1 - (P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)) = 1 - e^{-\lambda}(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}) = e^{-\lambda}\sum_{i=3}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!}$

c) $E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} i.(e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}) = e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!} = \lambda,$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{i=0}^{\infty} i^2.(e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!}) \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty} i\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}((i-1)+1)\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}) + \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=2}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-2)!} \\
&= \lambda + \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda + \lambda^2,
\end{aligned}$$

donc: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \lambda$.

Corrigé 53 **a)** X peut prendre les valeurs $0, 1, 2, ..., n$, et pour $0 \leq k \leq n$ on a: $P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$.

b) Observons que: $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où: $X_i = 1$ si le résultat du ième jet est pile, 0 sinon, et que chaque X_i est une variable de Bernoulli de paramètre p .
Donc: $E(X_i) = 0 \times P\{X_i = 0\} + 1 \times P\{X_i = 1\} = p$, $E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = np$.
Comme les v.a. X_i sont indépendantes (le résultat du 1er jet ne donne pas d'information sur le résultat du 2ème), on a aussi:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i),$$

et: $Var(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i)^2) = p - p^2$. Ainsi: $Var(X) = np(1-p)$.

Corrigé 54 On connaît le résultat k de l'expérience (par exemple n jets indépendants d'une pièce). Si l'on suppose que la probabilité d'obtenir pile vaut p pour chaque jet, alors:

$$P_p\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

La valeur la plus vraisemblable du paramètre p, notée $\hat{p}$, est donc celle qui maximise la fonction

$$p \mapsto C_n^k p^k (1-p)^{n-k} (0 \leq p \leq 1).$$

Ceci revient à maximiser la fonction

$$p \mapsto p^k (1-p)^{n-k} = \exp(k \log p + (n-k) \log(1-p))$$

ou encore la fonction

$$p \mapsto k \log p + (n-k) \log(1-p).$$

• Si $k = 0$: $\hat{p} = 0$.
• Si $k = n$: $\hat{p} = 1$.
• Si $1 \leq k \leq n-1$: en dérivant la fonction $p \mapsto k \log p + (n-k) \log(1-p)$, on voit que son unique maximum dans $[0,1]$ est atteint en $\frac{k}{n}$.
Dans tous les cas: $\hat{p} = \frac{k}{n}$.

Corrigé 55 Remarquons que la transformée de Laplace d'une variable aléatoire binomiale de paramètres (n,p) est $L_X(s) = (pe^s + q)^n$, où $q = 1-p$. On en déduit que si $L_X(s) = \left(\frac{e^s+2}{3}\right)^5$, alors X est une variable aléatoire binomiale de paramètres $p = 1/3$ et $n = 5$. La probabilité recherchée est $P(X = 1) = C_n^1 pq^{n-1} = npq^{n-1} = 5 \cdot \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \approx 0.33$.
Remarque: On obtient le même résultat en prenant le coefficient de $\left(\frac{e^s+2}{3}\right)^5$ qui correspond à $P(X = 1)$.

Corrigé 56 La distribution de X est donnée par

$$P(X = n) = p(1-p)^{n-1},$$

et sa transformée de Laplace $L_X(s)$ vaut

$$L_X(s) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-sn} p(1-p)^{n-1} = \frac{pe^{-s}}{1 - e^{-s(1-p)}}.$$

Le premier moment est donné par $-\frac{dL_X(s)}{ds}$ évalué en $s = 0$,

$$E(X) = \frac{1}{p}.$$

Le deuxième moment est donné par la deuxième dérivée de $L_X(s)$ évalué en $s = 0$ et vaut

$$E(X^2) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}.$$

Corrigé 57 Commençons par calculer la distribution de X. Pour k entier ≥ 0 fixé, on a:

$$\begin{aligned}
P\{X = k\} &= \sum_{n \geq k} P\{X = k | Z = n\} P\{Z = n\} \\
&= \sum_{n \geq k} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n \geq k} C_n^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^{n-k}}{n!} \frac{k!(n-k)!}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{n \geq k} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= e^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{(1-p)\lambda} \\
&= e^{-p\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \quad ,
\end{aligned}$$

X est donc poissonienne de paramètre $p\lambda$.
Ensuite, pour l entier ≥ 0 fixé:

$$\begin{aligned}
P\{Y=l\} &= \sum_{n\geq l} P\{Y=l|Z=n\}P\{Z=n\} \\
&= \sum_{n\geq l} P\{X=n-l|Z=n\}P\{Z=n\} \\
&= \sum_{n\geq l} C_n^l p^{n-l}(1-p)^l e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
&= e^{-(1-p)\lambda}\frac{((1-p)\lambda)^l}{l!} \quad ,
\end{aligned}$$

Y est aussi poissonienne de paramètre $(1-p)\lambda$. Enfin:

$$\begin{aligned}
\forall k,l \quad , \quad P\{X=k \quad et \quad Y=l\} &= \sum_{n\geq 0} P\{X=k \quad et \quad Y=l|Z=n\}P\{Z=n\} \\
&= P\{X=k \quad et \quad Y=l|Z=k+l\}P\{Z=k+l\} \\
&= C_{k+l}^k p^k(1-p)^l e^{-\lambda}\frac{\lambda^(k+l)}{l!} \\
&= e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-(1-p)\lambda}\frac{((1-p)\lambda)^l}{l!} \quad ,
\end{aligned}$$

X et Y sont bien indépendantes.

Corrigé 58 **a)** $f_X(x) \geq 0$, $-\infty < x < \infty$ et

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\sigma dy = \frac{\sqrt{2\pi}\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma} = 1,$$

où on a fait le changement de variable $y = (x-m)/\sigma$.

b)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma y+m)}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\sigma dy = 0 + m = m.$$

c)

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}} dx - m^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\sigma y+m)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\sigma dy - m^2 \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m^2 + 2\sigma m y + (\sigma y)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}\sigma dy - m^2 = m^2 + 0 + \sigma^2 - m^2 = \sigma^2.
\end{aligned}$$

Corrigé 59 **a)** $f_X(x) \geq 0$ pour $-\infty < x < \infty$ et

$$\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}|_0^{\infty} = 1, \qquad \text{pour } \lambda > 0.$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda},$$

$$Var(X) = \int_0^{\infty} \lambda x^2 e^{-\lambda x} dx - \frac{1}{\lambda^2} = \ldots = \frac{1}{\lambda^2}$$

b) La fonction de répartition de X, $F_X(x)$, est donnée par

$$F_X(x) = P(X < x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy = 1 - e^{-\lambda x};$$

$$P(X \geq x+y | X \geq y) = \frac{P(X \geq x+y)}{P(X \geq x)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = 1 - F_X(x) = P(X \geq x).$$

Corrigé 60

$$E(X) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{b+a}{2},$$

$$Var(X) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \ldots = \frac{(b-a)^2}{12},$$

$$E\left(e^{iuX}\right) = \frac{e^{iub} - e^{iua}}{iu(b-a)}.$$

Corrigé 61 Soit X la variable aléatoire de la taille d'un homme âgé de 25 ans.

$$P(X > 185) \simeq 4,78\,\%$$

et

$$P(X > 192 | X > 180) = \frac{P(X > 192)}{P(X > 180)} \simeq 1,14\,\%.$$

Corrigé 62 Soit X le nombre de kilomètres couverts par une batterie de voiture avant défaillance.

$$P(X < 5000) = \int_0^{5000} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda\, 5000} = 1 - e^{-\frac{1}{2}}.$$

Corrigé 63 Il faut d'abord calculer c. Pour que f soit une densité on doit avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = 1$, c'est–à–dire

$$c = \frac{1}{\int_0^\infty x\exp(-x/2)\mathrm{d}x}.$$

On fait une intégration par parties et on obtient

$$\int_0^\infty x\exp(-x/2)\mathrm{d}x = -2x\exp(-x/2)\big|_0^\infty + 2\int_0^\infty \exp(-x/2)\mathrm{d}x = 4,$$

donc c=1/4. Par conséquent la probabilité que le système fonctionne au moins 5 mois est égale à

$$\int_5^\infty \frac{x}{4}\exp(-x/2)\mathrm{d}x = -\exp(-x/2)\big|_5^\infty - \frac{1}{2}x\exp(-x/2)\big|_5^\infty = e^{-5/2} + \frac{5}{2}e^{-5/2} \cong 0.287.$$

Addendum: notez que, si $T = T_1 + T_2$, T_1 et T_2 des variables aléatoires indépendantes avec distribution exponentielle et espérance $1/\lambda$, alors la densité f_T de T est

$$f_T(t) = \lambda^2 \int_0^t \exp\{-\lambda(t-s)\}\exp\{-\lambda s\}\mathrm{d}s = \lambda^2 t\exp(-\lambda t),$$

et la variable X a la même ditribution que T si $\lambda = 1/2$. On peut donc imaginer que chaque cellule interchangeable ait une distribution de temps de vie du type exponentiel avec moyenne 2.

