Analyse II pour Ingénieurs - Exercices 2015

Joachim STUBBE

20 janvier 2015

Table des matières

Chapitre 1

L'espace $\mathbb{R}^n$

1.1 Exercices

1. **Une propriéte de la norme euclidienne.** Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ et $||\cdot||_2$ la norme euclidienne, i.e.

$$||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Calculer

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||_2^2 + ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_2^2 - 2||\mathbf{x}||_2^2 - 2||\mathbf{y}||_2^2$$

2. **Inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace euclidien.** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Montrer que pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$\big|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\big| \leq \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle}.$$

3. * **Inégalité de Hölder et normes sur $\mathbb{R}^\mathbf{n}$.** Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $p \geq 1$ soit

$$||\mathbf{x}||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De plus, soit

$$||\mathbf{x}||_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

   (a) Montrer l'inégalité de Hölder : pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ (avec la convention que si $p = 1$, alors $p' = \infty$ et vice versa) :

$$\big|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\big| \leq ||\mathbf{x}||_p ||\mathbf{y}||_{p'}.$$

   (Idée : si $p > 1$ voir l'inégalité de Young, Analyse 1, chap.5.5.3, p.115 et montrer que pour tout $t > 0$:

$$\big|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\big| \leq \frac{t^p ||\mathbf{x}||_p^p}{p} + \frac{t^{-p'} ||\mathbf{y}||_{p'}^{p'}}{p'}$$

   et en déduire l'inégalité de Hölder.)

(b) Montrer que $||\mathbf{x}||_\infty$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

(c) Montrer que $||\mathbf{x}||_1$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

(d) Soit $1 < p < \infty$. Montrer que $||\mathbf{x}||_p$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$. Pour démontrer l'inégalité triangulaire utiliser la convexité de la fonction $u \mapsto |u|^p$. Montrer d'abord que pour tout $t \in]0,1[$ et tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||_p^p \leq t^{1-p}||\mathbf{x}||_p^p + (1-t)^{1-p}||\mathbf{y}||_p^p.$$

En déduire l'inégalité triangulaire en cherchant le t optimal.

(e) Deuxième démonstration de l'inégalité triangulaire. Soit $1 < p < \infty$. Montrer que

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||_p^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k||x_k+y_k|^{p-1} + |y_k||x_k+y_k|^{p-1}$$

et appliquer l'inégalité de Hölder.

(f) Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ donner $\lim_{p\to\infty} ||\mathbf{x}||_p$.

4. **Sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$**

(a) Soit $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < (1+x^2)e^{-|x|}\}$. Donner $\overset{\circ}{S}, \bar{S}$ et ∂S. Calculer ensuite l'aire de S.

(b) Soit $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + 4y^2 < 4\}$. Donner $\overset{\circ}{T}, \bar{T}$ et ∂T. Calculer ensuite l'aire de T.

(c) Considerer l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Donner $\overset{\circ}{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}$ et $\partial\mathbb{Q}$.

Formules utiles.

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt, \quad \Gamma(n+1) = n!$$

$$\int^x \sqrt{1-t^2}\,dt = \frac{x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x}{2}$$

$$E_{a,b} = \{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}, \quad a,b > 0 \quad \text{Aire}(E_{a,b}) = \pi ab.$$

5. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un espace métrique (X, d_X). Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$:

(a) $E = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) = c\}$ est fermé.

(b) $F = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \leq c\}$ est fermé.

(c) $G = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) < c\}$ est ouvert.

6. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Soit $\mathbf{v} \in E$, $\langle\mathbf{v},\mathbf{v}\rangle = 1$. Alors

$$P\mathbf{x} = \langle\mathbf{v},\mathbf{x}\rangle\mathbf{v} \tag{1.1}$$

définit un projecteur orthogonal (c'est la projection orthogonale sur $\mathbf{v}$). Montrer que P est continue.

1.2 Corrigés

1. **Une propriéte de la norme euclidienne.** Par les propriétés du produit scalaire nous avons

$$\begin{aligned}||\mathbf{x} \pm \mathbf{y}||_2^2 &= \langle \mathbf{x} \pm \mathbf{y}, \mathbf{x} \pm \mathbf{y}\rangle \\ &= \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle \pm \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \pm \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle \\ &= ||\mathbf{x}||_2^2 + ||\mathbf{y}||_2^2 \pm \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \pm \langle \mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle\end{aligned}$$

et par conséquent

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||_2^2 + ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_2^2 - 2||\mathbf{x}||_2^2 - 2||\mathbf{y}||_2^2 = 0$$

On appelle cette identité aussi *l'identité de parallèlogramme*. Pourquoi ?

2. **Inégalité de Cauchy-Schwarz dans un espace euclidien.** Soit $(E, \langle \cdot, \cdot\rangle)$ un espace euclidien. Montrer que pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$:

$$\big|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\big| \leq \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle} \cdot \sqrt{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}.$$

Corrigé. Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ et λ réel :

$$0 \leq \langle \mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}, \mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - 2\lambda\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle + \lambda^2\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle.$$

On minimise par rapport à λ : si $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ il n'y a rien à démontrer (les deux membres de l'inégalité de Cauchy-Schwarz sont zéro). Si $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, alors $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle > 0$ par la positivité du produit scalaire le minimum de ce polynôme de degré 2 en λ se trouve en $\lambda = \dfrac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}$. On obtient

$$0 \leq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle^2}{\langle \mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle}$$

donc l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3. * **Inégalité de Hölder et normes sur $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.** Pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $p \geq 1$ soit

$$||\mathbf{x}||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

De plus, soit

$$||\mathbf{x}||_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|.$$

(a) Montrer l'inégalité de Hölder : pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ (avec la convention que si $p = 1$, alors $p' = \infty$ et vice versa) :

$$\big|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\big| \leq ||\mathbf{x}||_p||\mathbf{y}||_{p'}.$$

(Idée : si $p > 1$ voir l'inégalité de Young, Analyse 1, chap.5.5.3, p.115 et montrer que pour tout $t > 0$:

$$\big|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\big| \leq \frac{t^p||\mathbf{x}||_p^p}{p} + \frac{t^{-p'}||\mathbf{y}||_{p'}^{p'}}{p'}$$

et en déduire l'inégalité de Hölder.)

Corrigé. Notons d'abord que nous pouvons supposer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ car sinon l'inégalité est triviale (les deux membres sont égales à zéro). Par l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue nous dérivons l'inégalité de base :

$$\big|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\big| = \left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot |y_k|.$$

Il en suit directement l'inégalité de Hölder pour $p = 1$:

$$\big|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\big| \leq ||\mathbf{x}||_1 ||\mathbf{y}||_\infty.$$

Soit $p > 1$. Par l'inégalité de Young, pour tout $t > 0$ et tout k :

$$|x_k| \cdot |y_k| = |t x_k| \cdot |t^{-1} y_k| \leq \frac{t^p |x_k|^p}{p} + \frac{t^{-p'} |y_k|^{p'}}{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Par conséquent, en remplaçant les sommes par les normes :

$$\big|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\big| \leq \frac{t^p ||\mathbf{x}||_p^p}{p} + \frac{t^{-p'} ||\mathbf{y}||_{p'}^{p'}}{p'}.$$

Si on définit

$$f(t) := \frac{t^p ||\mathbf{x}||_p^p}{p} + \frac{t^{-p'} ||\mathbf{y}||_{p'}^{p'}}{p'}$$

alors $f :]0, \infty[\to]0, \infty[$ est une fonction strictement convexe ayant un unique minimum global. En fait

$$f'(t) := t^{p-1} ||\mathbf{x}||_p^p - t^{-p'-1} ||\mathbf{y}||_{p'}^{p'}, \quad f''(t) > 0.$$

L'unique point stationnaire est donné par

$$t_0^{p+p'} = \frac{||\mathbf{y}||_{p'}^{p'}}{||\mathbf{x}||_p^p}$$

et

$$f(t_0) = (\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}) \left(||\mathbf{x}||_p^{\frac{pp'}{p+p'}} ||\mathbf{y}||_{p'}^{\frac{pp'}{p+p'}} \right) = ||\mathbf{x}||_p ||\mathbf{y}||_{p'}$$

En notant que $f(t) \geq \big|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle\big|$ (la prémière inégalité) nous avons démontré l'inégalité de Hölder.

(b) Montrer que $||\mathbf{x}||_\infty$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Corrigé. **1. Positivité.** $||\mathbf{x}||_\infty = \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k| = 0$ si est seulement si $|x_k| = 0$ pour tout k ce qui est équivalent à $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Homogénéité. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ par l'homogénéité de la valeur absolue :

$$||\lambda \mathbf{x}||_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda x_k| = \max_{1 \leq k \leq n} |\lambda| |x_k| = |\lambda| \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| = |\lambda| \, ||\mathbf{x}||_\infty$$

3. Inégalité triangulaire. Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k + y_k| &\leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| + |y_k| \\ &\leq \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| + \max_{1 \leq k \leq n} |y_k| \\ &= ||\mathbf{x}||_\infty + ||\mathbf{y}||_\infty. \end{aligned}$$

(c) Montrer que $||\mathbf{x}||_1$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Corrigé. **1. Positivité.** $||\mathbf{x}||_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| = 0$ si est seulement si $|x_k| = 0$ pour tout k ce qui est équivalent à $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Homogénéité. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ par l'homogénéité de la valeur absolue :

$$||\lambda \mathbf{x}||_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k| = |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |x_k| = |\lambda| \, ||\mathbf{x}||_1$$

3. Inégalité triangulaire. Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||_1 &= \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| + |y_k| \\ &= ||\mathbf{x}||_1 + ||\mathbf{y}||_1. \end{aligned}$$

(d) Soit $1 < p < \infty$. Montrer que $||\mathbf{x}||_p$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$. Pour démontrer l'inégalité triangulaire utiliser la convexité de la fonction $u \mapsto |u|^p$. Montrer d'abord que pour tout $t \in]0, 1[$ et tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||_p^p \leq t^{1-p} ||\mathbf{x}||_p^p + (1-t)^{1-p} ||\mathbf{y}||_p^p.$$

En déduire l'inégalité triangulaire en cherchant le t optimal.

Corrigé. **1. Positivité.** $||\mathbf{x}||_p^p = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = 0$ si est seulement si $|x_k| = 0$ pour tout k ce qui est équivalent à $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
2. Homogénéité. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ par l'homogénéité de la valeur absolue :

$$||\lambda \mathbf{x}||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \, ||\mathbf{x}||_p.$$

3. Inégalité triangulaire. Par la convexité de la fonction $u \mapsto |u|^p$ on an pour tout $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ et $0 < t < 1$:

$$\begin{aligned} |x_k + y_k|^p &= |tt^{-1}x_k + (1-t)(1-t)^{-1}y_k|^p \\ &\leq t|t^{-1}x_k|^p + (1-t)|(1-t)^{-1}y_k|^p = t^{1-p}|x_k|^p + (1-t)^{1-p}|y_k|^p \end{aligned}$$

d'où en prenant la somme sur k :

$$||\mathbf{x} + \mathbf{y}||_p^p \leq t^{1-p} ||\mathbf{x}||_p^p + (1-t)^{1-p} ||\mathbf{y}||_p^p.$$

La fonction $f :]0, 1[\to]0, \infty[$ définie par

$$f(t) := t^{1-p} ||\mathbf{x}||_p^p + (1-t)^{1-p} ||\mathbf{y}||_p^p$$

est une fonction strictement convexe ayant un unique minimum global. En fait

$$f'(t) := (p-1)\big(-t^{-p} ||\mathbf{x}||_p^p + (1-t)^{-p} ||\mathbf{y}||_p^p \big), \quad f''(t) > 0.$$

L'unique point stationnaire est donné par

$$\frac{1-t_0}{t_0} = \frac{||\mathbf{y}||_p}{||\mathbf{x}||_p}$$

c'est-à-dire

$$t_0 = \frac{||\mathbf{x}||_p}{||\mathbf{x}||_p + ||\mathbf{y}||_p}, \quad 1-t_0 = \frac{||\mathbf{y}||_p}{||\mathbf{x}||_p + ||\mathbf{y}||_p}$$

et

$$f(t_0) = \big(||\mathbf{x}||_p + ||\mathbf{y}||_p\big)^p \geq ||\mathbf{x}+\mathbf{y}||_p^p.$$

(e) Deuxième démonstration de l'inégalité triangulaire. Soit $1 < p < \infty$. Montrer que

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||_p^p \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k+y_k|^{p-1} + |y_k||x_k+y_k|^{p-1}$$

et appliquer l'inégalité de Hölder.

Corrigé. En appliquant l'inégalité de Hölder avec les exposants p et $p' = \dfrac{p}{p-1}$:

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k||x_k+y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} = ||\mathbf{x}||_p||\mathbf{x}+\mathbf{y}||_p^{p-1}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} |y_k||x_k+y_k|^{p-1} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k+y_k|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} = ||\mathbf{y}||_p||\mathbf{x}+\mathbf{y}||_p^{p-1}$$

d'où

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||_p^p \leq (||\mathbf{x}||_p + ||\mathbf{y}||_p)||\mathbf{x}+\mathbf{y}||_p^{p-1}$$

donc l'inégalité triangulaire.

(f) Pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ donner $\lim\limits_{p\to\infty} ||\mathbf{x}||_p$.

Corrigé. Noter que pour tout $p \geq 1$ et tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$||\mathbf{x}||_\infty \leq ||\mathbf{x}||_p \leq n^{\frac{1}{p}} ||\mathbf{x}||_\infty$$

d'où par le théorème de deux gendarmes

$$\lim_{p\to\infty} ||\mathbf{x}||_p = ||\mathbf{x}||_\infty.$$

4. **Sous-ensembles de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$**

(a) Soit $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < (1+x^2)e^{-|x|}\}$. Donner $\overset{\circ}{S}, \bar{S}$ et ∂S. Calculer ensuite l'aire de S.

(b) Soit $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + 4y^2 < 4\}$. Donner $\overset{\circ}{T}, \bar{T}$ et ∂T. Calculer ensuite l'aire de T.

(c) Considerer l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Donner $\overset{\circ}{\mathbb{Q}}, \bar{\mathbb{Q}}$ et $\partial\mathbb{Q}$.

Corrigé a. $\overset{\circ}{S} = S$. La raison est essentiellement les inégalités strictes dans la définition de S et la continuité des bords donnés par les fonctions $y = f(x) = (1+x^2)e^{-|x|}$ et $y = 0$. La preuve rigoreuse consiste à démontrer que pour tout point $(x, y) \in S$ il existe une boule B_ϵ de centre (x, y) et de rayon $\epsilon > 0$ telle que $B_\epsilon \subset S$. Soit alors $(x_0, y_0) \in S$ donné.

- Il existe $h > 0$ tel que $]y_0 - h, y_0 + h[\subset]0, f(x_0)[$. Par conséquent, le ségment $\{x_0\} \times]y_0 - h, y_0 + h[$ est dans S.
- Par la continuité de $f(x) = (1 + x^2)e^{-|x|}$ il existe $\delta > 0$ tel que $f(x) > y_0 + h$ pour tout $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.
- Par conséquent, le rectangle $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\times]y_0 - h, y_0 + h[$ est dans S.
- Choisir $\epsilon = \min(h, \delta)$ pour rayon de la boule (euclidienne).

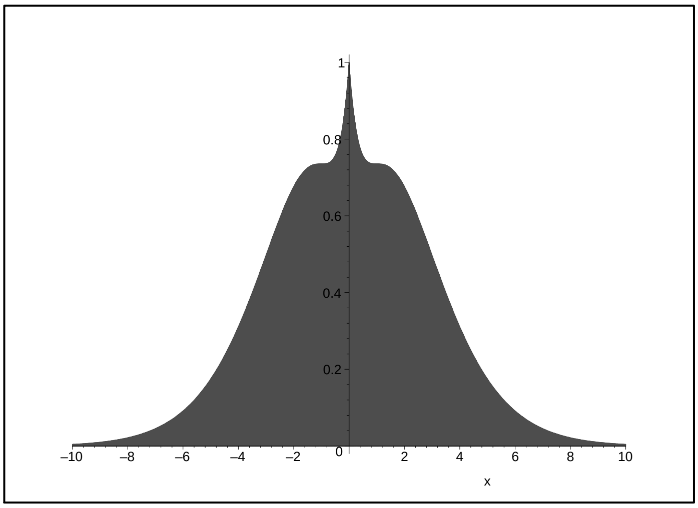
Ensuite on a $\partial S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 = y, \text{ ou } y = (1 + x^2)e^{-|x|}\}$ et

$$\bar{S} = S \cup \partial S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq (1 + x^2)e^{-|x|}\}$$

Calcul de l'aire :

$$\text{Aire}(S) = \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)e^{-|x|}dx = 2\int_0^{\infty} (1+x^2)e^{-|x|}dx = 2\Gamma(1)+2\Gamma(3) = 6$$

Le domaine S - casque à pointe.



Corrigé b. $\overset{\circ}{T} = T$, $\partial T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 = x^2 + 4y^2, \text{ ou } x^2 + 4y^2 = 4\}$ et

$$\bar{T} = T \cup \partial T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + 4y^2 \leq 4\}$$

Calcul de l'aire : Le bord de T est donné par les deux ellipses $E(1, 1/2)$ et $E(2, 1)$. Noter que $E(1, 1/2) \subset E(2, 1)$. Donc

$$\text{Aire}(T) = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}.$$

Corrigé c. Par un résultat du cours Analyse I, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Entre deux nombres réels il existe toujours un nombre rationnel et vice versa (voir aussi exercices Analyse I, chapitre 1). Par conséquent tout point de $\mathbb{Q}$ est un point frontière. Donc

$$\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset, \quad \partial\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

5. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un espace métrique (X, d_X). Montrer que pour tout $c \in \mathbb{R}$:
   (a) $E = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) = c\}$ est fermé.
   (b) $F = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \leq c\}$ est fermé.
   (c) $G = \{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) < c\}$ est ouvert.