Corrigé 64 On doit trouver a tel que $\int_{-\infty}^\infty f(x)\mathrm{d}x = 1$. Donc

$$a = \frac{1}{\int_0^\infty x^2\exp(-bx^2)\mathrm{d}x}.$$

Si on fait le changement de variable $y/\sqrt{2b} = x$ on obtient

$$\int_0^\infty x^2\exp(-bx^2)\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{\sqrt{2b}}\right)^3 \int_0^\infty y^2\exp(-y^2/2)\mathrm{d}y = \left(\frac{1}{\sqrt{2b}}\right)^3 \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y^2}{2\pi}\exp(-y^2/2)\mathrm{d}y.$$

La dernière intégrale est égale à 1 (c'est la variance d'une variable normale standard) et donc

$$a = \frac{4}{\sqrt{\pi}}b^{3/2}.$$

Corrigé 65 Soit $\mathcal{P}$ l'événement "la pièce acheté est pirate" et $\mathcal{O}$ l'événement "la pièce acheté est originale". On a alors

$$\begin{aligned} \pi(t) = P(\mathcal{P}|T > t) &= \frac{P(T > t|\mathcal{P})P(\mathcal{P})}{P(T > t)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}e^{-5t}}{\frac{1}{4}e^{-5t} + \frac{3}{4}e^{-2t}} \\ &= \frac{1}{1 + 3e^{3t}} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\lim_{t\to\infty} \pi(t) = \lim_{t\to\infty} P(\mathcal{P}|T > t) = 0$$

Corrigé 66 **a)** Soit I_A le temps quand le coiffeur A a commencé a couper le cheveux du premier client. On sait que I_A est une variable aléatoire uniforme dans l'intervalle $[-30, 0]$. Alors,

$$P(I_A > -x) = \begin{cases} x/30 & \text{si} \quad x \in [0, 30] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [0, 30] \end{cases}$$

Soit F_A le temps quand le coiffeur A est libre pour s'occuper du client suivant. Étant donné que chaque coupe dure 30 minutes, on a que

$$F_A - I_A = 30$$

Alors, la probabilité que, t minutes après que le client B soit entré, le coiffeur A soit encore occupé avec le même client est

$$P(F_A > t) = P(30 + I_A > t) = P(I_A > t - 30) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \le 0 \\ \frac{30-t}{30} & \text{si} \quad 0 < t < 30 \\ 0 & \text{si} \quad t \ge 30 \end{cases}$$

b) Soient A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6 les coiffeurs. Soient F_i le temps quand le coiffeur A_i est libre pour s'occuper du client suivant, où $1 \le i \le 6$. Le temps d'attente du client qui vient d'arriver est la variable aléatoire T définie par

$$T := \min_{\pi\in\mathcal{P}} \max\{F_{\pi_1}, F_{\pi_2}, F_{\pi_3}, F_{\pi_4}\}$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble de possibles permutations des nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6$ (par exemple, $\pi_1 = 2, \pi_2 = 4, \pi_3 = 3, \pi_4 = 6, \pi_5 = 1$ et $\pi_6 = 5$ est une permutation qui appartient à $\mathcal{P}$). Alors, la fonction répartition de T est donnée pour $0 \le t \le 30$ par

$$\begin{aligned} P(T \le t) &= P(T_1 \le t, T_2 \le t, T_3 \le t, T_4 \le t, T_5 \le t, T_6 \le t) \\ &+ C_6^1 P(T_1 \le t, T_2 \le t, T_3 \le t, T_4 \le t, T_5 \le t, T_6 > t) \\ &+ C_6^2 P(T_1 \le t, T_2 \le t, T_3 \le t, T_4 \le t, T_5 > t, T_6 > t) \\ &= \left(\frac{t}{30}\right)^6 + 6\left(\frac{t}{30}\right)^5 \frac{30 - t}{30} + 15\left(\frac{t}{30}\right)^4 \left(\frac{30 - t}{30}\right)^2 \end{aligned}$$

Remarquons que $P(T \le t) = 0$ si $t \le 0$ et $P(T \le t) = 1$ si $t \ge 30$.

c) De la formule $E(T) = \int_0^{30} P(T > t)dt$ on obtient,

$$\begin{aligned} E(T) &= 30 - \frac{30}{7} - 6\left(\frac{30}{6} - \frac{30}{7}\right) - 15\left(\frac{30}{5} - 10 + \frac{30}{7}\right) \\ &= 30 - \frac{90}{7} \\ &\approx 17.14 \end{aligned}$$

Corrigé 67 a) Nous avons:

$$\begin{aligned} P(T > t) &= P(\text{aucun événement dans } [0,t]) \\ &= P[X(t) = 0] = e^{-\lambda t}\frac{(-\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Il s'en suit que la fonction de répartition de T est

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - e^{-\lambda t} \qquad (t \geq 0).$$

Donc la densité de probabilité de T est:

$$f(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t} \qquad (t \geq 0) \;\; \text{(distribution exponentielle).}$$

b) De même, calculons tout d'abord (pour $0 < t < t_1$):

$$\begin{aligned} P[T > t | X(t_1) = 1] &= \frac{P[T > t, X(t_1) = 1]}{P[X(t_1) = 1]} \;\; \text{(déf. proba. conditionnelle)} \\ &= \frac{P[X(t) = 0, X(t_1) = 1]}{P[X(t_1) = 1]} \\ &= \frac{P\left[\text{aucun événement dans } [0,t) \text{ et 1 seul événement dans } (t,t_1]\right]}{P[X(t_1) = 1]} \\ &= \frac{P[X(t) = 0, X(t_1 - t) = 1]}{P[X(t_1) = 1]} \\ &= \frac{P[X(t) = 0] \cdot P[X(t_1 - t) = 1]}{P[X(t_1) = 1]} \;\; (X(t) \text{ est à accroissements indépendants}) \\ &= \frac{e^{-\lambda t} \cdot e^{-\lambda(t_1 - t)}\lambda(t_1 - t)}{e^{-\lambda t_1}(\lambda t_1)} \\ &= 1 - \frac{t}{t_1} \qquad (0 < t < t_1), \end{aligned}$$

d'où

$$F(t) = 1 - P[T > t | X(t_1) = 1] = \frac{t}{t_1}$$

et

$$f(t) = \frac{1}{t_1} \qquad (0 < t < t_1) \;\; \text{(distribution uniforme).}$$

Corrigé 68 Soient $0 \leq u \leq t$, $v \geq 0$. On a:

$$\begin{aligned} P\{A_t \geq u, B_t \geq v\} &= P\{N_{t+v} - N_{t-u} = 0\} && (12) \\ &= P\{N_{v+u} = 0\} \text{ (par homogénéité des accroissements)} && (13) \\ &= e^{-\lambda(v+u)} && (14) \\ &= e^{-\lambda v}e^{-\lambda u} && (15) \end{aligned}$$

et:

$$\begin{aligned} P\{B_t \geq v\} &= P\{N_{t+v} - N_t = 0\} = e^{-\lambda v} && (16) \\ P\{A_t \geq u\} &= P\{N_t - N_{t-u} = 0\} = e^{-\lambda u} \text{ (car } 0 \leq u \leq t). && (17) \end{aligned}$$

D'autre part:

$$\begin{aligned} P\{A_t \geq u\} &= 0 \text{ si } u > t && (18) \\ &= 1 \text{ si } u \leq 0. && (19) \end{aligned}$$

Donc: B_t suit une loi exponentielle de paramètre λ, A_t a même loi que $\min(S_1, t)$ (S_1 étant le temps d'occurence du premier événement), et A_t et B_t sont indépendants.

Corrigé 69 Tout d'abord remarquons que

$$P(\min(X_1,\dots,X_n)\geq t)=P(X_1\geq t,\dots,X_n\geq t)=P(X_1\geq t)^n$$

Mais $P(X_1\geq t)=e^{-t\lambda}$. D'où

$$P(\min(X_1,\dots,X_n)\geq t)=e^{-tn\lambda}$$

On en déduit que $\min(X_1,\dots,X_n)$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre λn.

Corrigé 70 On regarde pour $y\in\mathbf{R}$

$$P(Y\leq y)=\int_{-\infty}^{y} f_Y(z)\mathrm{d}z. \tag{1}$$

Du fait que la fonction logarithme soit inversible (elle est strictemement croissante), on peut écrire

$$P(Y\leq y)=P(\log X\leq y)=P(X\leq \exp(y))=\int_0^{\exp(y)}\exp(-x)\mathrm{d}x.$$

On fait le changement de variable $z=\log x$ et on obtient

$$P(Y\leq y)=\int_{-\infty}^{y}\exp(z)\exp(-\exp(z))\mathrm{d}z, \tag{2}$$

et on s'aperçoit en regardant (1) et (2) que

$$f_Y(z)=\exp\{z-\exp(z)\}.$$

Corrigé 71 D'abord on observe que $f_Z(z)=0$ pour $z<0$. Pour $z\geq 0$ on écrit

$$\int_0^z f_Z(r)\mathrm{d}r=P(\sqrt{X^2+Y^2}\leq z)=\int_{\{(x,y):\sqrt{x^2+y^2}\leq z\}}\frac{1}{(\sqrt{2\pi})^2}\exp\left(-x^2/2\right)\exp\left(-y^2/2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

où, pour la derniére égalité, on a utilisé le fait que X et Y sont indépendantes. Si on utilise les coordonées polaires ($r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\tan\theta=y/x$) on obtient

$$\int_0^z f_Z(r)\mathrm{d}r=\int_0^z r\exp(-r^2/2)\mathrm{d}r.$$

Donc $f_Z(z)=z\exp(-z^2/2)$ pour $z\geq 0$. La fonction de répartition est

$$P(Z\leq z)=1-\exp(-z^2/2),$$

si $z\geq 0$ et $P(Z\leq z)=0$ si $z<0$.

Corrigé 72 Tout d'abord nous calculerons la loi de Y. C'est-à-dire,

$$\begin{aligned}P(Y\geq x)&=P(X\geq \ln x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\ln x}^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}\frac{1}{y}dy\end{aligned}$$

où dans la dernière égalité on a fait le changement de variable $y\to\ln y'$. On en déduit que la densité de la loi de Y est

$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\ln y)^2}{2}}\frac{1}{y} & \text{si}\quad y\geq 0\\ 0\quad \text{si}\quad y<0\end{cases}$$

Corrigé 73 a) Soit $f(x)$ la densité de X et $f(y)$ la densité de Y. Remarquons que

$$f(y)=\int_0^{\infty}f(x,y)dx=\left.\frac{xe^{-x(1+y)}}{-(1+y)}\right|_0^{\infty}+\left.\frac{e^{-x(1+y)}}{-(1+y)^2}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{(1+y)^2}$$

On en déduit que Y a une loi donnée par $P(Y<a)=\frac{a}{1+a}$. D'autre part,

$$f(x)=\int_0^{\infty}f(x,y)dy=e^{-x}$$

On en déduit que X est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1. X et Y ne sont pas indépendantes parce que $f(x,y)\neq f(x)f(y)$.

b) Soit $f(x)$ la densité de X et $f(y)$ la densité de Y. Remarquons que

$$f(x) = \int_0^{1-x} f(x,y)dy = 60x \int_0^{1-x} y^2 dy = 20x(1-x)^3$$

D'autre part,

$$f(y) = \int_0^{1-y} f(x,y)dx = 60y^2 \int_0^{1-y} xdx = 30y^2(1-y)^2$$

X et Y ne sont pas indépendantes parce-que $f(x,y) \neq f(x)f(y)$.

Corrigé 74 a) $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

b) $X+Y$ suit une loi normale de paramètres $(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1 + \sigma_2)$.

Corrigé 75 Soient a_1, a_2 les valeurs qui sont prises par X, et b_1, b_2 les valeurs qui sont prises par Y. Sans perte de généralité on peut supposer que $a_1 \neq a_2$ et que $b_1 \neq b_2$ (autrement une des variables aléatoires X ou Y est une constante). On définit les variables aléatoires $X' = \frac{X-a_2}{a_2-a_1}$ et $Y' = \frac{Y-b_2}{b_2-b_1}$. Remarquons que X' et Y' prennent les valeurs 1 et 0. D'autre part,

$$\begin{aligned}
E(X'Y') &= \frac{1}{(a_1-a_2)(b_1-b_2)}\left(E(XY) + a_2b_2 - E(X)b_2 - a_2E(Y)\right) \\
&= \frac{1}{(a_1-a_2)(b_1-b_2)}\left(E(X)E(Y) + a_2b_2 - E(X)b_2 - a_2E(Y)\right) \\
&= E(X')E(Y')
\end{aligned}$$

Mais $E(X'Y') = P(X'=1, Y'=1)$, $E(X') = P(X'=1)$ et $E(Y') = P(Y'=1)$. On en déduit que

$$P(X'=1, Y'=1) = P(X'=1)P(Y'=1)$$

En plus, $P(X'=1, Y'=0) = P(X'=1) - P(X'=1, Y'=1)$. De l'égalité ci-dessus on déduit que

$$P(X'=1, Y'=0) = P(X'=1)P(Y'=0)$$

Similairement on peut montrer que

$$P(X'=0, Y'=0) = P(X'=0)P(Y'=0)$$

et que

$$P(X'=0, Y'=1) = P(X'=0)P(Y'=1)$$

On en déduit que X' et Y' sont des variables aléatoires indépendantes. Du fait que $\{X'=1\} = \{X=a_1\}$, $\{X'=0\} = \{X=a_2\}$, $\{Y'=1\} = \{Y=b_1\}$ et $\{Y'=0\} = \{Y=b_2\}$, on conclut que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

Corrigé 76 On a pour tout réel z :

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= F_X(z)F_Y(z), \\
F_{\tilde{Z}}(z) &= 1 - (1-F_X(z))(1-F_Y(z)) = F_X(z) + F_Y(z) - F_X(z)F_Y(z).
\end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= f_X(z)F_Y(z) + F_X(z)f_Y(z), \\
f_{\tilde{Z}}(z) &= f_X(z)(1-F_Y(z)) + f_Y(z)(1-F_X(z)).
\end{aligned}$$

Corrigé 77 a) Pour k entier ≥ 0 :

$$\begin{aligned}
P\{Z=k\} &= \sum_{l=0}^{k} P\{X=l \quad et \quad Y=(k-l)\} \\
&= \sum_{l=0}^{k} P\{X=l\}P\{Y=(k-l)\} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{l=0}^{k} \frac{{\lambda_1}^l}{l!} \frac{{\lambda_2}^{(k-l)}}{(k-l)!} \\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{l=0}^{k} k! \times \frac{{\lambda_1}^l}{l!} \frac{{\lambda_2}^{(k-l)}}{(k-l)!} \\
&= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!} \quad ,
\end{aligned}$$