   Corrigé. Si E est vide, alors E est fermé. Si E n'est pas vide, alors pour tout point adhérent $\mathbf{x}$ de E et toute suite $(\mathbf{x}_n)_n$ d'éléments de E qui converge vers $\mathbf{x}$: $f(\mathbf{x}_n) = c$ pour tout n et par la continutité de f

$$c = \lim_{n\to\infty} f(\mathbf{x}_n) = f(\mathbf{x})$$

   d'où $\mathbf{x} \in E$. Pour F c'est le même argument (remplaçer "$= c$" par "$\leq c$"). L'ensemble G est le complémentaire de l'ensemble fermé$\{\mathbf{x} \in X : f(\mathbf{x}) \geq c\}$, donc ouvert.

6. Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Soit $\mathbf{v} \in E$, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v}\rangle = 1$. Alors

$$P\mathbf{x} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle \mathbf{v} \tag{1.2}$$

   définit un projecteur orthogonal (c'est la projection orthogonale sur $\mathbf{v}$). Montrer que P est continue.

   Corrigé.

$$||P\mathbf{x}||^2 = \langle P\mathbf{x}, P\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle^2 \leq ||\mathbf{x}||^2$$

   par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Chapitre 2

Courbes dans $\mathbb{R}^n$

2.1 Exercices

1. **Deux Formules.**
   (a) Soit $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe C^1. Montrer que
   $$\frac{d}{d\,t}\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\rangle = \langle \mathbf{f}'(t), \mathbf{g}(t)\rangle + \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}'(t)\rangle.$$
   (b) Soit $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Le produit vectoriel $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est défini par
   $$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$
   Calculer
   $$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle,\ \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle \text{ et } \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\rangle.$$
   Soit $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe C^1. Montrer que
   $$\frac{d}{d\,t}\big(\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t)\big) = \mathbf{f}'(t) \times \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}'(t).$$
2. **Mouvement libre.** Soit $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^2 telle que $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}$. Pour $m > 0$ on introduit la quantité de mouvement $\mathbf{p}(t) = m\dot{\mathbf{r}}(t)$ et le moment cinétique $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$.
   (a) Montrer que $\mathbf{L}(t)$ est constant.
   (b) Montrer que l'energie $E(t) := \dfrac{\langle \mathbf{p}(t), \mathbf{p}(t)\rangle}{2m}$ est constante.
3. **Oscillateur harmonique en trois dimension.** Soit $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^2 telle que $\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\omega^2\mathbf{r}(t)$, $\omega > 0$. Pour $m > 0$ on introduit la quantité de mouvement $\mathbf{p}(t) = m\dot{\mathbf{r}}(t)$ et le moment cinétique $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$.
   (a) Montrer que $\mathbf{L}(t)$ est constant.
   (b) Montrer que l'energie $E(t) := \dfrac{\langle \mathbf{p}(t), \mathbf{p}(t)\rangle}{2m} + \dfrac{m\omega^2\langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t)\rangle}{2}$ est constante.

2.2 Corrigés

1. **Deux Formules.**
   (a) Soit $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe C^1. Montrer que

$$\frac{d}{d\,t}\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\rangle = \langle \mathbf{f}'(t), \mathbf{g}(t)\rangle + \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}'(t)\rangle.$$

Corrigé. Par la définition du produit scalaire et les propriétés de la dérivée (linéarité et règle du produit) on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\,t}\langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)\rangle &= \frac{d}{d\,t}\sum_{k=1}^{n} f_k(t)g_k(t)\\ &= \sum_{k=1}^{n} f_k'(t)g_k(t) + f_k(t)g_k'(t)\\ &= \langle \mathbf{f}'(t), \mathbf{g}(t)\rangle + \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{g}'(t)\rangle.\end{aligned}$$

   (b) Soit $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$. Le produit vectoriel $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ de $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est défini par

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Calculer

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle,\ \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle \text{ et } \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\rangle.$$

Soit $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe C^1. Montrer que

$$\frac{d}{d\,t}\big(\mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}(t)\big) = \mathbf{f}'(t) \times \mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t) \times \mathbf{g}'(t).$$

Corrigé.

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle = 0, \quad \langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle = 0$$

et

$$\langle \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{a}\rangle\langle \mathbf{b}, \mathbf{b}\rangle - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle^2$$

2. **Mouvement libre.** Soit $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^2 telle que $\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}$. Pour $m > 0$ on introduit la quantité de mouvement $\mathbf{p}(t) = m\dot{\mathbf{r}}(t)$ et le moment cinétique $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$.
   (a) Montrer que $\mathbf{L}(t)$ est constant.
   (b) Montrer que l'energie $E(t) := \dfrac{\langle \mathbf{p}(t), \mathbf{p}(t)\rangle}{2m}$ est constante.

Corrigé. $\mathbf{L}(t)$ est de classe C^1 et par l'exercice 3 $\dot{\mathbf{L}}(t) = m\dot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + m\mathbf{r}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}$. Par le théorème des accroissements finis (voir Analyse 1) chaque composante de $\mathbf{L}(t)$ est constante donc $\mathbf{L}(t)$ est constant. L'energie est de classe C^1. Elle est constante puisque $\dot{\mathbf{p}}(t) = m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}$ et par l'exercice 3

$$\dot{E}(t) = \frac{\langle \dot{\mathbf{p}}(t), \mathbf{p}(t)\rangle}{2m} + \frac{\langle \mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{p}}(t)\rangle}{2m} = 0$$

et on conclut de nouveau par le théorème des accroissements finis.

Corrigé - b. Alternativement on peut appliquer le théorème des accroissements finis pour résoudre pour $\mathbf{r}(t)$. L'équation $\dot{\mathbf{p}}(t) = m\ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0}$ implique que $\mathbf{p}(t)$ est constant, c'est-à-dire $\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0 = m\mathbf{v}_0$ pour un $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{R}^3$. Il en suit que $\dot{\mathbf{r}} - (\dot{\mathbf{v}_0 t}) = \mathbf{0}$ d'où $\mathbf{r}(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0$ pour un $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$. Par calcul direct il en suit que

$$\mathbf{L}(t) = m\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0, \quad E(t) := \frac{\langle \mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0 \rangle}{2m} = \frac{m\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0 \rangle}{2}.$$

3. **Oscillateur harmonique en trois dimension.** Soit $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^2 telle que $\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$, $\omega > 0$. Pour $m > 0$ on introduit la quantité de mouvement $\mathbf{p}(t) = m\dot{\mathbf{r}}(t)$ et le moment cinétique $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times \mathbf{p}(t)$.
   (a) Montrer que $\mathbf{L}(t)$ est constant.
   (b) Montrer que l'energie $E(t) := \dfrac{\langle \mathbf{p}(t), \mathbf{p}(t) \rangle}{2m} + \dfrac{m\omega^2 \langle \mathbf{r}(t), \mathbf{r}(t) \rangle}{2}$ est constante.

Corrigé. En utilisant l'équation pour $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ on trouve comme ci-dessus

$$\dot{\mathbf{L}}(t) = m\dot{\mathbf{r}}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t) + m\mathbf{r}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{0} + m\mathbf{r}(t) \times (-\omega^2 \mathbf{r}(t)) = \mathbf{0}$$

et on conclut par le théorème des accroissements finis (voir l'exercice ci-dessus). De même, l'energie est de classe C^1, et en utilisant l'équation pour $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ et les propriétés du produit scalaire (symétrie, linéarité en chaque composante) on obtient

$$\begin{aligned}
\dot{E}(t) &= \frac{\langle \dot{\mathbf{p}}(t), \mathbf{p}(t) \rangle}{2m} + \frac{\langle \mathbf{p}(t), \dot{\mathbf{p}}(t) \rangle}{2m} + \frac{m\omega^2 \langle \dot{\mathbf{r}}(t), \mathbf{r}(t) \rangle}{2} + \frac{m\omega^2 \langle \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle}{2} \\
&= m\langle \ddot{\mathbf{r}}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle + m\omega^2 \langle \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle \\
&= m\langle \ddot{\mathbf{r}}(t) + \omega^2 \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle \\
&= m\langle \mathbf{0}, \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Remarque. Dans la pratique on ne sait souvent pas quelles quantités sont constantes (on dit "conservées"). Pour les trouver on multiplie l'équation par des fonctions appropriées. Par exemple, si on prend le produit vectoriel de l'équation $\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$ avec $\mathbf{r}(t)$, on trouve

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) \times \mathbf{r}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t) \times \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}$$

ce qui amène à $\dot{\mathbf{L}}(t) = \mathbf{0}$. Si on prend le produit scalaire de l'équation $\ddot{\mathbf{r}}(t) = -\omega^2 \mathbf{r}(t)$ avec $\dot{\mathbf{r}}(t)$, on trouve

$$\langle \ddot{\mathbf{r}}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle = -\langle \omega^2 \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{d}{dt} \langle \dot{\mathbf{r}}(t), \dot{\mathbf{r}}(t) \rangle = -\omega^2 \frac{d}{dt} \langle \mathbf{r}(t) \mathbf{r}(t) \rangle$$

d'où la conservation de l'energie.

Chapitre 3

Fonctions réelles sur $\mathbb{R}^n$

3.1 Exercices

1. **Fonctions continues.**
   (a) Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Montrer que la fonction $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle$ est continue en tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
   (b) Pour $A \in M_{n,n}\mathbb{R}$ soit $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire donnée par $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y} \rangle$. Montrer que b est continue en tout $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$.
   (c) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donné par $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)$ où x_k dénote la k-ième composante du vecteur $\mathbf{x}$, $x_k = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle$, est une fonction continue en tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
   (d) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donné par $f(\mathbf{x}) = g(h(\mathbf{x}))$ est une fonction continue en tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
2. **Limites de fonctions réelles.**
   (a) Calculer
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$
   (b) Calculer
   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$
   (c) Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & \text{si } xy \neq 0, \\ 1 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$
   Montrer que f est partiellement différentiable et donner ses dérivées partielles.
3. **Dérivées partielles.**

(a) Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Montrer que la fonction $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle \cdot \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle$ partiellement différentiable en tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et donner son gradient.

(b) Pour $A \in M_{n,n}\mathbb{R}$ soit $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire donnée par $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle$. Montrer que b est partiellement différentiable en tout $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ et donner son gradient.

(c) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donné par $f(\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g(x_k)$ où x_k dénote la k-ième composante du vecteur $\mathbf{x}$, $x_k = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x}\rangle$, est une fonction partiellement différentiable en tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Donner son gradient.

(d) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiellement différentiable en tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donné par $f(\mathbf{x}) = g(h(\mathbf{x}))$ est une fonction partiellement différentiable en tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Donner son gradient.

4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ mais qu'elle n'est pas de classe C^1 en ce point.

5. **Hyperplan tangent.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction donnée par

$$f(x,y) = x^2 + y\sin x + y^2\cos^2 x$$

(a) Montrer que f est partiellement différentiable et donner le gradient de f.

(b) Donner l'équation du plan tangent au point $(x,y) = (0,1)$.

6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $r = ||\mathbf{x}||_2$.

(a) Montrer que pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ on a

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{n-1}{r}\, f'(r)$$

(b) Soit $f'(0) = 0$. Donner

$$\lim_{r\to 0} \Delta f(r).$$

(c) Soit $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Calculer $\Delta f(x,y,z)$.

7. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ on considère la fonction $f(x,t)$ définie par

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$$

(a) Montrer que f vérifie l'équation de chaleur, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

(b) Calculer

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\, dx$$

(c) Soit $g(x,y,t)$ donnée par $g(x,y,t) = f(x,t)f(y,t)$. Calculer

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,y,t) - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,t) - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y,t).$$

Remarque : $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = D_{xx}$ etc.

8. Donner la matrice hessienne et le Laplacian de

$$f(x,y) = (x-y)\cos(x+y).$$

9. **Dérivées partielles.**

(a) Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Montrer que la fonction $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle$ est de classe C^2. Donner sa matrice Hessienne et son Laplacien. Donner la matrice symétrique $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ telle que $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$.

(b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donné par $f(\mathbf{x}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g(x_k)$ où x_k dénote la k-ième composante du vecteur $\mathbf{x}$, $x_k = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle$. Donner la matrice Hessienne et le Laplacien de f.

10. Soit $z = x + iy$, $i^2 = -1$. Admettons que $D_x z = 1$ et $D_y z = i$. Soit $\Delta = D_{xx} + D_{yy}$. Pour tout entier naturel m calculer

$$\Delta z^m,\ \Delta \bar{z}^m,\ \Delta \mathrm{Re}\, z^m,\ \Delta \mathrm{Im}\, z^m.$$

Pour $m = 1,2,3,4$ donner $\mathrm{Re}\, z^m$ et $\mathrm{Im}\, z^m$.

11. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Soient $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $C^2(U)$. Vérifier que

$$\Delta(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\Delta g(\mathbf{x}) + 2\langle \nabla f(\mathbf{x}), \nabla g(\mathbf{x}) \rangle + g(\mathbf{x})\Delta f(\mathbf{x})$$

pour tout $\mathbf{x} \in U$. En utilisant cette identité et l'exercice 5 calculer ensuite le Laplacien de

$$h(x,y,z) = g(x,y)f(x,y,z) = \frac{xy}{x^2+y^2}\,\frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

sur $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0\}$.

3.2 Corrigés

1. **Fonctions continues.**

(a) Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Montrer que la fonction $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle \cdot \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle$ est continue en tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Corrigé . C'est un produit de deux fonctions continues (formes linéaires) d'où la continuité de f. En fait, soient $\mathbf{x}, \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\lim_{j\to\infty} \mathbf{x}_j = \mathbf{x}$. Alors, par la continuité des formes linéaires

$$\lim_{j\to\infty} \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}_j\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle, \quad \lim_{j\to\infty} \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}_j\rangle = \langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle,$$

d'où $\lim_{j\to\infty} f(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x})$ puisque c'est le produit de deux suites numériques convergentes.

(b) Pour $A \in M_{n,n}\mathbb{R}$ soit $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire donnée par $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle$. Montrer que b est continue en tout $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$.

Corrigé-1. Pour tout suite de vecteurs $\begin{pmatrix} \mathbf{x}_j \\ \mathbf{y}_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ qui converge vers $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ on a $\lim_{j\to\infty} \mathbf{x}_j = \mathbf{x}$ et $\lim_{j\to\infty} \mathbf{y}_j = \mathbf{y}$ dans $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $\lim_{j\to\infty} ||\mathbf{x}_j - \mathbf{x}||_2 = 0$, $\lim_{j\to\infty} ||\mathbf{y}_j - \mathbf{y}||_2 = 0$ (avec la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. En particulier, $||\mathbf{x}_j||_2$, $||\mathbf{y}_j||_2$ sont bornées. Par la bi-linéarité de b :

$$b(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) - b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = b(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}, \mathbf{y}_j) + b(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j - \mathbf{y}).$$

Par l'inégalit de Cauchy-Schwarz et l'inégalité $||A\mathbf{x}||_2 \leq ||A||_2||\mathbf{x}||_2$ (voir cours, ch.1.6.1, p.14) on obtient :

$$|b(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j) - b(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq ||A||_2||\mathbf{y}_j||_2||\mathbf{x}_j - \mathbf{x}||_2 + ||A||_2||\mathbf{x}||_2||\mathbf{y}_j - \mathbf{y}||_2 \to 0$$

d'où le résultat.

Corrigé-2. Le jeu $\epsilon - \delta$. Il faut montrer que pour tout $\epsilon < 0$ il existe $\delta < 0$ tel que pour tous vecteurs $\begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ de norme euclidienne plus petite que δ on a

$$|b(\mathbf{x} + \mathbf{h}, \mathbf{y} + \mathbf{k}) - b(\mathbf{x}, \mathbf{y})| < \epsilon.$$

Noter bque pour la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^{2n}$:

$$|| \begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{k} \end{pmatrix} ||_2^2 = ||\mathbf{h}||_2^2 + ||\mathbf{k}||_2^2$$

avec les normes à droite prises dans $\mathbb{R}^n$. Par l'estimation ci-dessus du coorigé 1, pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{h}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$:

$$|b(\mathbf{x} + \mathbf{h}, \mathbf{y} + \mathbf{k}) - b(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq ||A||_2||\mathbf{y} + \mathbf{k}||_2||\mathbf{h}||_2 + ||A||_2||\mathbf{x}||_2||\mathbf{k}||_2.$$

On peut supposer que $||\mathbf{y}+\mathbf{k}||_2 < C$, $||\mathbf{x}||_2 < C$ pour une constante $C > 0$. Alors,

$$|b(\mathbf{x}+\mathbf{h},\mathbf{y}+\mathbf{k})-b(\mathbf{x},\mathbf{y})| \leq C||A||_2(||\mathbf{h}||_2+||\mathbf{k}||_2) \leq C||A||_2\sqrt{2||\mathbf{h}||_2^2+2||\mathbf{k}||_2^2}$$

par l'inégalité $a+b \leq \sqrt{2a^2+2b^2}$ pour tout $a,b \geq 0$. On choisit $\delta = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}C||A||_2}$.

(c) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donné par $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)$ où x_k dénote la k-ième composante du vecteur $\mathbf{x}$, $x_k = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x}\rangle$, est une fonction continue en tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Corrigé. Soit par les suites soit par

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k+h_k) - g(x_k)$$

et $|h_k| \leq ||\mathbf{h}||_2$ en appliquant la continutité de g :

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \lim_{h_k\to 0} g(x_k+h_k) - g(x_k) = 0.$$

Alternativement on pourra argumenter que les fonctions $h_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $h_k(\mathbf{x}) = g(\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x}\rangle)$ sont continues sur $\mathbb{R}^n$ (c'est la composition d'une fonction continue avec une forme linéare continue- voir l'exercice ci-dessous) et f et une somme finie des fonctions continues.

(d) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donné par $f(\mathbf{x}) = g(h(\mathbf{x}))$ est une fonction continue en tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Corrigé. Soient $\mathbf{x}, \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^n$ t.q. $\lim_{j\to\infty} \mathbf{x}_j = \mathbf{x}$. Alors, par la continuité de h, la suite numérique $a_j := (h(\mathbf{x}_j))_j$ est convergente et a pour limite $a := h(\mathbf{x})$. Par la continuité de g : $\lim_{j\to\infty} g(a_j) = g(a)$, c'est-à-dire

$$\lim_{j\to\infty} f(\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{x}).$$

2. **Limites de fonctions réelles.**

(a) Calculer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Corrigé. La limite n'existe pas car $f(0,y) = -1$ pour $y \neq 0$ et $f(x,0) = 1$ si $x \neq 0$.