Z est encore poissonienne, de paramètre $(\lambda_1 + \lambda_2)$.

b) Tout d'abord, dans le cas où $\mu_1 = \mu_2 = 0$ et ${\sigma_1}^2 = {\sigma_2}^2 = 1$, on a:

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad P\{Z \leq z\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\{\int_{-\infty}^{(z-x)} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\}dx$$

et la densité de Z vaut:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}P\{Z \leq z\} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-\frac{(z-x)^2}{2}}dx \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2+zx}dx \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-z/2)^2}{2\times 1/2}+zx}dx \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{2\pi} \times \sqrt{\pi} \\
&= \frac{e^{-\frac{z^2}{4}}}{2\sqrt{\pi}} \quad ,
\end{aligned}$$

Z est encore gaussienne centrée, de variance 2. Dans le cas général, on effectue les changements de variable: $\sigma_1\xi + \mu_1 = x, \sigma_2\eta + \mu_2 = y$ puis le calcul précédent pour trouver que Z est encore gaussienne, d'espérance $\mu_1 + \mu_2$ et de variance ${\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2$.

c) Dans le cas présent:

$$\begin{aligned}
\forall t \geq 0, \quad P\{Z \leq t\} &= \lambda_1\lambda_2\int_0^t e^{-\lambda_1 u}\{\int_0^{t-u} e^{-\lambda_2 v}dv\}du \\
&= \lambda_1\int_0^t e^{-\lambda_1 u}(1 - e^{-\lambda_2(t-u)})du \\
&= (1 - e^{-\lambda_1 t}) - \lambda_1 e^{-\lambda_2 t}\int_0^t e^{(\lambda_2-\lambda_1)u}du \\
&= (1 - e^{-\lambda_1 t}) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}) \quad \text{si} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \\
\text{ou} \quad & 1 - (1 + \lambda t)e^{-\lambda t} \quad \text{si} \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda.
\end{aligned}$$

Corrigé 78 a) Rappelons que:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}_Z(t) = E[e^{tZ}] = E[e^{tX}e^{tY}] = E[e^{tX}]E[e^{tY}] \quad \text{(par ind.)} \quad .$$

Or:

$$\mathcal{L}_X(t) = e^{-\lambda_1}\sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}\frac{{\lambda_1}^k}{k!} = e^{-\lambda_1}e^{\lambda_1 e^t} = \exp(\lambda_1(e^t - 1)) \quad .$$

Ainsi: $\mathcal{L}_Z(t) = \exp(\lambda_1(e^t - 1))\exp(\lambda_2(e^t - 1)) = \exp((\lambda_1 + \lambda_2)(e^t - 1))$,

on retrouve le fait que Z est poissonienne de paramètre $(\lambda_1 + \lambda_2)$.

b) Rappelons que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(t) &= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2{\sigma_1}^2}}dx \\
&= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2{\sigma_1}^2}(x-({\sigma_1}^2 t+\mu_1))^2}e^{-\frac{1}{2{\sigma_1}^2}({\mu_1}^2-({\sigma_1}^2 t+\mu_1)^2)}dx \\
&= e^{\frac{{\sigma_1}^2}{2}t^2+\mu_1 t},
\end{aligned}$$

donc:

$$\mathcal{L}_Z(t) = \mathcal{L}_X(t)\mathcal{L}_Y(t) = e^{\frac{{\sigma_1}^2+{\sigma_2}^2}{2}t^2+(\mu_1+\mu_2)t} \quad ,$$

on retrouve le fait que Z est gaussienne de paramètres $(\mu_1 + \mu_2)$ et $({\sigma_1}^2 + {\sigma_2}^2)$.

c) Dans le cas d'une variable exponentielle:

$$\forall 0 < t < \lambda_1, \quad \mathcal{L}_X(t) = \int_0^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} e^{tu} du = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - t} \quad ,$$

d'où:

$$\forall 0 < t < min(\lambda_1, \lambda_2), \quad \mathcal{L}_Z(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - t} \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - t} \quad .$$

Plus généralement, si X est une variable Γ de paramètres α_1 et β_1 alors:

$$\forall 0 < t < \beta_1, \mathcal{L}_X(t) = \frac{{\beta_1}^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{+\infty} u^{\alpha_1 - 1} e^{(t-\beta_1)u} du = (\frac{\beta_1}{\beta_1 - t})^{\alpha_1} \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{+\infty} v^{\alpha_1 - 1} e^{-v} dv = (\frac{\beta_1}{\beta_1 - t})^{\alpha_1},$$

on voit que la somme de deux variables Γ indépendantes redonne une variable Γ seulement si $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, de paramètres β et $\alpha_1 + \alpha_2$.
En particulier: la somme de deux variables exponentielles indépendantes de même paramètre λ est une variable Γ de paramètres $\beta = \lambda$ et $\alpha = 2$.

Corrigé 79 a) X et Y sont dépendantes et (par symétrie) de corrélation nulle.

b)

$$f(x) = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - x^2},$$

pour $-1 \leq x \leq 1$. De même

$$g(y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1 - y^2},$$

pour $-1 \leq y \leq 1$.

c) $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ par symétrie.

d)

$$P(X < 0 | X < Y) = \frac{P(X < 0; X < Y)}{P(X < Y)} = \frac{3/8}{1/2} = \frac{3}{4}.$$

Corrigé 80 a) Puisque que $Y = \ln X$ on a

$$E(Y) = \int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - x|_0^1 = -1,$$

et

$$\mathrm{var}(Y) = E\left(Y^2\right) - (E(Y))^2 = \left[\int_0^1 (\ln x)^2 \mathrm{d}x\right] - 1 = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x|_0^1 - 1 = 1.$$

b) On observe que la fonction ln est strictement croissante et donc

$$P\left(Z < 10^{-40}\right) = P\left(\ln Z < -40 \ln 10\right),$$

et que, si on pose $Y_i = \ln X_i$, on obtient

$$\ln Z = \sum_{i=1}^{100} Y_i,$$

c'est–à–dire $\ln Z$ est la somme de 100 variable indépendentes avec la même distribution (et on a calculé en (a) l'espérance et la variance de Y_i). On va donc faire une approximation gaussienne en remplaçant $\ln Z$ par la variable W de loi

$$N\left(-100, 100\right).$$

Finalement on obtient

$$P\left(Z < 10^{-40}\right) \cong P\left(W < -40 \ln 10\right) = P\left(\frac{W - E(W)}{\sqrt{\mathrm{var}(W)}} < \frac{-40 \ln 10 + 100}{10}\right) \cong \Phi(0.790) \cong 0.78$$

Corrigé 81 **a)** X a pour transformée de Laplace la fonction $\mathcal{L}_X$ définie sur R par: $\mathcal{L}_X(t) = t^2/2$.
Ainsi: $E(Y) = \mathcal{L}_X(1) = 1/2$, $E(Y^2) = \mathcal{L}_X(2) = 2$ et:
$Var(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 7/4$.

b) Si $t \leq 0$: $P\{Y \leq t\} = 0$,
si $t > 0$: $P\{Y \leq t\} = P\{X \leq \log t\} = \Phi(\log t)$.
La fonction de densité de Y est donc telle que:

$$f_Y(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{e^{-(\log t)^2/2}}{t\sqrt{2\pi}}, & t > 0. \end{cases}$$

Corrigé 82 Soit X le nombre de contrats placés par le représentant. X suit une loi binomiale de paramètre $n = 1000$ et $p = 0,04$. La probabilité $P(X > 30)$ est donnée par

$$1 - P(X \leq 30) = \sum_{i=0}^{30} 0,04^i 0,96^{1000-i} C_{1000}^i \simeq 0,942.$$

La somme de l'expression précédente étant un peu longue, on peut approximer la loi binomiale par une loi normale de moyenne $1000 \cdot 0,04 = 40$ et de variance $1000 \cdot 0,04 \cdot 0,96 = 38,4$, d'où

$$P(X > 30) \simeq P\left(Y > \frac{30 - 40}{\sqrt{38,4}}\right) \simeq 0,947,$$

où Y est une variable aléatoire normale centrée réduite et où le résultat de l'intégrale s'obtient à l'aide d'une table.
Remarque: Bien que $np = 40$, on peut aussi essayer d'approximer cette binomiale par une loi de Poisson, dans ce cas, on trouve $P(X > 30) \simeq 0,938$.

Corrigé 83 Le nombre d'erreurs d'impression X dans une page déterminée est distribué $B(n = 450, p = 1/350)$, d'où

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = \sum_{i=0}^{2} C_{450}^i \left(\frac{1}{350}\right)^i \left(\frac{349}{350}\right)^{450-i} \simeq 0,14.$$

On peut aussi faire l'approximation de cette binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np \simeq 1.29$ et on obtient alors

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \lambda^2/2\right) \simeq 0,14.$$

Corrigé 84 Soit X le nombre de boules noires tirées, on a

$$P(X = 3) = \frac{C_{400}^3 C_{600}^2}{C_{1000}^5} \simeq 0,23059.$$

Une valeur approchée de ce résultat peut se calculer en utilisant l'approximation par une loi binomiale de paramètre $n = 5$ et $p = 400/1000$, dans ce cas on obtient

$$P(X = 3) \simeq C_5^3 0.4^3 0.6^2 = 0,2304.$$

Corrigé 85 **a)** Comme X est une variable aléatoire positive:

$$P\{X > 85\} \leq E(\frac{X}{85}) = \frac{75}{85} \cong 0,88$$

b) Remarquons tout de suite que la connaissance du 2ème moment de X permet d'améliorer la majoration précédente:

$$P\{X > 85\} = P\{X^2 > 85^2\} \leq \frac{1}{85^2}E(X^2) = \frac{\sigma^2 + E(X)^2}{85^2} = \frac{25 + 75^2}{85^2} \cong 0,78$$

On a aussi:

$$P\{65 \leq X \leq 85\} = P\{|X - E(X)| \leq 10\} = 1 - P\{|X - E(X)| > 10\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{10^2} = 3/4$$

c) Puisque les notes de chacun des n étudiants sont des variables indépendantes, leur moyenne arithmétique

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

est encore d'espérance 75, et sa variance vaut $\frac{1}{n^2}(n.25) = 25/n$; on a ensuite:

$$P\{|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)| \leq 5\} = 1 - P\{|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)| > 5\} \geq 1 - \frac{25/n}{25} = \frac{n-1}{n},$$

avec 10 étudiants notre probabilité vaut au moins $0,9$.

d) Voyons s'il est pertinent d'utiliser le T.C.L.:

$$P\{|\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)| \leq 5\} \cong \int_{-5}^{5} \varphi_{Y_n}(y)dy = \int_{\frac{-5}{\sqrt{25/n}}}^{\frac{5}{\sqrt{25/n}}} \varphi_Y(y)dy$$

(où Y_n est normale centrée de variance $25/n$ et Y normale centrée réduite:

$$\varphi_{Y_n}(y) = \frac{1}{\sqrt{25/n}\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-ny^2}{50}}, \varphi_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-y^2}{2}}).$$

Le nombre minimum d'étudiants obtenu est cette fois $n = 3$, un résultat franchement différent!

Corrigé 86 Soient $x_1, x_2, ..., x_{50}$ les nombres à approcher et $U_1, U_2, ..., U_{50}$ les variables d'erreur correspondantes. La variable $\sum_{k=1}^{50} U_k$ est centrée, de variance $50 \times 1/12$ (par indépendance). On a donc pour $X_i = x_i + U_i$:

$$P\{|\sum_{k=1}^{50} X_k - \sum_{k=1}^{50} x_k| > 3\} \cong 2 \times \int_{\frac{3}{\sqrt{50/12}}}^{\infty} \varphi_Y(y)dy \cong 0,144$$

Corrigé 87 Soit T la variable aléatoire de durée de vie du système; T suit approximativement une loi normale d'espérance $100 \times 5 = 500$ et de variance $\sigma^2 = 100 \times 25 = 2500$ (d'après l'indépendance des variables de durée de vie de chaque ampoule). On a donc:

$$P\{T > 525\} \cong \int_{\frac{525-500}{\sqrt{2500}}}^{\infty} \varphi_Y(y)dy \cong 0,31$$

Corrigé 88 On approxime le nombre de six obtenu lors de 120 jets par une variable alétoire X normale de moyenne $\mu = 120 \cdot 1/6 = 20$ et de variance $\sigma^2 = 120 \cdot 1/6 \cdot 5/6 \simeq 16,7$. La probabilité d'avoir moins de 16 fois le nombre six est alors donné par

$$P(X < 15,5) = P(Y < \frac{15,5-\mu}{\sigma}) = P(Y < 1,1) \simeq 0,135,$$

où Y est une variable aléatoire normale centrée réduite.

Corrigé 89 On utilise l'inégalité de Chebychev. On a pour un instant t fixé: $E(N_t) = \lambda t = Var(N_t)$ puis:

$$E(\frac{N_t}{t}) = \lambda, Var(\frac{N_t}{t}) = \frac{\lambda}{t}$$

et donc:

$$\forall \epsilon > 0, P\{|\frac{N_t}{t} - \lambda| > \epsilon\} \leq \frac{\lambda}{\epsilon t},$$

d'où le résultat.

Corrigé 90 On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(Y_n = k) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k} \\
&= e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k}
\end{aligned}$$

Où on a employé le fait que pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$. Mais,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-k)!}\frac{1}{n^k} = 1$$

Alors,

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Corrigé 91 a) Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Supposons que $E(X_1) = 0$ et que $E(X_1^2) = 1$. Alors,

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots X_n}{\sqrt{n}}$$

converge en distribution vers une variable alétoire gaussienne centrée réduite.

b) Soit X le nombre de faces obtenus. X est égal à la somme de 500 variables aléatoires indépendentes de Bernoulli de paramètre 1/2. X est donc une v.a. binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 1/2$. Son espérance et sa variance valent donc

$$m := E(X) = np = 500 \cdot \frac{1}{2} = 250$$

et

$$\sigma^2 := Var(X) = np(1-p) = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 125$$

Y étant une variable gaussienne centrée réduite, on a ensuite

$$\begin{aligned} P(250 - 10 \le X \le 250 + 10) &= P(240 \le X \le 260) \\ &\approx P\left(\frac{240 - m}{\sigma} \le Y \le \frac{260 - m}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{-10}{11,18} \le Y \le \frac{10}{11,18}\right) \\ &= P(-0,894 \le Y \le 0,894) \\ &= 2 \cdot P(0 \le Y \le 0,894) \\ &= 2 \cdot 0,314 \\ &= 0,628 \end{aligned}$$

Corrigé 92 En 25 journées de travail, 625 armoires sont produites; à chacune d'entre elles correspond une variable de Bernoulli X_i de paramètre $p = 0,95$, prenant la valeur 1 si l'armoire est sans défaut, 0 sinon. Ces variables aléatoires sont indépendantes, leur somme a pour moyenne:
$E(\sum_{i=1}^{625} X_i) = 625 \times 0,95 = 593,75$
et pour variance: $Var(\sum_{i=1}^{625} X_i) = \sum_{i=1}^{625} Var(X_i) = 625 \times 0,95 \times 0,05 = 29,6875$.
En appliquant le Théorème Central Limite et en effectuant une correction de continuité, on obtient:

$$\begin{aligned} P\{X_1 + ... + X_{625} \ge 600\} &= P\{X_1 + ... + X_{625} > 599\} \\ &= P\{X_1 + ... + X_{625} > 599,5\} \\ &= P\{\frac{X_1 + ... + X_{625} - 593,75}{\sqrt{29,6875}} > \frac{599,5 - 593,75}{\sqrt{29,6875}}\} \\ &\cong P\{Z > 1,0553\}, \end{aligned}$$

où Z est une variable normale centrée réduite.
La lecture des tables donne ensuite: $P\{X_1 + ... + X_{625} \ge 600\} \cong 0,85$.