(b) Calculer

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Corrigé. Noter que

$$\left|xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right| \leq |xy| \leq x^2+y^2$$

Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0$$

(c) Soit $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & \text{si } xy \neq 0, \\ 1 & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est partiellement différentiable et donner ses dérivées partielles.

Corrigé. Si $xy \neq 0$, alors

$$D_x\frac{\sin(xy)}{xy} = \frac{xy^2\cos(xy) - y\sin(xy)}{x^2y^2}$$

$$D_y\frac{\sin(xy)}{xy} = \frac{x^2y\cos(xy) - x\sin(xy)}{x^2y^2}$$

Si $xy = 0$, il y a trois cas $x = 0, y \neq 0$ ou $x \neq 0, y = 0$ ou encore $x = 0, y = 0$. Par exemple, pour le premier cas :

$$D_xf(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = 0$$

et

$$D_yf(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{h} = 0$$

3. **Dérivées partielles.**

(a) Soit $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a},\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Montrer que la fonction $f(\mathbf{x}) = \langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle\cdot\langle\mathbf{b},\mathbf{x}\rangle$ partiellement différentiable en tout $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ et donner son gradient.

Corrigé -1. $f = g\cdot h$ est le produit de deux fonctions partiellement différentiable $g(\mathbf{x}) = \langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle$ et $h(\mathbf{x}) = \langle\mathbf{b},\mathbf{x}\rangle$. Par la règle du produit :

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \nabla(gh)(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})\nabla g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})\nabla h(\mathbf{x}). \tag{3.1}$$

Il en suit avec $\nabla g(\mathbf{x}) = \mathbf{a}$, $\nabla h(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$:

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \langle\mathbf{b},\mathbf{x}\rangle\mathbf{a} + \langle\mathbf{a},\mathbf{x}\rangle\mathbf{b}.$$

Corrigé -2. Pour tous $k = 1, \ldots, n$, $t \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x}) = t\langle \mathbf{a}, \mathbf{e}_k\rangle\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} + t\mathbf{e}_k\rangle + t\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle\langle \mathbf{b}, \mathbf{e}_k\rangle$$

d'où

$$t^{-1}(f(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k) - f(\mathbf{x})) = a_k\langle \mathbf{b}, \mathbf{x}\rangle + b_k\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle + ta_kb_k.$$

En laissant tendre t vers zéro on obtient le résultat désiré.

(b) Pour $A \in M_{n,n}\mathbb{R}$ soit $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire donnée par $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle$. Montrer que b est partiellement différentiable en tout $\begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ et donner son gradient.

Corrigé . Pour les dérivées partielles par rapport à x_k l'argument $\mathbf{y}$ est constant, c'est l'étude de la forme linéaire $\mathbf{x} \mapsto \langle \mathbf{x}, A\mathbf{y}\rangle$. On trouve $\nabla_{\mathbf{x}}b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A\mathbf{y}$. Pour les dérivées partielles par rapport à y_k l'argument $\mathbf{x}$ est constant, c'est l'étude de la forme linéaire $\mathbf{y} \mapsto \langle A^T\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ (on doit mettre la matrice dans l'argument constant). On trouve $\nabla_{\mathbf{y}}b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A^T\mathbf{x}$. Le gradient de b est le vecteur dans $\mathbb{R}^{2n}$ donné par

$$\nabla b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{x},\mathbf{y}}b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} A\mathbf{y} \\ A^T\mathbf{x} \end{pmatrix}.$$

(c) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donné par $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)$ où x_k dénote la k-ième composante du vecteur $\mathbf{x}$, $x_k = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x}\rangle$, est une fonction partiellement différentiable en tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Donner son gradient.

Corrigé . Par la définition de la dérivée partielle :

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{g(x_j + h) - g(x_j)}{h} = g'(x_j)$$

pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et g' dénote la fonction dérivée de g. Par conséquent,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} g'(x_k)\mathbf{e}_k.$$

(d) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en tout $t \in \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ partiellement différentiable en tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donné par $f(\mathbf{x}) = g(h(\mathbf{x}))$ est une fonction partiellement différentiable en tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Donner son gradient.

Corrigé . La fonction $\rho(t) := h(\mathbf{x} + t\mathbf{e}_k)$ est dérivable en $t = 0$ et $\rho'(0) = \dfrac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_k}$. La fonction composée $g(\rho(t))$ est dérivable en $t = 0$ et

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g(\rho(t)) = g'(\rho(0))\rho'(0) = g'(h(\mathbf{x}))\frac{\partial h(\mathbf{x})}{\partial x_k}$$

d'où $\nabla f(\mathbf{x}) = g'(h(\mathbf{x}))\nabla h(\mathbf{x})$.

4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ mais qu'elle n'est pas de classe C^1 en ce point.

Corrigé . Soit $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $r \geq 0$. f est différentiable en $(0,0)$ et $d_0 f(x,y) = 0$ puisque

$$\lim_{r\to 0_+} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{r} = \underset{r\to 0}{r} \sin(\frac{1}{r}) = 0$$

Si $(x,y) \neq (0,0)$ la fonction f est partiellement différentiable (même différentiable) et en notant que f est à symétrie radiale :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{x}{r}\big(2r\sin r^{-1} - \cos r^{-1}\big),$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{y}{r}\big(2r\sin r^{-1} - \cos r^{-1}\big)$$

Ces fonctions n'ont pas de limite lorsque $(x,y) \to (0,0)$ (à cause du terme $\cos r^{-1}$).

5. **Hyperplan tangent.** La fonction est partiellement dérivable car les polynomes et les fonctions trigonométriques sont dérivable.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y\cos x - 2y^2 \sin x \cos x \\ \sin x + 2y\cos^2 x \end{pmatrix}$$

Noter que $f(0,1) = 1$ et

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

L'équation du plan tangent est donnée par

$$z = 1 + x + 2(y-1) = -1 + x + 2y.$$

6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ et $r = ||\mathbf{x}||_2$.
   (a) Montrer que pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ on a

$$\Delta f(r) = f''(r) + \frac{n-1}{r} f'(r)$$

Corrigé. Par la règle de composition

$$D_k f(r) = f'(r) d_k r = f'(r)\frac{x_k}{r}$$

$$\begin{aligned}
D_{kk}f(r) &= D_k\left(f'(r)\frac{x_k}{r}\right)\\
&= f''(r)\frac{x_k}{r}\frac{x_k}{r} + f'(r)\frac{1}{r} - f'(r)\frac{x_k^2}{r^3}\\
&= f''(r)\frac{x_k^2}{r^2} + f'(r)\frac{1}{r} - f'(r)\frac{x_k^2}{r^3}
\end{aligned}$$

Donc

$$\Delta f(r) = \sum_{k=1}^{n} D_{kk}f(r) = f''(r) + \frac{n-1}{r}\,f'(r)$$

car $r^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$.

(b) Soit $f'(0) = 0$. Donner

$$\lim_{r\to 0} \Delta f(r).$$

Corrigé.

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0} \Delta f(r) &= \lim_{r\to 0} f''(r) + \frac{n-1}{r}\,f'(r)\\
&= f''(0) + (n-1)\lim_{r\to 0}\frac{f'(r)-f'(0)}{r}\\
&= (n-1)f''(0) + f''(0)\\
&= nf''(0)
\end{aligned}$$

(c) Soit $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Calculer $\Delta f(x,y,z)$.

Corrigé. $\Delta f(x,y,z) = -f(x,y,z)$. Soit on calcul les dérivés partielles D_{xx}, D_{yy} et D_{zz} ou on utilise le fait que f est une fonction à symétire sphérique :

$$f(x,y,z) = g(r) = \frac{\sin r}{r}$$

Donc

$$\Delta f(x,y,z) = g''(r) + \frac{2}{r}\,g'(r)$$

Le calcul devient encore plus facile si on note que

$$g''(r) + \frac{2}{r}\,g'(r) = r^{-2}(r^2g'(r))' = r^{-2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\,g(r)}{dr}\right)$$

car

$$r^2g'(r) = r\,\cos r - \sin r$$

et donc

$$(r^2g'(r))' = (r\,\cos r - \sin r)' = -r\,\sin r.$$

i.e.

$$g''(r) + \frac{2}{r}\,g'(r) = -\frac{\sin r}{r} = -g(r).$$

7. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$ on considère la fonction $f(x,t)$ définie par

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\ \exp(-\frac{x^2}{4t}).$$

   (a) Montrer que f vérifie l'équation de chaleur, i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0$$

   Corrigé.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\frac{x}{2t}\, f(x,t)$$

   et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = -\frac{1}{2t}\, f(x,t) - \frac{x}{2t}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2})f(x,t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

   (b) Calculer

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\ dx$$

   Corrigé. Par le changement de variable $y = x/\sqrt{2t}$ i.e. $dx/dy = \sqrt{2t}$, on obtient l'intégrale de Gauss :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\ dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{y^2}{2}}\ dy = 1$$

   (c) Soit $g(x,y,t)$ donnée par $g(x,y,t) = f(x,t)f(y,t)$. Calculer

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,y,t) - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,t) - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y,t).$$

Remarque : $\frac{\partial^2}{\partial x^2} = D_{xx}$ etc.

Corrigé. Par la règle du produit et le résultat de (a) nous avons

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x,y,t) - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y,t) - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y,t) =$$
$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)f(y,t) + f(x,t)\frac{\partial f}{\partial t}(y,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)f(y,t) - f(x,t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y,t) =$$
$$f(x,t)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(y,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y,t)\right) + f(y,t)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t)\right) = 0.$$

8. Donner la matrice hessienne et le Laplacian de

$$f(x,y) = (x-y)\cos(x+y).$$

Corrigé.

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \cos(x+y) - (x-y)\sin(x+y) \\ -\cos(x+y) - (x-y)\sin(x+y) \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{Hess}\,(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -2\sin(x+y) - (x-y)\cos(x+y) & -(x-y)\cos(x+y) \\ -(x-y)\cos(x+y) & 2\sin(x+y) - (x-y)\cos(x+y) \end{pmatrix}.$$

$$\Delta f(x,y) = -2f(x,y).$$

9. **Dérivées partielles.**

(a) Soit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Montrer que la fonction $f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle$ est de classe C^2. Donner sa matrice Hessienne et son Laplacien. Donner la matrice symétrique $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ telle que $f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$.

Corrigé. Par l'exercice 3 :

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_k} = a_k \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle + b_k \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle$$

d'où

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j x_k} = a_k b_j + a_j b_k.$$

On en déduit que la matrice hessienne est constante et $\mathrm{Hess}\,(f) = \mathbf{b}\rangle\langle\mathbf{a} + \mathbf{a}\rangle\langle\mathbf{b}$ dans la notation bra-ket. Le Laplacien est donné apr la trace de cette matrice, alors

$$\triangle f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_j b_j + a_j b_j = 2\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle.$$

La matrice A qui engendre la forme quadratique est donné par $2A = \mathrm{Hess}\,(f)$.

(b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donné par $f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} g(x_k)$ où x_k dénote la k-ième composante du vecteur $\mathbf{x}$, $x_k = \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{x} \rangle$. Donner la matrice Hessienne et le Laplacien de f.

Corrigé. Par l'exercice 3 :

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} = g'(x_j)$$

d'où

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_j x_k} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k, \\ g''(x_j) & \text{si } j = k. \end{cases}$$

Par conséquent la matrice hessienne est une matrice diagonale :

$$\mathrm{Hess}\,(f)(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} g''(x_k) E_{kk}$$

et $\triangle f(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} g''(x_k)$.

10. Soit $z = x + iy$, $i^2 = -1$. Admettons que $D_x z = 1$ et $D_y z = i$. Soit $\Delta = D_{xx} + D_{yy}$. Pour tout entier naturel m calculer

$$\Delta z^m,\ \Delta \bar{z}^m,\ \Delta \mathrm{Re}\, z^m,\ \Delta \mathrm{Im}\, z^m.$$

Pour $m = 1, 2, 3, 4$ donner $\mathrm{Re}\, z^m$ et $\mathrm{Im}\, z^m$.

Corrigé.

$$\Delta z^m = m(m-1)z^{m-2} + m(m-1)i^2 z^{m-2} = 0$$

$$\Delta \bar{z}^m = m(m-1)\bar{z}^{m-2} + m(m-1)i^2 \bar{z}^{m-2} = 0$$

et par la linéarité du laplacien

$$\Delta \mathrm{Re}\, z^m = \frac{\Delta z^m + \Delta \bar{z}^m}{2} = 0$$

$$\Delta \mathrm{Im}\, z^m = \frac{\Delta z^m - \Delta \bar{z}^m}{2i} = 0.$$

Explicitement

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Re}\, z = x & \mathrm{Im}\, z = y \\ \mathrm{Re}\, z^2 = x^2 - y^2 & \mathrm{Im}\, z^2 = 2xy \\ \mathrm{Re}\, z^3 = x^3 - 3xy^2 & \mathrm{Im}\, z^3 = 3x^2y - y^3 \\ \mathrm{Re}\, z^4 = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 & \mathrm{Im}\, z^4 = 4x^3y - 4xy^3 \end{array}$$

11. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Soient $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $C^2(U)$. Vérifier que

$$\Delta(fg)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})\Delta g(\mathbf{x}) + 2\langle \nabla f(\mathbf{x}), \nabla g(\mathbf{x})\rangle + g(\mathbf{x})\Delta f(\mathbf{x})$$

pour tout $\mathbf{x} \in U$. En utilisant cette identité et l'exercice 5 de la série précédente calculer ensuite le Laplacien de

$$h(x, y, z) = g(x, y)f(x, y, z) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

sur $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0\}$.

Corrigé. Par la règle du produit pour tout $k = 1, ..., n$.

$$D_{kk}(fg) = fD_{kk} + 2D_k f D_k g + gD_{kk}f.$$

La somme sur k donne l'identité desirée. Par la série précédente on a

$$\Delta f(x, y, z) = -f(x, y, z)$$

De plus,

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{1}{r}(\frac{\sin r}{r})' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

On calcul
$$\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y(x-y)(x+y)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{x(x-y)(x+y)}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$
et
$$\Delta g(x,y) = -\frac{4g(x,y)}{x^2+y^2}.$$
En utilisant $\langle \nabla f(x,y,z), \nabla g(x,y) \rangle = 0$ on obtient
$$\Delta h(x,y,z) = -h(x,y,z) - \frac{4h(x,y,z)}{x^2+y^2}.$$

Chapitre 4

Champs vectoriels sur $\mathbb{R}^n$

4.1 Exercices

1. **Matrice jacobienne.** Calculer la matrice jacobienne des applications suivantes :
   (a) Soit $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donné par
   $$\mathbf{u}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x+y \end{pmatrix}$$
   (b) Soient $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnés par
   $$\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ xy \end{pmatrix}$$
   $$\mathbf{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-2z \\ x^2+y^2+2z \end{pmatrix}$$
   Calculer la matrice jacobienne de $\mathbf{w} \circ \mathbf{v}$en calculant d'abord cette composition et ensuite par la règle de composition.
   (c) Soient $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{w} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnés par
   $$\mathbf{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{y+2z} \\ x^2+yz \end{pmatrix}$$
   $$\mathbf{w}(x,y) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin y \end{pmatrix}$$
   Calculer la matrice jacobienne de $\mathbf{w} \circ \mathbf{v}$en calculant d'abord cette composition et ensuite par la règle de composition.
2. **Matrice jacobienne.** Soit $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donné par
   $$\mathbf{v}(r,\theta,\phi) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta).$$
   Donner la matrice jacobienne $J_{\mathbf{v}}$ et le jacobien $\det J_{\mathbf{v}}$.

3. Soit $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un champ vectoriel de classe C^2. On définit le laplacien de $\mathbf{v}$ par
$$\Delta\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Delta v_1(\mathbf{x}) \\ \Delta v_2(\mathbf{x}) \\ \Delta v_3(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$
Calculer
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{x}) + \Delta\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \nabla\langle\nabla, \mathbf{v}(\mathbf{x})\rangle.$$
4. Pour $\mathbf{v}, \mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ des champs vectoriels de classe C^1 montrer la formule
$$\langle\nabla, \mathbf{v} \times \mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{w}, \nabla \times \mathbf{v}\rangle - \langle\mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{w}\rangle.$$
5. Donner les matrices jacobiennes des applications suivantes :
$$\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+x^2+y^2} \\ \frac{2y}{1+x^2+y^2} \\ \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}, \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{1+z} \\ \frac{y}{1+z}, \end{pmatrix}$$
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \langle\mathbf{v}(x,y), \mathbf{v}(x,y)\rangle$$
et
$$\mathbf{w} \circ \mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
Donner une interprétation du résultat.
6. **Equation d'Euler.** Soit $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1.
   (a) Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} u_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = J_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}),$$
$$\nabla\frac{1}{2}\langle\mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x})\rangle = J_{\mathbf{u}}^T(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})$$
   (b) Vérifier que $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (t+t_0)^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ est une solution de l'équation d'Euler
$$\frac{\partial\mathbf{v}(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} v_k(\mathbf{x},t)\frac{\partial}{\partial x_k}\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{0}.$$
   pour tous $t > -t_0$ et $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.
7. Etudier le changement de variables donné par
$$x = \sin s \cosh t, \quad y = \cos s \sinh t.$$
Donner sa matrice jacobienne, notée $J_{\mathbf{v}}$, et calculer $(J_{\mathbf{v}})^T J_{\mathbf{v}}$. Soit $f(x,y) = f(\sin s \cosh t, \cos s \sinh t)$ une fonction de classe C^2. Calculer
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial t^2}.$$
Utiliser ce résultat pour donner le laplacien d'une fonction $g(s,t)$ de classe C^2 en fonction de coordonnés (s,t).