Corrigé 93 a) Avec n mesures, l'intervalle de confiance à 90% pour m est:

$$[\overline{X_n} - \frac{\sigma\Phi_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}; \overline{X_n} + \frac{\sigma\Phi_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}]$$

($\overline{X_n}$ étant la moyenne arithmétique des n mesures).
Pour diminuer de moitié la longueur de cet intervalle de confiance à 90% pour m, il faut donc quadrupler le nombre de mesures effectuées, autrement dit effectuer 75 mesures supplémentaires.

b) Pour $\alpha' = 0,05$, le quantile $\Phi_{\alpha'/2}$ de la loi normale centrée réduite est : $\Phi_{0,025} \simeq 1,95$.
Pour obtenir un intervalle de confiance à 95% pour m ayant la même longueur, il faut donc un nombre n' de mesures qui soit tel que: $\sqrt{n'} \simeq \frac{\sqrt{n}.1,95}{1,65} = \frac{5.1,95}{1,65} \simeq 5,909$, soit 11 mesures supplémentaires.

Corrigé 94 a) On sait que: $\frac{\sqrt{6}(\hat{m}_X - m_1)}{\hat{\sigma}_X}$ suit une loi de Student à 5 degrés de liberté.
On a ensuite:

$$\begin{aligned}
P\{\hat{m}_X - a \leq m_1 \leq \hat{m}_X + a\} &= P\{|\hat{m}_X - m_1| \leq a\} \\
&= P\{m_1 - a \leq \hat{m}_X \leq m_1 + a\} \\
&= P\{\frac{\sqrt{6}}{\hat{\sigma}_X}.(-a) \leq \frac{\sqrt{6}}{\hat{\sigma}_X}.(\hat{m}_X - m_1) \leq \frac{\sqrt{6}}{\hat{\sigma}_X}.(a)\}.
\end{aligned}$$

Cette probabilité vaut $0,95$ si: $\frac{\sqrt{6}}{\hat{\sigma}_X}.(a) \cong 2,57$. Ici: $\hat{\sigma}_x \cong 1,673$, on obtient donc: $a \cong 1,756$, puis: $I_x = [47,44; 50,96]$.
De même: $\frac{\sqrt{12}(\hat{m}_Y - m_2)}{\hat{\sigma}_Y}$ suit une loi de Student à 11 degrés de liberté, la probabilité $P\{\hat{m}_Y - a' \leq m_2 \leq \hat{m}_Y + a'\}$ vaut donc $0,95$ pour: $\frac{\sqrt{12}}{\hat{\sigma}_Y}.(a') \cong 2,2$, ainsi: $I_y = [47,29; 49,51]$.

b) $\sqrt{6}(\frac{\hat{m}_X - m_1}{\sigma_1})$ suit une loi normale centrée réduite, et:

$$P\{|\hat{m}_X - m_1| \leq a\} = P\{\frac{\sqrt{6}}{\sigma_1}.(-a) \leq \sqrt{6}(\frac{\hat{m}_X - m_1}{\sigma_1}) \leq \frac{\sqrt{6}}{\sigma_1}.(a)\},$$

vaut $0,95$ pour $\frac{\sqrt{6}}{\sigma_1}.(a) \cong 1,96$, i.e.: $a \cong 1,265$. Le nouvel intervalle de confiance à 95% pour m_1 est donc: $J_x = [47,935; 50,465]$.
Pour le deuxième échantillon, les calculs donnent: $a' \cong \frac{1,96}{2} \cong 0,98$, et le nouvel intervalle de confiance à 95% pour m_2 est donc: $J_y = [47,42; 49,38]$.

c) $(\hat{m}_X - \hat{m}_Y)$ est encore normale, d'espérance $(m_1 - m_2)$ et de variance: $\sigma_1^2/6 + \sigma_2^2/12 = 2/3$,

$$I = [(49,2 - 48,4) - 1,64.\sqrt{2/3}; (49,2 - 48,4) + 1,64.\sqrt{2/3}] = [-0,54; 2,14]$$

fournit donc un intervalle de confiance à 90% pour la différence $(m_1 - m_2)$.

Corrigé 95 1. Ici: $\hat{m} = \frac{1}{1000}(9 \times 2001 + 21 \times 2003 + ... + 3 \times 2023) \simeq 2010,73$, et $S^2 = \frac{1}{999}(9 \times (2001 - 2010,73)^2 + 21 \times (2003 - 2010,73)^2 + ... + 3 \times (2023 - 2010,73)^2) \simeq 12,81$.

2. Soit ξ une variable $\mathcal{N}(0;1)$. On a: $P\{\xi > 1,96\} \simeq 0,025, P\{\xi > 2,58\} \simeq 0,005$. L'intervalle de confiance à 95% pour la moyenne m est donc: $[\hat{m} - \frac{1,96 \times S}{\sqrt{1000}}; \hat{m} + \frac{1,96 \times S}{\sqrt{1000}}] \simeq [2010,51; 2010,95]$ et celui à 99% est: $[\hat{m} - \frac{2,58 \times S}{\sqrt{1000}}; \hat{m} + \frac{2,58 \times S}{\sqrt{1000}}] \simeq [2010,44; 2011,02]$.

Corrigé 96 a) La moyenne empirique du nombre de pièces défaillantes,

$$\overline{X} = \hat{p} = \frac{1}{500}(\#\text{pièces défaillantes})$$

fournit un estimateur sans biais du taux de défaillance p, et $\sqrt{\frac{500}{p(1-p)}}(\overline{X} - p)$ suit approximativement une loi $\mathcal{N}(0;1)$.
On a ensuite:

$$P\{p < \hat{p} - \alpha\} = P\{\alpha < \hat{p} - p\} = P\{\sqrt{\frac{500}{\hat{p}(1-\hat{p})}}\alpha < \sqrt{\frac{500}{\hat{p}(1-\hat{p})}}(\hat{p} - p)\}.$$

Comme $P\{\xi > 2,58\} \simeq 0,005$ si ξ est une variable $\mathcal{N}(0;1)$, on obtient:

$$\alpha \simeq \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{500}} \times 2,58$$

avec $\hat{p} = 28/500 = 0,056$.
Le vrai taux de défaillance p est donc situé dans l'intervalle $[0,056 - 0,027; 1] = [0,029; 1]$ avec une probabilité de 99,5% (approximativement).

b) On ne peut donc pas rejeter l'hypothèse de non-respect de la norme de qualité de production.

Corrigé 97 a) On a pour Alain:

$$\begin{aligned} V_{(y_1,\ldots,y_n)}(\theta) &= \Pi_{i=1}^n f_\theta(y_i) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2^n}\theta^n e^{-(\sum_{i=1}^n y_i)\theta}(\prod_{i=1}^n y_i^2)\theta^{2n}, & \theta > 0 \\ 0, \quad \theta \le 0 \end{cases} \end{aligned}$$

et pour Bernard:

$$\begin{aligned} V_{(z_1,\ldots,z_m)}(\theta) &= \Pi_{i=1}^m P_{2\theta}\{z_i\} \\ &= \begin{cases} e^{-2m\theta}\frac{(2\theta)^{z_1+\ldots+z_m}}{z_1!\ldots z_m!}, & \theta > 0 \\ 0, \quad \theta \le 0 \end{cases} \end{aligned}$$

puis:

$$\forall \theta > 0, V_{(y_1,\ldots,y_n)}(\theta) = Cte \times \exp\left\{(-\sum_{i=1}^n y_i)\theta + 3n\log\theta\right\},$$

$\theta \mapsto 3n\log\theta - (\sum_{i=1}^n y_i)\theta$ atteint son maximum en

$$\hat{\theta}(y_1, ..., y_n) = \frac{3n}{\sum_{i=1}^n y_i},$$

qui est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ pour Alain.
Enfin:

$$\forall \theta > 0, V_{(z_1,\ldots,z_m)}(\theta) = Cte \times \exp\{(z_1 + ... + z_m)\log 2\theta - 2m\theta\}.$$

$V_{(z_1,\ldots,z_m)}(.)$ atteint son maximum en

$$\hat{\theta}(z_1, ..., z_m) = \frac{\sum_{i=1}^m z_i}{2m},$$

qui est l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ pour Bernard.

b) Pour $n = m$, on a donc: $\hat{\theta}(y_1, ..., y_n) = \hat{\theta}(z_1, ..., z_m)$
si et seulement si:

$$\frac{z_1 + ... + z_n}{2n} = \frac{3n}{y_1 + ... + y_n}$$

i.e. :

$$(\sum_{i=1}^n y_i) \times (\sum_{i=1}^n z_i) = 6n^2.$$

Corrigé 98 a) Soient $x_1, ..., x_{400}$ les données (≥ 0) de l'échantillon. Pour tout $k > 0$:

$$\begin{aligned} V_{x_1,\ldots,x_{400}}(k) &= \prod_{i=1}^{400} f_k(x_i) \\ &= k^{800}(\prod_{i=1}^{400} x_i)e^{-(\sum x_i)k} \\ &= Cte\exp\left\{800\log k - (\sum x_i)k\right\}, \end{aligned}$$

$k \mapsto 800\log k - (\sum x_i)k$ atteint son maximum en

$$\hat{k}_{(x_1,\ldots,x_{400})} = \frac{800}{\sum x_i} = \frac{2}{\overline{x}} = 1.$$

b) La proportion de familles économisant moins de 1000 maravedis est donc:

$$\rho = \int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e} \simeq 26\%.$$

Corrigé 99 a) On a: $P\{\rho \leq r\} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = (\frac{r}{R})^2$ si $0 \leq r \leq R$, $P\{\rho \leq r\} = 1$ si $r > R$.
La fonction de densité f_R de la variable ρ est donc nulle en dehors de l'intervalle $[0; R]$ et telle que:

$$\forall r \in [0; R], f_R(r) = \frac{2r}{R^2}.$$

b) Puisque les variables $\rho_1, ..., \rho_n$ sont indépendantes:

$$V_{\rho_1,...,\rho_n}(R) = \prod_{i=1}^{n} f_R(\rho_i).$$

On a donc

$$V_{\rho_1,...,\rho_n}(R) = \begin{cases} 0 \text{ si } 0 \leq R < \max_{1\leq i\leq n} \rho_i, \\ \frac{2^n(\prod_{i=1}^n \rho_i)}{R^{2n}} \text{ si } R \geq \max_{1\leq i\leq n} \rho_i \end{cases}$$

et la fonction de vraisemblance $V_{\rho_1,...,\rho_n}$ atteint son maximum en: $\hat{R}(\rho_1, ..., \rho_n) = \max_{1\leq i\leq n} \rho_i$.
Ensuite: $P\{(\max_{1\leq i\leq n} \rho_i) \leq r\} = (\frac{r}{R})^{2n}$, $\hat{R}$ a pour valeur moyenne:

$$E(\hat{R}) = \frac{2n}{R^{2n}} \int_0^R r \times r^{2n-1} dr = \frac{2n}{2n+1} R,$$

et: $\tilde{R}(\rho_1, ..., \rho_n) = \frac{2n+1}{2n} \max_{1\leq i\leq n} \rho_i$ fournit donc un estimateur sans biais de R.

Corrigé 100 a) Il n'est pas possible de trouver une fonction $F : \{0; 1\}^n \to \mathbf{R}$ qui soit telle que:

$$\forall p \in [0, 1], \quad E[F(X_1, X_2, ..., X_n)] = \frac{p}{1-p}.$$

En effet:

$$E[F(X_1, X_2, ..., X_n)] = \sum_{k=0}^{n} a_k (1-p)^{n-k} p^k,$$

avec:

$$a_k = \sum_{K\subset\{1,2,...,n\}:|K|=k} F(\mathbf{1}_K(1), \mathbf{1}_K(2), ..., \mathbf{1}_K(n)).$$

Cette espérance est donc polynomiale en p de degré n, tandis que:

$$\forall p \in [0, 1), \quad \frac{p}{1-p} = \sum_{k=1}^{\infty} p^k \quad .$$

b) T est biaisé puisque:

$$E[\overline{X}_n(1 - \overline{X}_n)] = p(1-p)(1 - 1/n).$$

Pour obtenir un estimateur sans biais, il suffit donc de remplacer T par $T' = \frac{n}{n-1} T$.

Corrigé 101 a) $E((\overline{X} - \frac{a+b}{2})^2) = \sum_{i=1}^n E((\frac{X_i}{n} - \frac{a+b}{2n})^2) = \frac{(b-a)^2}{12n}$ (la variance d'une somme de variables indépendantes centrées vaut la somme de leurs variances et la variance d'une loi $U_{\frac{a}{n},\frac{b}{n}}$ est $\frac{(b-a)^2}{12n^2}$).

b) Soient $m = \min_{1\leq i\leq n} X_i$, $M = \max_{1\leq i\leq n} X_i$.
$(m - a)$ est une variable ≥ 0, on a donc:

$$\begin{aligned} E[(m-a)] &= \int_0^\infty P\{(m-a) \geq x\} dx \\ &= \int_0^{b-a} P\{m \geq x + a\} dx \\ &= \int_0^{b-a} (1 - \tfrac{x}{b-a})^n dx \\ &= -\tfrac{(b-a)}{n+1} [(1 - \tfrac{x}{b-a})^{n+1}]_0^{b-a} \\ &= \tfrac{(b-a)}{n+1}, \end{aligned}$$

donc: $E(m) = a + \frac{(b-a)}{n+1}$, de même: $E(M) = b - \frac{(b-a)}{n+1}$.
m est donc un estimateur biaisé de a et M un estimateur biaisé de b, mais ces deux biais se

compensent pour donner un estimateur sans biais T de $\frac{a+b}{2}$.
Ensuite, pour $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$:

$$P\{\alpha \leq m, M \leq \beta\} = (\frac{\beta-\alpha}{b-a})^n, P\{M \leq \beta\} = (\frac{\beta-a}{b-a})^n,$$

donc:

$$P\{m \leq \alpha, M \leq \beta\} = \frac{1}{(b-a)^n}\{(\beta-a)^n - (\beta-\alpha)^n\}.$$

En dérivant en α puis en β on obtient la densité conjointe $f_{m,M}$ de (m, M):

$$f_{m,M}(\alpha,\beta) = \frac{n(n-1)}{(b-a)^n}(\beta-\alpha)^{n-2} \text{ si } a \leq \alpha \leq \beta \leq b, \qquad 0 \text{ sinon }.$$

Donc:

$$E((T-(\frac{a+b}{2}))^2) = \frac{n(n-1)}{4(b-a)^n}\int_{\alpha=a}^{b}\{\int_{\beta=\alpha}^{b}((\alpha+\beta)-(a+b))^2(\beta-\alpha)^{n-2}d\beta\}d\alpha$$

$$= \frac{n(n-1)}{4(b-a)^n}\int_{\alpha=a}^{b}\{[(\beta-(a+b-\alpha))^2\frac{(\beta-\alpha)^{n-1}}{(n-1)}]_\alpha^b - \frac{2}{n-1}\int_\alpha^b(\beta-(a+b-\alpha))(\beta-\alpha)^{n-1}d\beta\}d\alpha$$

$$= \frac{n(n-1)}{4(b-a)^n}\int_{\alpha=a}^{b}\{[\frac{(\alpha-a)^2(b-\alpha)^{n-1}}{n-1}] - \frac{2}{n-1}\{[(\beta-(a+b-\alpha))\frac{\beta-\alpha)^n}{n}]_\alpha^b - \frac{1}{n}\int_\alpha^b(\beta-\alpha)^n d\beta\}\}d\alpha$$

$$= \frac{n(n-1)}{4(b-a)^n}\int_{\alpha=a}^{b}\{[\frac{(\alpha-a)^2(b-\alpha)^{n-1}}{n-1}] - \frac{2}{n(n-1)}[(\alpha-a)(b-\alpha)^n] + \frac{2}{(n+1)n(n-1)}[(b-\alpha)^{n+1}]\}d\alpha.$$