8. Changement de coordonnés entre le coordonnés sphériques et les coordonnés cartésien dans $\mathbb{R}^3$: Sur $U := \{(r,\theta,\phi) : (r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ on considère l'application

$$\begin{aligned} x &= v_1(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\cos\phi \\ y &= v_2(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\sin\phi \\ z &= v_3(r,\theta,\phi) = r\cos\theta \end{aligned}$$

Montrer que $\mathbf{v}$ est localement inversible. Montrer ensuite que pour $(x,y,z) \in W := \{(x,y,z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$ l'application réciproque $\mathbf{w} = \mathbf{v}^{-1}$ est donnée par

$$\begin{aligned} r &= w_1(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= w_2(x,y,z) = \arccos\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \phi &= w_3(x,y,z) = \arcsin\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

Calculer la matrice jacobienne et le jacobien de $\mathbf{w}$. Donner l'ensemble $\mathbf{w}(W)$.

9. Changement de coordonnés entre le coordonnés sphériques et les coordonnés cartésien dans $\mathbb{R}^3$: Sur $U := \{(r,\theta,\phi) : (r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ on considère l'application

$$\begin{aligned} x &= v_1(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\cos\phi \\ y &= v_2(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\sin\phi \\ z &= v_3(r,\theta,\phi) = r\cos\theta \end{aligned}$$

Soit $g(r,\theta,\phi)$ une fonction de classe $C^2(U)$. Calculer

$$||\nabla_{x,y,z}\, g(r,\theta,\phi)||_2^2.$$

Montrer que

$$\begin{aligned} &\Delta_{x,y,z}\, g(r,\theta,\phi) \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\right] g(r,\theta,\phi). \end{aligned}$$

10. Soient (r,θ,ϕ) les coordonnés sphériques dans $\mathbb{R}^3$. Pour $l \in \mathbb{N}$ soit P_l le l-ième polynôme de Legendre donné par

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d\,t^l}(t^2-1)^l.$$

Donner $P_0(t), P_1(t)$ et $P_2(t)$. En utilisant les rélations

$$(t^2-1)\frac{d\,P_l(t)}{d\,t} = l\,tP_l(t) - lP_{l-1}(t), \qquad \frac{d\,P_{l-1}(t)}{d\,t} = t\frac{d\,P_l(t)}{d\,t} - lP_l(t)$$

montrer que $f(r,\theta) := r^l P_l(\cos\theta)$ vérifie

$$\Delta_{x,y,z}\, f(r,\theta) = 0.$$

11. **Fonctions implicites I.** Montrer que l'équation

$$\ln x + e^{\frac{y}{x}} = 1$$

définit au voisinage du point 1 une fonction implicite $y = g(x)$ telle que $g(1) = 0$. Donner l'équation de la tangente à la courbe $y = g(x)$ en 1.

12. **Fonctions implicites II.** Montrer que l'équation

$$\cos(x^2 + y) + \sin(x + y) + e^{x^3 y} = 2$$

définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = g(x)$ telle que $g(0) = \pi/2$. Montrer que la fonction g admet un maximum local en 0.

13. **Fonctions implicites III.** Montrer que l'équation

$$x^5 + xyz + y^3 + 3xz^4 = 2$$

définit au voisinage du point $(1, -1)$ une fonction implicite $z = g(x, y)$ telle que $g(1, -1) = 1$. Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = g(x, y)$ en $(1, -1)$.

4.2 Corrigés

1. **Matrice jacobienne.** Calculer la matrice jacobienne des applications suivantes :

   (a) Soit $\mathbf{u} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donné par

$$\mathbf{u}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ x+y \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{u}}(x,y) &= \begin{pmatrix} D_1u_1(x,y) & D_2u_1(x,y) \\ D_1u_2(x,y) & D_2u_2(x,y) \\ D_1u_3(x,y) & D_2u_3(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_xu_1(x,y) & D_yu_1(x,y) \\ D_xu_2(x,y) & D_yu_2(x,y) \\ D_xu_3(x,y) & D_yu_3(x,y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   (b) Soient $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ et $\mathbf{w} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnés par

$$\mathbf{v}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ xy \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-2z \\ x^2+y^2+2z \end{pmatrix}$$

   Calculer la matrice jacobienne de $\mathbf{w} \circ \mathbf{v}$en calculant d'abord cette composition et ensuite par la règle de composition.

$$J_{\mathbf{v}}(x,y) = \begin{pmatrix} D_1v_1(x,y) & D_2v_1(x,y) \\ D_1v_2(x,y) & D_2v_2(x,y) \\ D_1v_3(x,y) & D_2v_3(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$$

   et

$$J_{\mathbf{w}}(x,y,z) = \begin{pmatrix} D_1w_1(x,y,z) & D_2w_1(x,y,z) & D_3w_1(x,y,z) \\ D_1w_2(x,y,z) & D_2w_2(x,y,z) & D_3w_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2 \\ 2x & 2y & 2 \end{pmatrix}$$

   Donc

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{w}\circ\mathbf{v}}(x,y) &= \begin{pmatrix} 2v_1(x,y) & 2v_2(x,y) & -2 \\ 2v_1(x,y) & 2v_2(x,y) & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2y & 2x & -2 \\ -2y & 2x & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ y & x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x-2y & 2y-2x \\ 2x+2y & 2x+2y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En calculant $\mathbf{w} \circ \mathbf{v}$ on vériefie aisement ce résultat :

$$(\mathbf{w} \circ \mathbf{v})(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2xy \\ x^2 + y^2 + 2xy \end{pmatrix}$$

(c) Soient $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{w} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donnés par

$$\mathbf{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^{y+2z} \\ x^2 + yz \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{w}(x, y) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin y \end{pmatrix}$$

Calculer la matrice jacobienne de $\mathbf{w} \circ \mathbf{v}$en calculant d'abord cette composition et ensuite par la règle de composition.
Alors,

$$J_{\mathbf{v}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & e^{y+2z} & 2e^{y+2z} \\ 2x & z & y \end{pmatrix}$$

et

$$J_{\mathbf{w}}(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & \cos y \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{w} \circ \mathbf{v}}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} -\sin\, v_1(x, y) & 0 \\ 0 & \cos\, v_2(x, y) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & e^{y+2z} & 2e^{y+2z} \\ 2x & z & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(e^{y+2z}) & 0 \\ 0 & \cos(x^2 + yz) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & e^{y+2z} & 2e^{y+2z} \\ 2x & z & y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -e^{y+2z} \sin(e^{y+2z}) & -2e^{y+2z} \sin(e^{y+2z}) \\ 2x \cos(x^2 + yz) & z \cos(x^2 + yz) & y \cos(x^2 + yz) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En calculant $\mathbf{w} \circ \mathbf{v}$ on vériefie aisement ce résultat :

$$(\mathbf{w} \circ \mathbf{v})(x, y) = \begin{pmatrix} \cos(v_1(x, y, z)) \\ \sin(v_2(x, y, z)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(e^{y+2z}) \\ \sin(x^2 + yz) \end{pmatrix}.$$

2. **Matrice jacobien.** La matrice jacobien de $\mathbf{v}$ définie par

$$\mathbf{v}(r, \theta, \phi) = (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta).$$

est

$$J_{\mathbf{v}}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi & r \cos\theta \cos\phi & -r \sin\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi & r \cos\theta \sin\phi & r \sin\theta \cos\phi \\ \cos\theta & -r \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned} \det J_{\mathbf{v}}(r, \theta, \phi) &= r \cos\theta \cos\phi\, r \sin\theta \cos\phi \cos\theta \\ &\quad + r \sin\theta \sin\phi \sin\theta \sin\phi\, r \sin\theta \\ &\quad + r \sin\theta \sin\phi\, r \cos\theta \sin\phi \cos\theta \\ &\quad + \sin\theta \cos\phi\, r \sin\theta \cos\phi\, r \sin\theta \\ &= r^2 \sin\theta (\cos^2\phi \cos^2\theta + \sin^2\phi \sin^2\theta \\ &\quad + \cos^2\phi \sin^2\theta + \cos^2\phi \sin^2\theta) \\ &= r^2 \sin\theta \end{aligned}$$

3. Il suffit de considérer uniquement le premier composant (Pourquoi ?). Donc en utilisant $D_{ij}v_k = D_{ji}v_k$:

$$\begin{aligned}
&D_2(D_1v_2 - D_2v_1) - D_3(D_3v_1 - D_1v_3) + \Delta v_1 - D_1(\mathrm{div}(\mathbf{v}))\\
&= D_{12}v_2 - D_{22}v_1 - D_{33}v_1 + D_{31}v_3 + \Delta v_1 - D_{11}v_1 - D_{12}v_2 - D_{13}v_3\\
&= 0
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v})(\mathbf{x}) + \Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \nabla\langle \nabla, \mathbf{v}(\mathbf{x})\rangle = \mathbf{0}.$$

4.

$$\begin{aligned}
&\langle \nabla, \mathbf{v} \times \mathbf{w}\rangle\\
&= D_1(v_2w_3 - v_3w_2) + D_2(v_3w_1 - v_1w_3) + D_3(v_1w_2 - v_2w_1)\\
&= w_1(D_2v_3 - D_3v_2) + w_2(D_3v_1 - D_1v_3) + w_3(D_1v_2 - D_2v_1) - v_1(D_2w_3 - D_3w_2) - \dots\\
&= \langle \mathbf{w}, \nabla \times \mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{v}, \nabla \times \mathbf{w}\rangle.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
J_{\mathbf{v}}(x,y) &= \begin{pmatrix} D_xv_1(x,y) & D_yv_1(x,y)\\ D_xv_2(x,y) & D_yv_2(x,y)\\ D_xv_3(x,y) & D_yv_3(x,y)\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} 2(1-x^2+y^2) & -4xy\\ -4xy & 2(1+x^2-y^2)\\ -4x & -4y\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\mathbf{w}}(x,y,z) &= \begin{pmatrix} D_xw_1(x,y,z) & D_yw_1(x,y,z) & D_zw_1(x,y,z)\\ D_xw_2(x,y,z) & D_yw_2(x,y,z) & D_zw_2(x,y,z)\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{(1+z)^2}\begin{pmatrix} 1+z & 0 & -x\\ 0 & 1+z & -y\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

On note que $f(x,y) = \langle \mathbf{v}(x,y), \mathbf{v}(x,y)\rangle = 1$ et par conséquent

$$J_f(x,y) = (0,0).$$

Par la règle de composition

$$\begin{aligned}
J_{\mathbf{w}\circ\mathbf{v}}(x,y) &= \frac{1}{(1+v_3(x,y))^2}\begin{pmatrix} 1+v_3(x,y) & 0 & -v_1(x,y)\\ 0 & 1+v_3(x,y) & -v_2(x,y)\end{pmatrix}\\
&\quad\cdot \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} 2(1-x^2+y^2) & -4xy\\ -4xy & 2(1+x^2-y^2)\\ -4x & -4y\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

L'application $\mathbf{v}$ est une application du plan dans la sphère d'unité $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ car $\langle \mathbf{v}(x,y), \mathbf{v}(x,y)\rangle = 1$. Plus precisement, l'image de $\mathbf{v}$ est toute la sphère à l'exception du pôle de sud $(0,0,-1)$. L'application $\mathbf{w}$ restreinte sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\}$ donne l'application réciproque de $\mathbf{v}$. L'application $\mathbf{w} : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est appelée la projection stéréographique.

6. **Equation d'Euler.** Soit $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1.
   (a) Par une étappe intermédiare

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla u_k(\mathbf{x}) \rangle \mathbf{e}_k = J_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}).$$

   Pour la deuxième identité noter que

$$\nabla \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rangle = \sum_{k=1}^{n} u_k(\mathbf{x}) \nabla u_k(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_k(\mathbf{x}) \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{e}_j$$

   et

$$J_{\mathbf{u}}^T(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_k(\mathbf{x}) \frac{\partial u_k(\mathbf{x})}{\partial x_j} \mathbf{e}_j.$$

   (b) Vérifier que $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (t+t_0)^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)$ est une solutions de l'équation d'Euler

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} v_k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

   pour tous $t > -t_0$ et $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$.

Corrigé.

$$\frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -(t + t_0)^{-2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

et par la première partie en appliquant $J_{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}(\mathbf{x}) = 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} v_k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (t + t_0)^{-2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

d'où le résultat.

7. Etudier le changement de variables donné par

$$x = \sin s \cosh t, \quad y = \cos s \sinh t.$$

Donner sa matrice jacobienne, notée $J_{\mathbf{v}}$, et calculer $(J_{\mathbf{v}}^T J_{\mathbf{v}}$. Soit $f(x, y) = f(\sin s \cosh t, \cos s \sinh t)$ une fonction de classe C^2. Calculer

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial t^2}.$$

Utiliser ce résultat pour donner le laplacien d'une fonction $g(s, t)$ de classe C^2 en fonction de coordonnés (s, t).

Corrigé. La matrice jacobienne est donnée par

$$J_{\mathbf{v}}(s, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s \cosh t & \sin s \sinh t \\ -\sin s \sinh t & \cos s \cosh t \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $\det J_{\mathbf{v}}(s,t) = \cos^2 s \cosh^2 t + \sin^2 s \sinh^2 t > 0$ pour tout $(s,t) \neq ((2k+1)\pi/2, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$. Alors, $J_{\mathbf{v}}(s,t)$ est localement inversible. On a

$$\begin{aligned} J_{\mathbf{v}}(s,t) J_{\mathbf{v}}(s,t)^T &= \begin{pmatrix} (\frac{\partial x}{\partial s})^2 + (\frac{\partial x}{\partial t})^2 & \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t} & (\frac{\partial y}{\partial s})^2 + (\frac{\partial y}{\partial t})^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \det J_{\mathbf{v}}(s,t) & 0 \\ 0 & \det J_{\mathbf{v}}(s,t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Noter, que ce tenseur métrique est un multiple de la matrice d'identité. Pour $f(x,y) = f(\sin s \cosh t, \cos s \sinh t)$ une fonction de classe C^2 on trouve par la règle de composition (voir aussi vos notes du cours)

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial s} = \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial s^2} &= \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \\ &+ 2\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} \\ &+ \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \end{aligned}$$

et des expressions correspondantes pour les dérivées par rapport à la variable t. En utilisant les relations

$$\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} = -x, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = x$$

et

$$\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = -y, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = y$$

on obtient

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial t^2} = \det D\mathbf{v}(s,t)\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right).$$

8. Changement de coordonnés entre le coordonnés sphériques et les coordonnés cartésien dans $\mathbb{R}^3$: Sur $U := \{(r, \theta, \phi) : (r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ on considère l'application

$$\begin{aligned}
x &= v_1(r, \theta, \phi) = r \sin\theta \cos\phi \\
y &= v_2(r, \theta, \phi) = r \sin\theta \sin\phi \\
z &= v_3(r, \theta, \phi) = r \cos\theta
\end{aligned}$$

Montrer que $\mathbf{v}$ est localement inversible. Montrer ensuite que pour $(x, y, z) \in W := \{(x, y, z) : x > 0, y > 0, z > 0\}$ l'application réciproque $\mathbf{w} = \mathbf{v}^{-1}$ est donnée par

$$\begin{aligned}
r &= w_1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\
\theta &= w_2(x, y, z) = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\
\phi &= w_3(x, y, z) = \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}
\end{aligned}$$

Calculer la matrice jacobienne et le jacobien de $\mathbf{w}$. Donner l'ensemble $\mathbf{w}(W)$.

Corrigé. La matrice jacobien de $\mathbf{v}$ définie par

$$\mathbf{v}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\phi \\ r \sin\theta \sin\phi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}$$

est

$$J_{\mathbf{v}}(r, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi & r \cos\theta \cos\phi & -r \sin\theta \sin\phi \\ \sin\theta \sin\phi & r \cos\theta \sin\phi & r \sin\theta \cos\phi \\ \cos\theta & -r \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\det J_{\mathbf{v}}(r, \theta, \phi) &= r \cos\theta \cos\phi \, r \sin\theta \cos\phi \cos\theta \\
&\quad + r \sin\theta \sin\phi \sin\theta \sin\phi \, r \sin\theta \\
&\quad + r \sin\theta \sin\phi \, r \cos\theta \sin\phi \cos\theta \\
&\quad + \sin\theta \cos\phi \, r \sin\theta \cos\phi \, r \sin\theta \\
&= r^2 \sin\theta (\cos^2\phi \cos^2\theta + \sin^2\phi \sin^2\theta \\
&\quad + \cos^2\phi \sin^2\theta + \cos^2\phi \sin^2\theta) \\
&= r^2 \sin\theta
\end{aligned}$$

Alors $\mathbf{v}$ est localement inversible. Le calcul de $\mathbf{w}$ est évident. Pour calucler la matrice jacobienne de $\mathbf{w}$ posons $s = \sqrt{x^2 + y^2}$. En utilisant $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ nous avons

$$J_{\mathbf{w}}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x/r & y/r & z/r \\ zx/r^2 s & zy/r^2 s & -s/r^2 \\ -y/s^2 & x/s^2 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\det J_{\mathbf{w}}(x,y,z) = 1/rs$. On peut obtenir le résultat pour le jacobien à partir du jacobien de $\mathbf{v}$:

$$\det J_{\mathbf{w}}(x,y,z) = \frac{1}{\det D\mathbf{v}(r,\theta,\phi)} = \frac{1}{r^2\sin\theta} = \frac{1}{rs}.$$

$$\mathbf{w}(W) = \{(r,\theta,\phi) : r > 0, 0 < \theta < \pi/2, 0 < \phi < \pi/2\}.$$

9. Changement de coordonnés entre le coordonnés sphériques et les coordonnés cartésien dans $\mathbb{R}^3$: Sur $U := \{(r,\theta,\phi) : (r > 0, 0 < \theta < \pi, 0 < \phi < 2\pi\}$ on considère l'application

$$\begin{aligned} x &= v_1(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\cos\phi \\ y &= v_2(r,\theta,\phi) = r\sin\theta\sin\phi \\ z &= v_3(r,\theta,\phi) = r\cos\theta \end{aligned}$$

Soit $g(r,\theta,\phi)$ une fonction de classe $C^2(U)$. Calculer

$$||\nabla_{x,y,z}\, g(r,\theta,\phi)||_2^2.$$

Montrer que

$$\begin{aligned} &\Delta_{x,y,z}\, g(r,\theta,\phi) \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)\right] g(r,\theta,\phi). \end{aligned}$$