Ainsi:

$$E((T-(\frac{a+b}{2}))^2) = \frac{n(n-1)}{4(b-a)^n}\times\{\frac{2}{(n+1)n(n-1)} - \frac{2}{(n+1)n(n-1)} + \frac{2}{(n+1)n(n-1)}\}\times\int_a^b(b-\alpha)^{n+1}d\alpha$$

$$E((T-(\frac{a+b}{2}))^2) = \frac{(b-a)^2}{(n+2)(n+1)}.$$

Corrigé 102 a) Il s'agit ici d'un tirage avec remise. La probabilité qu'une observation quelconque soit celle d'un lion est de $L/(L+T)$. Le nombre de lions notés dans le rapport suit une loi binomiale de paramètres $n = L$ et $p = L/(L+T)$. La probabilité que k lions aient été notés vaut

$$C_{L+T}^k \left(\frac{L}{L+T}\right)^k \left(\frac{T}{L+T}\right)^{n-k}, \quad k = 0, \ldots, n.$$

b) Contrairement au a), on est ici dans le cadre d'un tirage sans remise. Le nombre de lions notés dans le rapport suit une loi hypergéométrique de paramètres L, T et n. La probabilité que k lions aient été capturés vaut

$$\frac{C_L^k C_T^{n-k}}{C_{L+T}^n}, k = \max(0, n-T), \ldots, \min(L, n).$$

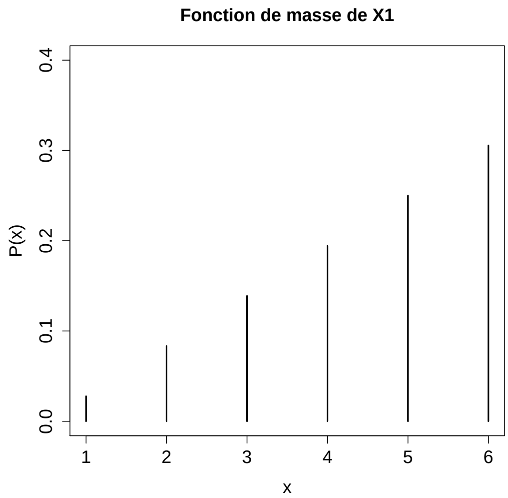
Corrigé 103 L'ensemble des valeurs possibles prises par X_1 est $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'énumération des différents cas possibles donne:

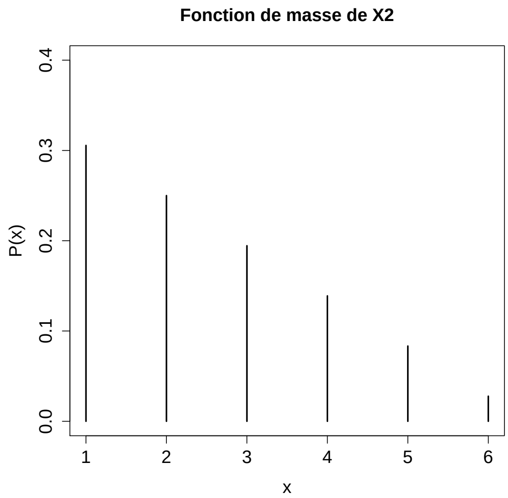
$$\begin{aligned}
P(X_1 = 1) &= 1/36 \\
P(X_1 = 2) &= 1/12 \\
P(X_1 = 3) &= 5/36 \\
P(X_1 = 4) &= 7/36 \\
P(X_1 = 5) &= 9/36 \\
P(X_1 = 6) &= 11/36
\end{aligned}$$

De même, pour X_2,

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1) &= 11/36 \\ P(X_2 = 2) &= 9/36 \\ P(X_2 = 3) &= 7/36 \\ P(X_2 = 4) &= 5/36 \\ P(X_2 = 5) &= 3/36 \\ P(X_2 = 6) &= 1/36 \end{aligned}$$

On obtient les graphes suivants:





Corrigé 104 On suppose que les dates d'anniversaire sont également réparties sur l'année et, pour simplifier, qu'une année comporte 365 jours.

a) La probabilité qu'une personne au hasard soit née un 1er janvier est alors de 1/365. La probabilités que les deux époux soient nées un 1er janvier est, en supposant l'indépendance, $1/365^2$. Sur les 42800 couples mariés en 2010, le nombre de ceux dont les deux époux sont nés un 1er janvier, X, suit une loi binomiale de paramètres $n = 42800$ et $p = 1/365^2$. On a donc

$$P(X = 2) = C_{42800}^2 \frac{1}{365^4} \left(1 - \frac{1}{365^2}\right)^{42798} = 0.0374.$$

b) La probabilité pour que les deux époux soient nés un même jour est 365 fois plus élevée que la probabilité qu'ils soient nés un 1er janvier. Le nombre Y de couple mariés ayant leur anniversaire le même jour suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 42800$ et $p = 1/365$. On a donc

$$P(X = 2) = C_{42800}^2 \frac{1}{365^2} \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{42798} \approx 0.$$

Corrigé 105 La probabilité qu'aucun camion n'attende revient à calculer la probabilité que 5 camions au plus viennent livrer sur une journée, soit

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) &= e^{-4}\frac{4^0}{0!} + e^{-4}\frac{4^1}{1!} + e^{-4}\frac{4^2}{2!} + e^{-4}\frac{4^3}{3!} + e^{-4}\frac{4^4}{4!} + e^{-4}\frac{4^5}{5!} \\ &= 0.7851 \end{aligned}$$

b) Il faudrait 7 postes de déchargement car $P(X \leq 6) = 0.8893$ et $P(X \leq 7) = 0.9488$.

Corrigé 106 a) Pour que la porte ouvre au $k$ième essai, il faut que les $k - 1$ premières clés choisies soient de mauvaises clés. Au premier essai, il y a une probabilité de $(n-1)/n$ de choisir la mauvaise clé. Au deuxième essai, la probabilité est de $(n - 2)/(n - 1)$, de $(n - 3)/(n - 2)$ au troisième essai

..., de $(n-k+1)/(n-k)$ au $(k-1)$ essai. Enfin, il faut que la bonne clé soit choisie au $k$ième essai, ce qui correspond à une probabilité de $1/(n-k+1)$. La probabilité que la porte ouvre après le $k$ième essai est donc égale à

$$\frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{n-1} \times \dots \frac{n-k+1}{n-k} \times \frac{1}{n-k+1} = \frac{1}{n}.$$

b) A chaque essai, la probabilité de choisir la bonne clé est de $1/n$. Le nombre d'essais nécessaires suit donc une loi géométrique de paramètre $1/n$. La probabilité que la porte ouvre après le $k$ième essai vaut

$$\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^k.$$

Corrigé 107 Soit X le nombre d'échantillons à prélever. On introduit un ordre fictif en numérotant les échantillons prélevés. L'expérience consiste alors à examiner les échantillons les uns après les autres jusqu'à en trouver 5 qui conviennent. X suit donc une loi négative binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0.8$. Le calcul donne $P(X = 9) = 0.98$ et $P(X = 10) = 0.998$ donc il faut prélever au minimum 10 échantillons.