Corrigé. Notons que

$$(J_{\mathbf{v}}^{-1}(x,y,z))J_{\mathbf{v}}^{-1}(x,y,z)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/s^2 \end{pmatrix}$$

et $s^2 = r^2\sin^2\theta$. Par conséquent,

$$||\nabla_{x,y,z}\, g(r,\theta,\phi)||_2^2 = \big(D_r\, g(r,\theta,\phi)\big)^2 + \frac{1}{r^2}\big(D_\theta\, g(r,\theta,\phi)\big)^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\big(D_\phi\, g(r,\theta,\phi)\big)^2.$$

Ensuite, un simple calcul montre que

$$\Delta_{x,y,z} r = \frac{2}{r},$$

$$\Delta_{x,y,z}\theta = D_x\frac{zx}{r^2 s} + D_y\frac{zy}{r^2 s} + D_z\frac{-s}{r^2} = \frac{z}{r^2 s} = \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}$$

et

$$\Delta_{x,y,z}\phi = D_x\frac{-y}{s^2} + D_y\frac{x}{s^2} = 0.$$

Le résultat est une conséquence de l'identité dérivée au cours. Dans ce cas elle s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} &\Delta_{x,y,z}\, g(r,\theta,\phi) \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right. \\ &\left. + \Delta_{x,y,z} r\frac{\partial}{\partial r} + \Delta_{x,y,z}\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \Delta_{x,y,z}\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right] g(r,\theta,\phi). \end{aligned}$$

10. Soient (r,θ,ϕ) les coordonnés sphériques dans $\mathbb{R}^3$. Pour $l\in\mathbb{N}$ soit P_l le l-ième polynôme de Legendre donné par

$$P_l(t)=\frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{d\,t^l}(t^2-1)^l.$$

Donner $P_0(t), P_1(t)$ et $P_2(t)$. En utilisant les rélations

$$(t^2-1)\frac{d\,P_l(t)}{d\,t}=l\,tP_l(t)-lP_{l-1}(t),\qquad \frac{d\,P_{l-1}(t)}{d\,t}=t\frac{d\,P_l(t)}{d\,t}-lP_l(t)$$

montrer que $f(r,\theta):=r^lP_l(\cos\theta)$ vérifie

$$\Delta_{x,y,z}\,f(r,\theta)=0.$$

Corrigé. D'abord

$$P_0(t)=1,\quad P_1(t)=t,\quad P_2(t)=\frac{3t^2-1}{2}.$$

Par l'exercice précédent

$$\Delta_{x,y,z}\,f(r,\theta)=\left[\frac{\partial^2}{\partial\,r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial\,r}+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\,\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\,\theta}\right)\right]f(r,\theta).$$

Donc

$$\Delta_{x,y,z}\,f(r,\theta)=l(l+1)r^{l-2}P_l(\cos\theta)+r^{l-2}\frac{d^2\,P_l(\cos\theta)}{d\theta^2}+r^{l-2}\cot\theta\frac{d\,P_l(\cos\theta)}{d\,\theta}.$$

Le changement de variable $t=\cos\theta$ donne

$$\frac{d\,P_l(\cos\theta)}{d\,\theta}=\frac{d\,t}{d\,\theta}\frac{d\,P_l(t)}{d\,t}=-\sin\theta\frac{d\,P_l(t)}{d\,t}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2\,P_l(\cos\theta)}{d\,\theta^2}&=\frac{d^2\,t}{d\,\theta^2}\frac{d\,P_l(t)}{d\,t}+\left(\frac{d\,t}{d\,\theta}\right)^2\frac{d^2\,P_l(t)}{d\,t^2}\\&=-\cos\theta\frac{d\,P_l(t)}{d\,t}+\sin^2\theta\frac{d^2\,P_l(t)}{d\,t^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\Delta_{x,y,z}\,f(r,\theta)=r^{l-2}\left(l(l+1)P_l(t)+(1-t^2)\frac{d^2\,P_l(t)}{d\,t^2}-2t\frac{d\,P_l(t)}{d\,t}\right)$$

Ensuite, nous transformons cette expression en utilisant les rélations données pour les fonctions $P_l(t)$:

$$\begin{aligned}&l(l+1)P_l(t)+(1-t^2)\frac{d^2\,P_l(t)}{d\,t^2}-2t\frac{d\,P_l(t)}{d\,t}\\&=l(l+1)P_l(t)+\frac{d}{d\,t}\left((1-t^2)\frac{d\,P_l(t)}{d\,t}\right)\\&=l(l+1)P_l(t)+\frac{d}{d\,t}\left(lP_{l-1}(t)-ltP_l(t)\right)\\&=l(l+1)P_l(t)+l\frac{d\,P_{l-1}(t)}{d\,t}-lt\frac{d\,P_l(t)}{d\,t}-lP_l(t)\\&=l(l+1)P_l(t)-l^2P_l(t)-lP_l(t)=0\end{aligned}$$

Donc $\Delta_{x,y,z}\, f(r,\theta) = 0$ sur tout $\mathbb{R}^3$ si $l \geq 2$. Si $l = 1$ l'origin $r = 0$ peut poser un problème mais on a $f(r,\theta) = r\cos\theta = z$, donc evidemment $\Delta_{x,y,z}\, f(r,\theta) = 0$.

11. **Fonctions implicites I.** Montrer que l'équation

$$\ln x + e^{\frac{y}{x}} = 1$$

définit au voisinage du point 1 une fonction implicite $y = g(x)$ telle que $g(1) = 0$. Donner l'équation de la tangente à la courbe $y = g(x)$ en 1.

Corrigé. On définit la fonction $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $U = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \ln x + e^{\frac{y}{x}} - 1$$

Alors, la fonction f est de classe $C^1(U)$ (elle est même de classe $C^k(U)$ pour tout $k \geq 1$) et pour tout $(x,y) \in U$:

$$D_2 f(x,y) = \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x}.$$

De plus, $f(1,0) = 0$ et $D_2 f(1,0) = 1 \neq 0$. Alors, par le théorème des fonctions implicites il existe un intervalle $I =]1-\epsilon, 1+\epsilon[$ et une unique fonction $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(I)$ telle que $g(1) = 0$ et $f(x, g(x)) = 0$. La dérivée de g est donnée par

$$g'(x) = -\frac{D_1 f(x,g(x))}{D_2 f(x,g(x))} = \frac{g(x)}{x} - e^{\frac{-g(x)}{x}}$$

Donc $g'(1) = -1$. Par conséquent, l'équation de la tangente à la courbe$y = g(x)$ en $x = 1$ est

$$y = g(1) + g'(1)(x-1) = 1 - x.$$

12. **Fonctions implicites II.** Montrer que l'équation

$$\cos(x^2 + y) + \sin(x+y) + e^{x^3 y} = 2$$

définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y = g(x)$ telle que $g(0) = \pi/2$. Montrer que la fonction g admet un maximum local en 0.

Corrigé. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \cos(x^2 + y) + \sin(x+y) + e^{x^3 y} - 2$$

Alors, la fonction f est de classe C^k, pour tout $k \geq 1$, et pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$D_2 f(x,y) = -\sin(x^2 + y) + \cos(x+y) + x^3 e^{x^3 y}.$$

De plus, $f(0,\pi/2) = 0$ et $D_2 f(0,\pi/2) = -1 \neq 0$. Alors, par le théorème des fonctions implicites il existe un intervalle $I =]-\epsilon, \epsilon[$ et une unique fonction

$g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^1(I)$ telle que $g(0) = \pi/2$ et $f(x, g(x)) = 0$. La dérivée de g est donnée par

$$g'(x) = -\frac{D_1 f(x, g(x))}{D_2 f(x, g(x))}$$

et $D_1 f(x, y) = -2x \sin(x^2 + y) + \cos(x + y) + 3x^2 y e^{x^3 y}$ Donc $g'(0) = 0$. La dérivée seconde en $x = 0$ est

$$g''(0) = -\frac{D_{11} f(0, \pi/2)}{D_2 f(0, \pi/2)} = -3.$$

13. **Fonctions implicites III.** Montrer que l'équation

$$x^5 + xyz + y^3 + 3xz^4 = 2$$

définit au voisinage du point $(1, -1)$ une fonction implicite $z = g(x, y)$ telle que $g(1, -1) = 1$. Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = g(x, y)$ en $(1, -1)$.

Corrigé. On définit la fonction $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, y, z) = x^5 + xyz + y^3 + 3xz^4 - 2$$

Alors, la fonction f est de classe C^k, pour tout $k \geq 1$, et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$D_3 f(x, y, z) = xy + 12xz^3.$$

De plus, $f(1, -1, 1) = 0$ et $D_3 f(1, -1, 1) = 11 \neq 0$. Alors, par le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage $B_\epsilon(1, -1) \subset \mathbb{R}^2$ et une unique fonction $g : B_\epsilon(1, -1) \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^k(B_\epsilon(1, -1))$ telle que $g(1, -1) = 1$ et $f(x, y, g(x, y)) = 0$. L'équation du plan tangent à la surface $z = g(x, y)$ en $(1, -1)$ est donnée par

$$0 = \langle \nabla f(1, -1, 1), \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \\ z - 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$$

i.e. en utilisant

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 5x^4 + yz + 3z^4 \\ xz + 3y^2 \\ xy + 12xz^3 \end{pmatrix}$$

on trouve

$$7x + 4y + 11z = 14.$$

Chapitre 5

Extremums locaux

5.1 Exercices

1. **Formes quadratiques I.** Calculer les matrices symétriques A et leurs valeurs propres des formes quadratiques $q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$ suivantes :

$$q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x,y) = 2x^2 + \frac{19}{2}y^2 + 56xy$$

$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x,y) = x^2 + y^2 + 2z(x-y)$$

   Etudier leurs points stationnaires.

2. **Formes quadratiques II.** Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction $f(\mathbf{x})$ définie par

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle$$

   admet un unique point stationnaire en $\mathbf{a} = A^{-1}\mathbf{v}$. Montrer ensuite que $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

3. **Formes quadratiques III.** Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction $f(\mathbf{x})$ définie par

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle$$

   est strictement convexe, c'est-à-dire

$$f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) < tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y})$$

   pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ et $0 < t < 1$.

4. Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y) = (1-x^2)\sin y.$$

5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^4 - x^2y^2 + y^3 - 18x^2 + 3y^2$$

   (a) Donner le gradient et la matrice Hessienne de f.
   (b) Donner les 4 points stationnaires de f et étudier leur nature.

6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x,y) = (x-y)^3 + 4x^2 - 3x + 3y.$$

   (a) Donner les points stationnaires de f et étudier leur nature. Calculer f en ces points.
   (b) Soit T le domaine donné par :

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y \geq 0, y \leq x \leq 4-y\}.$$

   Donner le minimum de le maximum de f sur T. En particulier,

      i. Montrer que T est borné.
      ii. Montrer que $\partial T \subset T$ et conclure que T est fermé.
      iii. Montrer que T est un triangle et donner ses sommets.
      iv. Expliquer pourquoi f atteint son minimum et son maximum sur T.
      v. Donner f sur le bord de T, i.e. $f|_{\partial T}$ et étudier ensuite $f|_{\partial T}$.
      vi. Donner le minimum de le maximum de f sur T.

7. Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y) = x^3 - 3x + xy^2.$$

   Trouver le maximum et le minimum de f sur les ensembles suivants :

$$S = [0,2] \times [-1,1], \quad T = [0,1] \times [0,1],$$

$$V = \{(x,y) : x, y \geq 0, x + 2y \leq 4\}, \quad W = \{(x,y) : 2x^2 + y^2 \leq 4\}$$

8. Trouver le maximum et le minimum de

$$f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y).$$

   sur l'ensemble S donné par

$$S = [0,\pi] \times [0,\pi].$$

Formules utiles - fonctions trigonométriques.

$$\sin 0 = 0 \quad \sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2} \quad \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\tfrac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos 0 = 1 \quad \cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} \quad \cos\tfrac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x), \quad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos(\frac{\pi}{2} + x)$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

9. Soit
$$E = \{(x,y) : 9x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$
Trouver les extremums de la fonction $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par
$$g(x,y) = 3x^2 + y^2.$$
10. Trouver les extremums de la fonction $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$h(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$
sous les conditions $x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 = 0$ et $xyz - 1 = 0$.
11. Trouver les extrema de la fonction $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par
$$h(x,y) = 4x^3 + 3yx^2 - 4y^3 - 48y$$
sous la condition $x^2 + xy + y^2 = 3$.
12. Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique avec des valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1} < \lambda_n$. Sur $S_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$ on considère la forme quadratique $h(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$. Montrer que
$$\lambda_1 = \min_{\mathbf{x} \in S_1} h(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_1 \rangle \quad \lambda_n = \max_{\mathbf{x} \in S_1} h(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v}_n, A\mathbf{v}_n \rangle$$
où $\mathbf{v}_i$ dénote le vecteur propre (normalisé) associé à λ_i. Donner
$$\min_{\mathbf{x} \in D} h(\mathbf{x})$$
où $D := \{\mathbf{x} \in S_1 \text{ et } \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0\}$.

5.2 Corrigés

1. **Formes quadratiques I.** Calculer les matrices symétriques A et leurs valeurs propres des formes quadratiques $q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ suivantes :
$$q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x,y) = 2x^2 + \frac{19}{2}y^2 + 56xy$$
$$q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad q(x,y) = x^2 + y^2 + 2z(x-y)$$
Etudier leurs points stationnaires.

Corrigé - 1.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 56 \\ 56 & 19 \end{pmatrix}$$
Son polynôme charactéristique est donnée par
$$p_A(\lambda) = \det(\lambda Id - A) = (\lambda - 4) \cdot (\lambda - 19) - 56^2.$$
Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -45$ et $\lambda_2 = 68$. La matrice est alors inversible. Donc $(x,y) = (0,0)$ est l'unique solution de
$$\nabla q(x,y) = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
La matrice A est indéfinie. Par conséquent, $(x,y) = (0,0)$ est un point selle de $q(x,y)$.

Corrigé - 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Son polynôme charactéristique est donnée par

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda Id - A) = (\lambda-2)^2\lambda - 4(\lambda-2) - 4(\lambda-2) = (\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-8).$$

Les valeurs propres sont $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 2$ et $\lambda_3 = 4$. La matrice est alors inversible. Donc $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ est l'unique solution de

$$\nabla q(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A est indéfinie. Par conséquent, $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ est un point selle de $q(x, y, z)$.

2. **Formes quadratiques II.** Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction $f(\mathbf{x})$ définie par

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle$$

admet un unique point stationnaire en $\mathbf{a} = A^{-1}\mathbf{v}$. Montrer ensuite que $f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{a}$.

Corrigé. Notons d'abord que A définie positive implique que A est inversible. Les points stationnaires de f sont donnés par les solution de l'équation $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ donc $A\mathbf{x} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Lorsque A est inversible cette équation admet comme unique solution le vecteur $\mathbf{a} = A^{-1}\mathbf{v}$. C'est un minimum local strict car $\mathrm{Hess}\,(f)(\mathbf{a}) = A > 0$. De plus,

$$f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\langle AA^{-1}\mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{v}\rangle - \langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{v}\rangle = -\frac{1}{2}\langle \mathbf{v}, A^{-1}\mathbf{v}\rangle$$

et (noter que A^{-1} est également symmétrique) par conséquent en écrivant

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, A^{-1}\mathbf{v}\rangle + \frac{1}{2}\langle AA^{-1}\mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle$$

on trouve

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\langle A(\mathbf{x} - A^{-1}\mathbf{v}), (\mathbf{x} - A^{-1}\mathbf{v})\rangle > 0$$

pour tout $\mathbf{x} \neq A^{-1}\mathbf{v}$.

3. **Formes quadratiques III.** Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction $f(\mathbf{x})$ définie par

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle$$

est strictement convexe, c'est-à-dire

$$f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) < tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y})$$

pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ et $0 < t < 1$.

Corrigé 1. Soit $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Par un calcul direct en utilisant la symétire de A :

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) = &\frac{t^2}{2} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \frac{(1-t)t^2}{2} \langle A\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle + \frac{2t(1-t)}{2} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle \\ &- t\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle - (1-t)\langle \mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle \end{aligned}$$

Pour obtenir l'expression $tf(\mathbf{x})+(1-t)f(\mathbf{y})$ on ajoute et soustrait $\frac{t}{2} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle$ et $\frac{1-t}{2} \langle A\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle$. Il en suit

$$\begin{aligned} f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) &= \frac{-t(1-t)}{2} \langle A\mathbf{x}, \mathbf{x}\rangle + \frac{-t(1-t)}{2} \langle A\mathbf{y}, \mathbf{y}\rangle + \frac{2t(1-t)}{2} \langle A\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle \\ &\quad + tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y}) \\ &= \frac{-t(1-t)}{2} \langle A(\mathbf{x}-\mathbf{y}), (\mathbf{x}-\mathbf{y})\rangle + tf(\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Par la positivité de A le premier terme est strictement négatif pour $0 < t < 1$ d'où l'affirmation.

Corrigé 2. Pour $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ fixes, $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, on définit $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ par

$$g(t) := f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}).$$

La fonction g est de classe C^2. En appliquant la règle de composition on calcul

$$g'(t) = \langle \nabla f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}), \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle (= \langle tA\mathbf{x} + (1-t)A\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle)$$

et

$$g''(t) = \langle \mathrm{Hess}(f)(t\mathbf{x}+(1-t)\mathbf{y})(\mathbf{x}-\mathbf{y})), \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle (= \langle A(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \mathbf{x}-\mathbf{y}\rangle)) > 0.$$

On conclut que g est strictement convexe. par conséquent, pour $0 < t < 1$

$$g(t) < (1-t)g(0) + tg(1)$$

ce qui est équivalent à

$$f(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) < tf(t\mathbf{x}) + (1-t)f(\mathbf{y}).$$

4. Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x,y) = (1-x^2)\sin y.$$

Corrigé . Les points staionnaires sont donnés par les solutions de

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{0} \quad \text{i.e.} \quad \begin{array}{r} -2x\sin y = 0 \\ (1-x^2)\cos y = 0 \end{array}.$$

La fonction f admet quatre familles des points stationnaires, à savoir :

$$P_k = (0, \frac{\pi}{2} + 2k\pi),\ Q_k = (0, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi),\ S_k = (-1, k\pi),\ T_k = (1, k\pi)$$

pour $k \in \mathbb{Z}$.
Démonstration : Si $x = 0$, alors $D_x f = 0$, et $D_y f = 0$ si et seulement si $\cos y = 0$ donc les P_k, Q_k. Si $\sin y = 0$, alors $y = k\pi$ et $D_y f = 0$ si et seulement si $x = -1$ ou $x = +1$, donc les S_k, T_k.
Pour étudier la nature de points stationnaires on calcul la matrice hessienne de f :

$$(\operatorname{Hess} f)(x, y) = \begin{pmatrix} -2\sin y & -2x\cos y \\ -2x\cos y & -(1-x^2)\sin y \end{pmatrix}$$

On a

$$(\operatorname{Hess} f)(P_k) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc des maximums locaux,

$$(\operatorname{Hess} f)(Q_k) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc des minimums locaux et

$$(\operatorname{Hess} f)(S_k) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix}, (\operatorname{Hess} f)(T_k) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2 \\ \pm 2 & 0 \end{pmatrix}$$

donc des points selles.

5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^4 - x^2y^2 + y^3 - 18x^2 + 3y^2$$

(a) Donner le gradient et la matrice Hessienne de f.
(b) Donner les 4 points stationnaires de f et étudier leur nature.

(a) $\mathbf{grad} f(x, y) \ = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2xy^2 - 36x \\ -2x^2y + 3y^2 + 6y \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Hess} f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2y^2 - 36 & -4xy \\ -4xy & -2x^2 + 6y + 6 \end{pmatrix}$$

Pour les points stationnaires : On doit résoudre le système

$$0 = 2x(2x^2 - y^2 - 18), \quad 0 = y(-2x^2 + 3y + 6)$$

Si $x = 0$ (première équation), alors par la deuxième équation $y = 0$ ou $3y + 6 = 0$, d'où $y = -2$. Si $y = 0$ (deuxième équation), alors par la première équation il suit reste encor $2x^2 - 18 = 0$ d'où $x = -3$ ou $x = 3$. Il reste le cas

$$0 = 2x^2 - y^2 - 18, \quad 0 = -2x^2 + 3y + 6$$

Insérer $2x^2 = y^2 + 18$ dans la deuxième équation : $0 = -y^2 + 3y - 14$. Il n'y a pas de solution réelle.

(b) Points stationnaires

Point stationnaire	Matrice Hessienne	Nature du point
$P_1 = (0,0)$	$\mathrm{Hess}(P_1) = \begin{pmatrix} -36 & 0 \\ 0 & +6 \end{pmatrix}$	point selle
$P_2 = (0,-2)$	$\mathrm{Hess}(P_2) = \begin{pmatrix} -44 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$	max. loc. stricte
$P_3 = (-3,0)$	$\mathrm{Hess}(P_3) = \begin{pmatrix} 72 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$	point selle
$P_4 = (3,0)$	$\mathrm{Hess}(P_4) = \begin{pmatrix} 72 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$	point selle

6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ défini par

$$f(x,y) = (x-y)^3 + 4x^2 - 3x + 3y.$$

(a) Donner les points stationnaires de f et étudier leur nature. Calculer f en ces points.

(b) Soit T le domaine donné par :

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y \geq 0, y \leq x \leq 4-y\}.$$

Donner le minimum de le maximum de f sur T. En particulier,

i. Montrer que T est borné.

ii. Montrer que $\partial T \subset T$ et conclure que T est fermé.
iii. Montrer que T est un triangle et donner ses sommets.
iv. Expliquer pourquoi f atteint son minimum et son maximum sur T.
v. Donner f sur le bord de T, i.e. $f|_{\partial T}$ et étudier ensuite $f|_{\partial T}$.
vi. Donner le minimum de le maximum de f sur T.

Corrigé. (a)

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 3(x-y)^2+8x-3 \\ -3(x-y)^2+3 \end{pmatrix}$$
$$\mathrm{Hess} f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-6y+8 & -6x+6y \\ -6x+6y & 6x-6y \end{pmatrix}$$

Points stationnaires : $\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = 0, (x-y)^2 = 1$

$$P_1 = (0,-1), \quad P_2 = (0,1)$$
$$\mathrm{Hess} f(0,-1) = \begin{pmatrix} 14 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Hess} f(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$$

P_1 : min. loc. car det et trace > 0, $f(0,-1) = -2$
P_2 : point selle car det < 0 , $f(0,1) = 2$

(b)
(i). La définition de T nous donne les inégalités $0 \leq y \leq x \leq 4-y \leq 4$. Donc
$$T \subset [0,4] \times [0,4]$$
ce qui implique que T est borné.
(ii). Le bord ∂T est donné par les segments

$$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y = 0, x \in [0,4]\}$$
$$S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y = 4-x, x \in [2,4]\}$$
$$S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R} : y = x, x \in [0,2]\}$$

qui sont dans T (vu des signes $\leq$ et non $<$ dans la définition de T). Donc T est fermé (voir aussi l'exercice 8 du chapitre 1).
(iii). Le bord de T est donné par 3 segments qui ont 3 points d'intersection (les sommets) :
$$A = (0,0), B = (4,0), C = (2,2)$$
(iv). f est continue (polynôme) et T borné et fermé d'où on conclut que f atteint son min et max sur T.

(v).
$$f_1(x) := f|_{S_1} = f(x,0) = x^3+4x^2-3x, \quad x \in [2,4]$$
$$f_2(x) := f|_{S_2} = f(x,4-x) = 8x^3-44x^2+90x-52, \quad x \in [2,4]$$
$$f_3(x) := f|_{S_3} = f(x,4-2x) = 4x^2, \quad x \in [0,2]$$

$$f_1'(x) := 3x^2 + 8x - 3, \quad x = 1/3, f_1(0) = 0, f_1(\frac{1}{3}) = -14/27, f_1(4) = 116$$

$$f_2'(x) := 24x^2 - 88x + 90, \quad \text{aucun point st.}, f_2(2) = 16, f_2(4) = 116$$

$$f_3'(x) := 8x, \quad x = 0, f_3(0) = 0, f_3(2) = 16$$

(vi). $\min f|_T = -14/27$, $\max f|_T = 116$

7. Etudier la nature des points stationnaires de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par
$$f(x, y) = x^3 - 3x + xy^2.$$
Trouver le maximum et le minimum de f sur les ensembles suivants :
$$S = [0, 2] \times [-1, 1], \quad T = [0, 1] \times [0, 1],$$
$$V = \{(x, y) : x, y \geq 0, x + 2y \leq 4\}, \quad W = \{(x, y) : 2x^2 + y^2 \leq 4\}$$

Corrigé - Points stationnaires. Les points staionnaires sont donnés par les solutions de
$$\nabla f(x, y) = \mathbf{0} \quad \text{i.e.} \quad \begin{matrix} 3x^2 - 3 + y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{matrix} .$$
La fonction f admet quatre points stationnaires, à savoir :
$$P_1 = (0, -\sqrt{3}),\ P_2 = (0, \sqrt{3}),\ P_3 = (-1, 0),\ P_4 = (1, 0).$$
Pour étudier la nature de points stationnaires on calcul la matrice hessienne de f :
$$(\operatorname{Hess} f)(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$
On dénote A_i la matrice hessienne évalué au point P_i, $i = 1, 2, 3, 4$. On trouve que
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
Les points P_1 et P_2 sont des points selle de f car $\det A_1, \det A_2 < 0$ (donc deux valeurs propres non-zéro d'un signe opposé). La fonction f admet un maximum local en P_3 et un minimum local en P_4. On a
$$f(P_1) = f(P_2) = 0,\ f(P_3) = 2\, f(P_4) = -2$$

Corrigé - extremums sur S. Puisque la fonction f est continue et l'ensemble S est borné et fermé, f atteint son minimum et son maximum sur S. Seulement P_4 est dans S. Sur le bord ∂S la fonction f est donnée par :

$L_1 = [0,2] \times \{-1\}$: $f(x,-1) = x^3 - 2x$ et

$$\min f|_{L_1} = f(\sqrt{2/3}, -1) = -\frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}},\ \max f|_{L_1} = f(2,-1) = 4.$$

$L_2 = \{2\} \times [-1,1]$: $f(1,y) = 2y^2 + 2$ et $\min f|_{L_2} = 2$, $\max f|_{L_2} = 4$.

$L_3 = [0,2] \times \{1\}$: $f(x,1) = x^3 - 2x$ et $\min f|_{L_3} = -\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$, $\max f|_{L_3} = 4$.

$L_4 = \{0\} \times [-1,1]$: $f(0,y) = 0$ et $\min f|_{L_4} = 0$, $\max f|_{L_4} = 0$.

Par conséquent,

$$\min f|_S = -2,\ \max f|_S = 4.$$

En particulier, $f(P_1) = -2$ et $f(2,-1) = f(2,1) = 4$.

Corrigé - extremums sur T. Puisque la fonction f est continue et l'ensemble T est borné et fermé, f atteint son minimum et son maximum sur T. Seulement P_4 est dans T, plus précisement $P_4 \in \partial T$. Sur le bord ∂T la fonction f est donnée par :

$L_1 = [0,1] \times \{0\}$: $f(x,0) = x^3 - 3x$ et $\min f|_{L_1} = -2$, $\max f|_{L_1} = 0$.

$L_2 = \{1\} \times [0,1]$: $f(1,y) = y^2 - 2$ et $\min f|_{L_2} = -2$, $\max f|_{L_2} = -1$.

$L_3 = [0,1] \times \{1\}$: $f(x,1) = x^3 - 2x$ et $\min f|_{L_3} = -\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$, $\max f|_{L_3} = 0$.

$L_4 = \{0\} \times [0,1]$: $f(0,y) = 0$ et $\min f|_{L_4} = 0$, $\max f|_{L_4} = 0$.

Par conséquent,

$$\min f|_T = -2,\ \max f|_T = 0.$$

En particulier, $f(P_1) = -2$. Notons que

$$f(x,y) = x(x^2 + y^2 - 3).$$

Alors, $f(x,y) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x^2 + y^2 - 3$.

Corrigé - extremums sur V. Puisque la fonction f est continue et l'ensemble V est borné et fermé, f atteint son minimum et son maximum sur V. L'ensemble V définit un triangle dans $\mathbb{R}^2$. Le minimum local P_4 se trouve sur le bord de V. Sur le bord ∂V la fonction f est donnée par :

$L_1 = [0,4] \times \{0\}$: $f(x,0) = x^3 - 3x$ et $\min f|_{L_1} = -2$, $\max f|_{L_1} = 52$.

$L_2 = \{(x,y) : x, y \geq 0, x + 2y = 4\}$: $f(4-2y, y) = 52 - 90y + 52y^2 - 10y^3$
et $\min f|_{L_2} = 0$, $\max f|_{L_2} = 52$.

$L_3 = \{0\} \times [0,2]$: $f(0,y) = 0$ et $\min f|_{L_3} = 0$, $\max f|_{L_3} = 0$.

Donc

$$\min f|_V = -2,\ \max f|_V = 52.$$

En particulier, $f(P_1) = -2$ et $f(0,4) = 52$.

Corrigé - extremums sur W. Puisque la fonction f est continue et l'ensemble W est borné et fermé, f atteint son minimum et son maximum sur W. L'ensemble W décrit une ellipse dans $\mathbb{R}^2$. Les quatre points stationnnaires de f sont dans l'intérieur de W. Sur le bord ∂W on a $y^2 = 4 - 2x^2$. Donc

$$f|_{\partial W}(x, y) = x^3 - 3x + x(4 - 2x^2) = x - x^3,$$

où $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Par conséquent,

$$\min f|_{\partial W} = -\sqrt{2}, \max f|_{\partial W} = \sqrt{2}$$

et

$$\min f|_W = -2, \max f|_W = 2.$$

8. Trouver le maximum et le minimum de

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \cos(x + y).$$

sur l'ensemble S donné par

$$S = [0, \pi] \times [0, \pi].$$

Formules utiles - fonctions trigonométriques.

$$\sin 0 = 0 \quad \sin\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2} \quad \sin\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \sin\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\tfrac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos 0 = 1 \quad \cos\tfrac{\pi}{6} = \tfrac{\sqrt{3}}{2} \quad \cos\tfrac{\pi}{4} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos\tfrac{\pi}{3} = \tfrac{1}{2} \quad \cos\tfrac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x), \quad \cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\cos(\frac{\pi}{2} + x)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \quad \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

Corrigé. On considère une fonction continue sur un ensemble borné et fermé. Donc $f(x, y)$ a un maximum et un minimum qui se trouvent parmi ses points staionnaires ou sur le bord de l'ensemble S. Pour trouver les points stationnaires on doit resoudre $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$, i.e.

$$\begin{aligned} \cos(x) - \sin(x + y) &= 0 \\ \cos(y) - \sin(x + y) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\cos(y) = \cos(x)$. La fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$ et par conséquent $x = y$. Pour resoudre l'équation

$$\cos(x) - \sin(2x) = 0$$

on utilise la rélation $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ (formulaire) pour trouver

$$\cos x(1 - 2 \sin x) = 0,$$

dont les racines sont $x_1 = \frac{\pi}{6}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$ ou encore $x_3 = \frac{5\pi}{6}$ (i.e. $x_k = \frac{(2k+1)\pi}{6}$, $k = 1, 2, 3$). f admet 3 points stationnaire $P_k = (x_k, x_k)$. pour étudier la nature de ces points on considère a matrice hessienne de f donnée par

$$(\text{Hess } f)(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\sin y - \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

On dénote A_k la matrice hessienne de f en P_k. Alors

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0, \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

la fonction f admet un maximum local en P_1 et P_3 et un point selle en P_2. on a

$$f(P_1) = f(P_3) = \frac{3}{2}, \quad f(P_2) = 1$$

Sur le bord ∂S la fonction f est donnée par :

$L_1 = [0, \pi] \times \{0\} :\ f(x, 0) = \sin x + \cos x$ et
$f'(x, 0) = \cos x - \sin x$ donc un point stationnaire $\pi/4$

$\min f|_{L_1} = f(0, \pi) = -1$, $\max f|_{L_1} = f(\pi/4, 0) = \sqrt{2}$.

$L_2 = \{\pi\} \times [0, \pi] :\ f(\pi, y) = \sin y + \cos(\pi + y) = \sin y - \cos y$ et
$\min f|_{L_2} = -1$, $\max f|_{L_2} = f(\pi, 3 * \pi/4) = \sqrt{2}$.

$L_3 = [0, \pi] \times \{\pi\} :\ f(x, \pi) = \sin x + \cos(\pi + x)$ et $\min f|_{L_3} = -1$, $\max f|_{L_3} = \sqrt{2}$.

$L_4 = \{0\} \times [0, \pi] :\ f(0, y) = \sin y + \cos y$ et $\min f|_{L_4} = -1$, $\max f|_{L_4} = \sqrt{2}$.

Par conséquent,

$$\min f|_S = -1, \ \max f|_S = \frac{3}{2}.$$

9. Soit

$$E = \{(x, y) : 9x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$$

Trouver les extremums de la fonction $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$g(x, y) = 3x^2 + y^2.$$

Corrigé. Puisque la fonction f est continue et l'ensemble W est borné et fermé, f atteint son minimum et son maximum sur W.

Corrigé - Points stationnaires dans E. La fonction g est une forme quadratique définie positive :

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(x, y) \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'origin $(0, 0)$ est l'unique point stationnaire (sur $\mathbb{R}^2$) et le minimum global de g. Noter que $(0, 0)$ se trouve sur le bord de E. Par conséquent,

$$\min g|_E = g(0, 0) = 0.$$

Le maximum de g est également atteint sur le bord de E.

Corrigé - Maximum sur le bord de E. On applique le théoème de Lagrange. La contrainte est donnée par $9x^2 + (y-1)^2 = 1$. On pose $f(x, y) = 9x^2 + (y-1)^2 - 1$ et on constate que

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 18x \\ 2y-2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si $f(x, y) = 0$. Donc, on peut appliquer le théoème de Lagrange pour conclure qu'il existe un nombre réel λ tel que

$$\nabla g(x, y) + \lambda \nabla f(x, y) = \mathbf{0}.$$

On cherche alors les racines du système d'équations donné par

$$6x + 18\lambda x = 0, \quad , 2y + 2\lambda(y-1) = 0, \quad 9x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0.$$

Par la première équation on a $x = 0$ ou $\lambda = -\frac{1}{3}$. Le dernier cas est impossible, car $\lambda = -\frac{1}{3}$ implique $y = -\frac{1}{2}$ (par l'équation 2) et donc $9x^2 = -\frac{5}{4}$. Alors, $x = 0$. Par la contrainte on a $y = 0$ ou $y = 2$. La première solution donnne le minimum global de g déjà trouvé ci-dessus. Donc

$$\max g|_E = g(0, 2) = 4.$$

Corrigé - Maximum sur le bord de E - solution 2. En utilisant la rélation

$$x^2 = \frac{1-(y-1)^2}{9}$$

on a

$$g|_{\partial E} = h(y) = \frac{4y^2 + 2y}{3}$$

et $0 \leq y \leq 2$. La fonction h est strictement croissante sur $[0, 2]$ donc

$$\max g|_E = h(2) = g(0, 2) = 4.$$

10. Trouver les extremums de la fonction $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

sous les conditions $x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 = 0$ et $xyz - 1 = 0$.

Corrigé. On pose

$$f_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z^2 - 4, \quad f_2(x, y, z) = xyz - 1.$$

et $M = \{(x, y, z) : f_1(x, y, z) = f_2(x, y, z) = 0\}$. L'ensemble M est borné (car $M \subset B_2(0, 0, 0)$) est férmé ($M = \partial M$) et la fonction h est continue. Par conséquent, h atteint son minimum et son maximum sur M. De plus, sur M les vecteurs

$$\nabla f_1(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 4z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla f_2(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendants. (Démonstration : Puisque $xyz = 1$, les variables x, y, z sont tous non-zéro. Supposons que $\nabla f_1(x, y, z)$ et $\nabla f_2(x, y, z)$ sont linéairement dépendants. Alors, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$2x + tyz = 0, \quad 2y + txz = 0, \quad 4z + txy = 0$$

et donc (multiplier la première équation avec x, etc.)

$$x^2 = y^2 = 2z^2 = -\frac{t}{2}.$$

En utilisant $f_1(x, y, z) = 0$ ceci implique que $t = -\frac{4}{3}$ en contradiction avec $xyz = 1$.) On peut donc appliquer le théorème de Lagrange pour conclure qu'il existent deux nombres réels $\lambda_1, lambda_2$ tels que :

$$\nabla h(x, y, z) + \lambda_1 \nabla f_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla f_2(x, y, z) = \mathbf{0}$$

On cherche alors les racines du système d'équations donné par

$$\begin{aligned}
&2x + 2\lambda_1 x + \lambda_2 yz = 0 \\
&2y + 2\lambda_1 y + \lambda_2 xz = 0 \\
&2z + 4\lambda_1 z + \lambda_2 xy = 0 \\
&\text{et les contraintes} \\
&x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 = 0 \\
&xyz = 1
\end{aligned}$$

Evidemment $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$. On multiplie la première èquation par x, la deuxième par y et la troisième par z et on utilise $xyz = 1$:

$$\begin{aligned}
&2(1 + \lambda_1)x^2 + \lambda_2 = 0 \\
&2(1 + \lambda_1)y^2 + \lambda_2 = 0 \\
&2(1 + 2\lambda_1)z^2 + \lambda_2 = 0
\end{aligned}$$

Si $\lambda_1 = -1$, alors $\lambda_2 = 0$ et $z = 0$ en contradiction avec $xyz = 1$. Donc $\lambda_1 \neq -1$. De plus $\lambda_2 \neq 0$. Par conséquent $x^2 = y^2$ et en utilisant la contrainte $x^2 + y^2 + 2z^2 - 4 = 0$ on voit que $x^2 + z^2 = 2$. Cette équation implique une équation de degré 3 pour x^2 car $z^2 = \frac{1}{x^2 y^2} = \frac{1}{x^2 x^2}$:

$$(x^2)^3 - 2(x^2)^2 + 1 = 0$$

Une racine est donnée par $x^2 = 1$. En utilisant

$$(x^2)^3 - 2(x^2)^2 + 1 = (x^2 - 1)((x^2)^2 - x^2 - 1)$$

on trouve l'autre racine admissible donnée par $x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Au premier cas $x^2 = y^2 = z^2$ et $h9(x, y, z) = 3$ au deuxième cas $h(x, y, z) = x^2 + 2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} > 3$. Par conséquent,

$$\min h|_M = 3, \ \max h|_M = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$

11. Trouver les extrema de la fonction $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(x, y) = 4x^3 + 3yx^2 - 4y^3 - 48y$$

sous la condition $x^2 + xy + y^2 = 3$.

Corrigé. Les conditions du théorème d'Euler-Lagrange sont vérifiées. En particulier,

$$\nabla(x^2 + xy + y^2 - 3) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 2y + x \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

si $x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$. Les points dans lesquels h admet ses extremums sont des points stationnaires de

$$H(x, y, \lambda) = h(x, y) + \lambda(x^2 + xy + y^2 - 3)$$

, i.e. des solutions des équations :

$$\begin{aligned} &12x^2 + 6yx + \lambda(2x + y) = 0 \\ &3x^2 - 12y^2 - 48 + \lambda(x + 2y) = 0 \\ &x^2 + xy + y^2 - 3 = 0 \end{aligned}$$

La première équation s'écrit comme suit :

$$(2x + y)(6x + \lambda) = 0$$

qui est vérifiée si et seulement si $2x + y = 0$ ou $6x + \lambda = 0$.

(a) Si $\lambda = -6x$ la deuxième équation est

$$0 = 3x^2 - 12y^2 - 48 + (-6x)(x + 2y) = -3(2x + y)^2 - 48$$

Donc ce cas est à exclure.

(b) Si $y = -2x$ alors par la troisième équation

$$0 = x^2 - 2x^2 + 4x^2 - 3 = 3x^2 - 3.$$

i.e. $x = 1$ ou $x = -1$. Donc on obtient les deux solutions

$$(x, y, \lambda) = (1, -2, 1) \quad \text{et} \quad (x, y, \lambda) = (-1, 2, -1)$$

et

$$\begin{aligned} &h(1, -2) = 126 \quad \text{maximum} \\ &h(-1, 2) = -126 \quad \text{minimum} \end{aligned}$$

Remarque : Noter que h est impair, i.e. $h(x, y) = -h(-x, -y)$.

12. Soit $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique avec des valeurs propres $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_{n-1} < \lambda_n$. Sur $S_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1\}$ on considère la forme quadratique $h(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle$. Montrer que

$$\lambda_1 = \min_{\mathbf{x} \in S_1} h(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v}_1, A\mathbf{v}_1 \rangle \quad \lambda_n = \max_{\mathbf{x} \in S_1} h(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{v}_n, A\mathbf{v}_n \rangle$$

où $\mathbf{v}_i$ dénote le vecteur propre (normalisé) associé à λ_i. Donner

$$\min_{\mathbf{x} \in D} h(\mathbf{x})$$

où $D := \{\mathbf{x} \in S_1 \text{ et } \langle \mathbf{x}, \mathbf{v}_1 \rangle = 0\}$.

Corrigé. Les conditions du théorème d'Euler-Lagrange sont vérifiées sur la sphère S_1. En particulier $\nabla\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = 2\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ si $\mathbf{x} \in S_1$. Les points dans lesquels h admet ses extremums sur S_1 sont des points stationnaires de

$$H(\mathbf{x},\lambda) = h(\mathbf{x}) + \lambda\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle$$

d'où

$$2A\mathbf{x} + 2\lambda\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ce système admet n solutions linéarement indépendantes (donc disdinctes dans S_1) données par les vecteurs propres $\mathbf{v}_i$ de A (dans ce cas $\lambda = -\lambda_i$. En prenant le produit scalaire avec $\mathbf{x}$ dans l'équation pour les points stationnaires on obtient

$$\langle\mathbf{x}, A\mathbf{x}\rangle = -\lambda\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = -\lambda$$

d'où l'affirmation (insérer les solutions $\mathbf{v}_i$ et comparer les valeurs). De même les conditions du théorème d'Euler-Lagrange sont vérifiées sur D (l'intersection de la sphère S_1 avec le hyperplan orthogonal à $\mathbf{v}_1$).En particulier $\nabla\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle = 2\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ si $\mathbf{x} \in D$ et $\nabla\langle\mathbf{x},\mathbf{v}_1\rangle = \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$. Les points dans lesquels h admet ses extremums sur D sont des points stationnaires de

$$H(\mathbf{x},\lambda,\mu) = h(\mathbf{x}) + \lambda\langle\mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + \mu\langle\mathbf{x},\mathbf{v}_1\rangle$$

d'où

$$2A\mathbf{x} + 2\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}.$$

En prenant le produit scalaire avec $\mathbf{v}_1$ dans cette équation on obtient

$$2\langle\mathbf{v}_1, A\mathbf{x}\rangle = -2\lambda\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{x}\rangle - \mu\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1\rangle = -\mu$$

et par la symétrie de A

$$\langle\mathbf{v}_1, A\mathbf{x}\rangle = \langle A\mathbf{v}_1,\mathbf{x}\rangle = \lambda_1\langle\mathbf{v}_1,\mathbf{x}\rangle = 0$$

dans D. Par conséquent $\mu = 0$. Les solutions sont données par les vecteurs propres $\mathbf{v}_i$, $i > 1$. Donc

$$\min_{\mathbf{x}\in D} h(\mathbf{x}) = \lambda_2.$$

Chapitre 6

Intégrales multiples

6.1 Exercices

1. Calculer
$$\lim_{y\to 0}\int_0^y \frac{(y-x)e^{-x^2}}{\sin y^2}\,dx.$$
2. Calculer
$$\lim_{y\to 0}\int_{y^2}^y \frac{\ln(x^2+\cos(x^2y^3))}{y^2}\,dx.$$
3. Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par
$$f(t)=\int_0^t \sin(t\sqrt{1+x^2})\,dx$$
admet un minimum local en 0.
4. Montrer que $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y)=\int_{-x^2}^{y^2}\cosh(yt^2+x)\,dt.$$
Etudier sa nature.
5. Soient $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ deux fonctions définies respectivement par
$$f(x)=\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 \quad \text{et} \quad g(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$$
Montrer que la fonction $f+g$ est constante et, de plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$:
$$f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}.$$
Utiliser cette relation pour calculer l'intégrale généralisée
$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt=\lim_{x\to\infty}\sqrt{f(x)}$$
et donner sa valeur.

6. Soit $D = [0,1] \times [0, \pi/2]$. Calculer
$$\iint_D \frac{x \sin y}{1+x^2}\, dxdy.$$
7. Soit $D = [0,1] \times [1,2]$. Calculer
$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy.$$
8. Soit $D = [0,\pi] \times [0,1]$. Calculer
$$\iint_D x \sin xy\, dxdy.$$
9. Soit $D = [0,1] \times [1,2]$. Calculer
$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy.$$
10. Soit D l'intérieur du triangle de sommets $A = (0,0)$, $B = (\pi, 0)$ et $C = (\pi, \pi)$. Calculer
$$\iint_D x \cos(x+y)\, dxdy.$$
11. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$. Calculer le volume de
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D : \text{ et } 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$
En déduire le volume de la boule d'unité $B_1(\mathbf{0})$ dans $\mathbb{R}^3$.

Formules utiles.
$$\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a},\ a > 0,\ |x| < |a|,$$
12. Soient $D = [-1,1] \times [-1,1]$ et $f(x,y) = \max(1-|x|, 1-|y|)$. Calculer le volume de
$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D : \text{ et } 0 \leq z \leq f(x,y)\}.$$
Dessiner les ensembles de niveaux de $f(x,y)$.
13. Calculer
$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x-1|-|y|}\, dxdy.$$
14. Calculer
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^y}{(1+x^2+e^y)^2}\, dxdy.$$
15. Soit $B_R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 < R^2\}$. Calculer
$$\iint_{B_R} xy\, dxdy, \quad \iint_{B_R} x^2\, dxdy, \quad \iint_{B_R} y^2\, dxdy$$

16. Vérifier que
$$\frac{d}{dx}\Big(2\arctan\left(e^x\right)\Big) = \frac{1}{\cosh x}$$
Calculer ensuite
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\cosh(x^2+y^2)}\,dxdy.$$
17. Calculer
$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2-2y}\,dxdy.$$
Formules utiles.
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$$
18. Calculer
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+(y-x)^2)^2}\,dxdy.$$
19. Calculer
$$\iiint_{[0,1]\times[2,3]\times[4,5]} x+y+z+xyz\,dxdydz.$$
20. Soit $B_R(\mathbf{0}) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2\}$. Calculer
$$\iiint_{B_R(\mathbf{0})} xy\,dxdydz,$$
$$\iiint_{B_R(\mathbf{0})} z^2\,dxdydz.$$
21. Calculer
$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-2y^2-3z^2}\,dxdydz.$$
22. Soit
$$E = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x\in[0,1], y^2+z^2\le x^2\}$$
Décrire E et donner $|E| = \mathrm{Vol}(E)$.
23. Soit T est le triangle donné par les sommets $A=(1,1)$, $B=(4,1)$, $C=(3,3)$. Donner son bord ∂T. Donner T par des inéquations. Calculer
$$A = \iint_T dxdy, x_c = A^{-1}\iint_T x\,dxdy, \quad y_c = A^{-1}\iint_T y\,dxdy$$
24. * Soit T est le triangle donné par les sommets $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(x_0,y_0)$ tel que $x_0, y_0 > 0$. Calculer
$$A = \iint_T dxdy, x_c = A^{-1}\iint_T x\,dxdy, \quad y_c = A^{-1}\iint_T y\,dxdy$$

6.2 Corrigés

1. Calculer
$$\lim_{y\to 0}\int_0^y \frac{(y-x)e^{-x^2}}{\sin y^2}\,dx.$$

Corrigé. On définit
$$g(y)=\int_0^y (y-x)e^{-x^2}\,dx.$$
Alors
$$g'(y)=\int_0^y e^{-x^2}\,dx,\quad g''(y)=e^{-y^2}.$$
Notons que $(\sin y^2)''=(2y\cos y^2)'=2\cos y^2-4y^2\sin y^2$. Donc
$$\lim_{y\to 0}\frac{g''(y)}{(\sin y^2)''}=\frac{1}{2}$$
et par la règle de l'Hopital :
$$\lim_{y\to 0}\int_0^y \frac{(y-x)e^{-x^2}}{\sin y^2}\,dx\equiv\lim_{y\to 0}\frac{g(y)}{\sin y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{g''(y)}{(\sin y^2)''}=\frac{1}{2}.$$

2. Calculer
$$\lim_{y\to 0}\int_{y^2}^y \frac{\ln(x^2+\cos(x^2y^3))}{y^2}\,dx.$$

Corrigé. On définit
$$g(y)=\int_{y^2}^y \ln(x^2+\cos(x^2y^3))\,dx.$$
Alors, pour tout $|y|<1$:
$$g'(y)=\ln(y^2+\cos(y^5))-2y\ln(y^4+\cos(y^7))-3y^2\int_{y^2}^y\frac{x^2\sin(x^2y^3)}{x^2+\cos(x^2y^3)}\,dx.$$
Par un développement limité autour $y=0$:
$$\ln(y^2+\cos(y^5))=y^2+O(y^4)$$
Pour les autres expressions le premier terme du développement limité contient une puissance plus grande que 2. Donc par la règle de l'Hopital :
$$\lim_{y\to 0}\int_{y^2}^y \frac{\ln(x^2+\cos(x^2y^3))}{y^2}\,dx\equiv\lim_{y\to 0}\frac{g(y)}{y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{g'(y)}{2y}=0.$$

3. Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par
$$f(t)=\int_0^t \sin(t\sqrt{1+x^2})\,dx$$
admet un minimum local en 0.

Corrigé. Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = \sin(t\sqrt{1+t^2}) + \int_0^t \sqrt{1+x^2}\cos(t\sqrt{1+x^2})\,dx$$

on a $f'(0) = 0$. Noter que dans un voisinage de 0 on $f'(t) < 0$ si $t < 0$ et $f'(t) > 0$ si $t > 0$ car la fonction $\sin(t\sqrt{1+t^2})$ change le signe et l'intégrand $\sqrt{1+x^2}\cos(t\sqrt{1+x^2})$ est strictement positive. Par conséquent la fonction f admet un minimum local stricte en 0. Ou par calcul de la dérivée seconde :

$$f''(t) = 2\sqrt{1+t^2}\cos(t\sqrt{1+t^2}) + \frac{t^2\cos(t\sqrt{1+t^2})}{\sqrt{1+t^2}} - \int_0^t (1+x^2)\sin(t\sqrt{1+x^2})dx$$

on a $f''(0) = 2 > 0$ donc la fonction f admet un minimum local stricte en 0.

4. Montrer que $(0,0)$ est un point stationnaire de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \int_{-x^2}^{y^2} \cosh(yt^2 + x)\,dt.$$

Etudier sa nature.

Corrigé. Les dérivées partielles de f sont données par

$$D_x f(x,y) = 2x\cosh(yx^4 + x) + \int_{-x^2}^{y^2} \sinh(yt^2 + x)\,dt.$$

$$D_y f(x,y) = 2y\cosh(y^5 + x) + \int_{-x^2}^{y^2} t^2\sinh(yt^2 + x)\,dt.$$

Donc $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$. Ensuite on calcul la matrice hessienne de f en $(0,0)$. On n'est pas obligé de calculer toutes les contributions mais seulement les termes qui sont non-nulles. par exemple, pour trouver $D_{xx}f(0,0)$ on voit que pour la dérivée de $2x\cosh(yx^2 + x)$ seule la partie $2\cosh(yx^2 + x)$ donne un résultat non-nul. Similairement les autres termes donnent zéro. Donc

$$D_{xx}f(0,0) = 2, D_{xy}f(0,0) = 0, D_{yy}f(0,0) = 2.$$

Alors, la matrice hessienne de f est $2Id$ donc définie positive. Le point stationnaire $(0,0)$ est un minimum local stricte.

5. Soient $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions définies respectivement par

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt.$$

Montrer que la fonction $f + g$ est constante et, de plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}.$$

Utiliser cette relation pour calculer l'intégrale généralisée

$$\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \lim_{x\to\infty}\sqrt{f(x)}$$

et donner sa valeur.

Corrigé. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) + g'(x) &= 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt - 2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2}\, dt \\ &= 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2}\, dt - 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-s^2}\, ds \\ &= 0 \end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variable $s = tx$ dans la deuxième intégrale. Donc

$$f(x) + g(x) = f(0) + g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Il suffit de montrer que

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Ce résultat est une conséquence des inégalités

$$0 < g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\, dt < e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\, dt.$$

6. Soit $D = [0,1] \times [0, \pi/2]$. Calculer

$$\iint_D \frac{x \sin y}{1+x^2}\, dxdy.$$

Corrigé.

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x \sin y}{1+x^2}\, dxdy &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx \cdot \int_0^{\pi/2} \sin y\, dy \\ &= \ln(1+x^2)\Big|_0^1 \cdot (-\cos y)\Big|_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\ln 2}{2}. \end{aligned}$$

7. Soit $D = [0,1] \times [1,2]$. Calculer

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\, dxdy.$$

Corrigé.

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \ln(x^2+y^2)\, dx = \frac{1}{2}(\ln(1+y^2) - \ln y^2).$$

et

$$\frac{1}{2} \int_1^2 \ln(1+y^2) dy = \frac{y \ln(1+y^2)}{2}\Bigg|_{y=1}^{y=2} - \int_1^2 \frac{y^2}{1+y^2} dy = \frac{y \ln(1+y^2)}{2} - y + \arctan y \Bigg|_{y=1}^{y=2},$$

$$-\frac{1}{2}\int_1^2 \ln(y^2)\,dy = y - y\ln y\Big|_{y=1}^{y=2}$$

d'où en utilisant $\arctan 1 = \pi/4$:

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy = \arctan 2 + \ln 5 - \frac{5\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4}$$

8. Soit $D = [0,\pi]\times[0,1]$. Calculer

$$\iint_D x\sin xy\,dxdy.$$

Corrigé.

$$\begin{aligned}\iint_D x\sin xy\,dxdy &= \int_0^\pi \left(\int_0^1 x\sin xy\,dy\right)dx\\ &= \int_0^\pi (-\cos xy)\Big|_{y=0}^{y=1} dx\\ &= \int_0^\pi (1-\cos x)\,dx\\ &= (x-\sin x)\Big|_0^\pi = \pi\end{aligned}$$

9. Soit $D = [0,1]\times[1,2]$. Calculer

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy.$$

Corrigé.

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy &= \int_1^2 \left(\int_0^1 \frac{x}{x^2+y^2}\,dx\right)dy\\ &= \int_1^2 (\frac{1}{2}\ln(y^2+x^2))\Big|_{x=0}^{x=1} dy\\ &= \int_1^2 (\frac{1}{2}\ln(1+y^2) - \ln y)\,dy\end{aligned}$$

En faisant une intégration par partie on obtient

$$\begin{aligned}\int_1^2 (\frac{1}{2}\ln(1+y^2)\,dy &= \frac{y}{2}\ln(1+y^2)\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{y^2}{1+y^2}\,dy\\ &= \frac{y}{2}\ln(1+y^2)\Big|_1^2 - 1 + \int_1^2 (\frac{1}{1+y^2}\,dy\\ &= \ln 5 - \frac{\ln 2}{2} - 1 + \arctan 2 - \arctan 1\end{aligned}$$

et

$$-\int_1^2 \ln y\,dy = y - y\ln y\Big|_1^2 = 1 - 2\ln 2.$$

Par conséquent

$$\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\,dxdy = \ln 5 - \frac{5\ln 2}{2} + \arctan 2 - \frac{\pi}{4}.$$

10. Soit D l'intérieur du triangle de sommets $A=(0,0)$, $B=(\pi,0)$ et $C=(\pi,\pi)$. Calculer

$$\iint_D x\cos(x+y)\,dxdy.$$

Corrigé. Evidemment $D=\{(x,y): 0\le y\le x\le \pi$. Donc

$$\begin{aligned}\iint_D x\cos(x+y)\,dxdy &= \int_0^\pi \left(\int_0^x x\cos(x+y)\,dy\right)dx\\ &= \int_0^\pi (x\sin(x+y))\Big|_{y=0}^{y=x} dx\\ &= \int_0^\pi x\sin 2x - x\sin x\,dx\\ &= \int_0^\pi \frac{x}{2}(-\cos 2x)' + x(\cos x)'\,dx\\ &= -\frac{3\pi}{2} + \int_0^\pi \frac{\cos 2x}{2} - \cos x\,dx\\ &= -\frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

11. Soit $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$. Calculer le volume de

$$E=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in D : \text{ et } 0\le z\le \sqrt{1-x^2-y^2}\}.$$

En déduire le volume de la boule d'unité $B_1(\mathbf{0})$ dans $\mathbb{R}^3$.

Corrigé. En appliquant la formule

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a},\ a>0,\ |x|<|a|$$

avec $a=\sqrt{1-y^2}$ nous avons

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(E) &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2-x^2}\,dx\right)dy\\ &= \int_{-1}^1 \frac{x}{2}\sqrt{1-y^2-x^2} + \frac{1-y^2}{2}\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\Big|_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} dy\\ &= \int_{-1}^1 \frac{1-y^2}{2}(\arcsin 1 - \arcsin(-1))\,dy\\ &= \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 1-y^2\,dy\\ &= \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

L'ensemble E représente la démi-boule d'unité. Donc

$$\mathrm{Vol}(B_1(\mathbf{0})) = \frac{4\pi}{3}.$$

12. Soient $D = [-1,1] \times [-1,1]$ et $f(x,y) = \max(1-|x|, 1-|y|)$. Calculer le volume de

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D : \text{ et } 0 \leq z \leq f(x,y)\}.$$

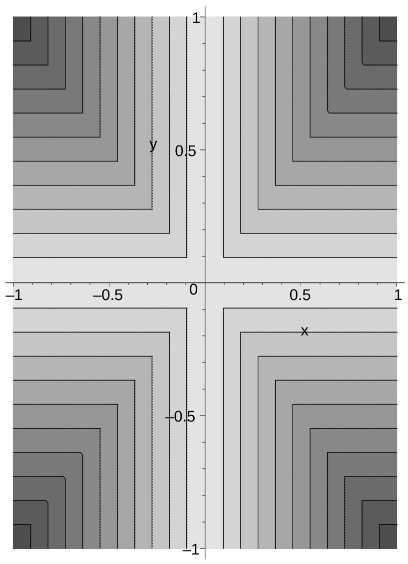
Dessiner les ensembles de niveaux de $f(x,y)$.

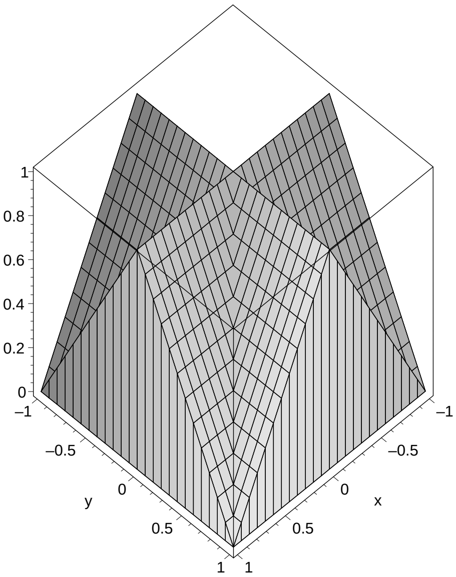
Corrigé. Par la symétrie du problème on a

$$\mathrm{Vol}(E) = 4 \iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x,y)\, dxdy,$$

donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(E) &= 4 \int_0^1 \left(\int_0^y 1 - x\, dx + \int_y^1 1 - y\, dx \right) dy \\
&= 4 \int_0^1 y - \frac{y^2}{2} + (1-y)^2\, dy \\
&= 4 \int_0^1 y + \frac{y^2}{2}\, dy \\
&= \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$





13. Calculer
$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x-1|-|y|}\, dxdy.$$

Corrigé.
$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-|x-1|-|y|}\, dxdy &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-1|}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|}\, dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|y|}\, dy\\ &= 4\int_{0}^{\infty} e^{-t}\, dt \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-y}\, dy\\ &= 4.\end{aligned}$$

14. Calculer
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^y}{(1+x^2+e^y)^2}\, dxdy.$$

Corrigé.
$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{e^y}{(1+x^2+e^y)^2}\, dxdy &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^y}{(1+x^2+e^y)^2}\, dy\right) dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{-1}{1+x^2+e^y}\right|_{y=-\infty}^{y=\infty} dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx\\ &= \arctan x \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty}\\ &= \pi.\end{aligned}$$

15. Soit $B_R = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < R^2\}$. Calculer

$$\iint_{B_R} xy\, dxdy, \quad \iint_{B_R} x^2\, dxdy, \quad \iint_{B_R} y^2\, dxdy$$

Corrigé. En untilisant des coordonnés polaires $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ on a

$$\begin{aligned}\iint_{B_R} xy\, dxdy &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta \sin\theta\, d\theta\right) rdr \\ &= \int_0^R r^2 \left(\int_0^{2\pi} (\sin^2\theta)'/2\, d\theta\right) rdr \\ &= 0.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\iint_{B_R} x^2\, dxdy &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} r^2 \cos^2\theta\, d\theta\right) rdr \\ &= \int_0^R r^2 \left(\frac{\sin\theta\cos\theta + \theta}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) rdr \\ &= \pi \int_0^R r^3\, dr \\ &= \frac{\pi R^4}{4}.\end{aligned}$$

ou par symétrie

$$\iint_{B_R} x^2\, dxdy = \iint_{B_R} y^2\, dxdy = \frac{1}{2}\iint_{B_R} x^2 + y^2\, dxdy = \frac{\pi R^4}{4}.$$

16. Vérifier que

$$\frac{d}{dx}\Big(2\arctan\left(e^x\right)\Big) = \frac{1}{\cosh x}$$

Calculer ensuite

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\cosh(x^2+y^2)}\, dxdy.$$

Corrigé. En untilisant des coordonnés polaires $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ on a

$$\begin{aligned}\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\cosh(x^2+y^2)}\, dxdy &= 2\pi \int_0^\infty \frac{r}{\cosh r^2}\, dr \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{d}{dr}\Big(\arctan\left(e^{r^2}\right)\Big)\, dr \\ &= \frac{\pi^2}{2}.\end{aligned}$$

17. Calculer

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2-2y}\, dxdy.$$

Corrigé. En complétant le carré par rapport à y on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2-2y}\,dxdy = e^1 \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-(y+1)^2}\,dxdy$$

et par le changement des variables $(x, y+1) \longrightarrow (x, y)$ nous obtenons (invariance de $\mathbb{R}^2$ sous translations)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2-2y}\,dxdy = e^1 \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = e\pi$$

en suivant le calcul presenté au cours.

18. Calculer
$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+(y-x)^2)^2}\,dxdy.$$

Corrigé. Par invariance sous translations

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+(y-x)^2)^2}\,dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy$$

En untilisant des coordonnés polaires $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+(y-x)^2)^2} dxdy = 2\pi \int_0^\infty \frac{r}{(1+r^2)^2} dr = \pi \int_0^\infty -\frac{d}{dr}\frac{1}{1+r^2} dr = \pi.$$

19. Calculer
$$\iiint_{[0,1]\times[2,3]\times[4,5]} x+y+z+xyz\,dxdydz.$$

Corrigé.

$$\begin{aligned}\iiint_{[0,1]\times[2,3]\times[4,5]} x\,dxdydz &= \iint_{[2,3]\times[4,5]} \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 dydz\\ &= \iint_{[2,3]\times[4,5]} \frac{1}{2}\,dydz = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint_{[0,1]\times[2,3]\times[4,5]} y\,dxdydz &= \iint_{[2,3]\times[4,5]} y\,dydz\\ &= \int_{[4,5]} \left.\frac{y^2}{2}\right|_2^3 dz = \int_{[4,5]} \frac{5}{2}\,dz = \frac{5}{2},\end{aligned}$$

et de la même manière

$$\iiint_{[0,1]\times[2,3]\times[4,5]} z\,dxdydz = \frac{9}{2}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\iiint_{[0,1]\times[2,3]\times[4,5]} xyz\,dxdydz &= \iint_{[2,3]\times[4,5]} \frac{yz}{2}\,dydz\\ &= \int_{[4,5]} \frac{5z}{4}\,dz = \frac{45}{8}.\end{aligned}$$

Alors,

$$\iiint_{[0,1]\times[2,3]\times[4,5]} x+y+z+xyz\, dxdydz = \frac{105}{8}.$$

20. Soit $B_R(\mathbf{0}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$. Calculer

$$\iiint_{B_R(\mathbf{0})} xy\, dxdydz,$$

$$\iiint_{B_R(\mathbf{0})} z^2\, dxdydz.$$

Corrigé. Par un changement des variables en coordonnés sphériques

$$\begin{aligned}\iiint_{B_R(\mathbf{0})} xy\, dxdydz &= \iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} xy\, r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi \\ &= \iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} r^4 \sin^3\theta \cos\phi \sin\phi\, drd\theta d\phi = 0\end{aligned}$$

car

$$\int_0^{2\pi} \cos\phi \sin\phi\, d\phi = 0.$$

Ensuite

$$\begin{aligned}\iiint_{B_R(\mathbf{0})} z^2\, dxdydz &= \iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} z^2\, r^2 \sin\theta\, drd\theta d\phi \\ &= \iiint_{[0,R]\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} r^4 \cos^2\theta \sin\theta\, drd\theta d\phi \\ &= 2\pi \iint_{[0,R]\times[0,\pi]} r^4 \cos^2\theta \sin\theta\, drd\theta \\ &= 2\pi \int_0^R r^4 \Big(-\frac{\cos^3\theta}{3}\Big)\Big|_0^\pi dr \\ &= \frac{4\pi}{3}\int_0^R r^4\, dr = \frac{4\pi R^5}{15}\end{aligned}$$

Ou plus rapidement : Par symétrie

$$\iiint_{B_R(\mathbf{0})} z^2\, dxdydz = \frac{1}{3}\iiint_{B_R(\mathbf{0})} r^2\, dxdydz = \frac{4\pi}{3}\int_0^R r^4\, dr = \frac{4\pi R^5}{15}.$$

21. Calculer

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-2y^2-3z^2}\, dxdydz.$$

Corrigé.

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-2y^2-3z^2}\,dxdydz &= \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx \int_{\mathbb{R}} e^{-2y^2}\,dy \int_{\mathbb{R}} e^{-3z^2}\,dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\,\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy\,\frac{1}{\sqrt{6}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz \\ &= \frac{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{3}} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{6}} = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}\sqrt{6}}{6}.\end{aligned}$$

22. Soit
$$E = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x \in [0, 1], y^2 + z^2 \le x^2\}$$
Décrire E et donner $|E| = \mathrm{Vol}(E)$.

Corrigé. L'ensemble E représente un cône autour l'axe de x. Le sommet est $(0, 0, 0)$.
$$|E| = \pi \int_0^1 x^2\,dx = \frac{\pi}{3}.$$

23. Soit T est le triangle donné par les sommets $A = (1, 1)$, $B = (4, 1)$, $C = (3, 3)$. Donner son bord ∂T. Donner T par des inéquations. Calculer
$$A = \iint_T dxdy, x_c = A^{-1}\iint_T x\,dxdy, \quad y_c = A^{-1}\iint_T y\,dxdy$$

Corrigé 1 - "Intégration *dy* et ensuite *dx*". Le bord ∂T est donné par :
$$\partial T = \{y = 1, x \in [1, 4]\} \cup \{y = 9 - 2x, x \in [3, 4]\} \cup \{y = x, x \in [1, 3]\}.$$
Il en suit que nous pouvons représenter T comme la réunion de deux triangles droites :
$$T = \{(x, y) : 1 \le y \le x, x \in [1, 2]\} \cup \{(x, y) : 1 \le y \le 9 - 2x, x \in [3, 4]\}.$$
Pour toute fonction $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ continue
$$\iint_T f(x, y)\,dxdy = \int_1^3 dx \int_1^x dy\, f(x, y)\ + \int_3^4 dx \int_1^{9-2x} dy\, f(x, y)$$
Donc
$$A = \int_1^3 dx\,(x-1)\ + \int_3^4 dx\,(8-2x) = \frac{3^2-1}{2} - 2 + 8 - (4^2 - 3^2) = 3.$$
$$\begin{aligned}x_c &= A^{-1}\int_1^3 dx\,(x^2 - x)\ + \int_3^4 dx\,(8x - 2x^2) \\ &= A^{-1}\Big(\frac{3^3-1}{3} - \frac{3^2-1}{2} + 8\frac{4^2-3^2}{2} - 2\frac{4^3-3^3}{3}\Big) = \frac{8}{3}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
y_c &= A^{-1}\int_1^3 dx\,\frac{x^2-1}{2} + \int_3^4 dx\,\frac{(9-2x)^2-1}{2}\\
&= A^{-1}\int_1^3 dx\,\frac{x^2-1}{2} + \int_3^4 dx\, 40-18x+2x^2\\
&= A^{-1}(\frac{3^3-1}{3}-1+40-9(4^2-3^2)+2\frac{4^3-3^3}{3}) = \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Corrigé 2 - "Intégration dx et ensuite dy". Cette méthode permet un calcul plus rapide. En utilisant les équations du bord (voir la première partie) on peut écrire

$$T = \{(x,y) : 1 \le y \le 3, y \le x \le \frac{9-y}{2}\}.$$

Pour toute fonction $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy = \int_1^3 dy \int_y^{\frac{9-y}{2}} dx\, f(x,y)$$

Donc

$$A = \int_1^3 dy\frac{9-3y}{2} = 9 - \frac{3\cdot 3^2 - 3\cdot 1^2}{4} = 3.$$

$$\begin{aligned}
x_c &= A^{-1}\int_1^3 dy\,\frac{1}{2}(\frac{(9-y)^2}{2^2}-y^2)\\
&= A^{-1}(\frac{(9-1)^3-(9-3)^3}{24} - \frac{3^3-1^3}{6}) = \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
y_c &= A^{-1}\int_1^3 dy\frac{9y-3y^2}{2}\\
&= A^{-1}(\frac{9\cdot(3^2-1^2)}{4} - \frac{3\cdot(3^3-1^3)}{6}) = \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

24. * Soit T est le triangle donné par les sommets $A=(0,0)$, $B=(1,0)$, $C=(x_0,y_0)$ tel que $x_0,y_0>0$. Calculer

$$A = \iint_T dxdy, x_c = A^{-1}\iint_T x\,dxdy, \quad y_c = A^{-1}\iint_T y\,dxdy$$

Corrigé. Le segment $\bar{AB}$ est paralèlle à l'axe x. Il est donc préférable d'intéger d'abord la variable x (voir l'exercice ci-dessus). Avec les équations $x_0y = y_0x$, $(1-x_0)y = (1-x)y_0$ pour les deux autres segments on trouve

$$T = \{(x,y) : 0 \le y \le y_0, \frac{x_0y}{y_0} \le x \le 1 - \frac{(1-x_0)y}{y_0}\}.$$

on a pour toute fonction $f : T \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

$$\iint_T f(x,y)\,dxdy = \int_0^{y_0} dy \int_{\frac{x_0y}{y_0}}^{1-\frac{(1-x_0)y}{y_0}} dx\, f(x,y).$$

Donc comme avant

$$A = \frac{y_0}{2}, \quad x_c = \frac{1 + x_0}{3}, \quad y_c = \frac{y_0}{3}.$$

Chapitre 7

Equations différentielles

7.1 Exercices

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ donner la solution générale de

$$y'(x) + y(x) = e^{2x} + e^x + 3\sin x.$$

2. Pour $x > 0$ donner la solution générale de

$$xy'(x) - 2y(x) = x^5.$$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ donner la solution générale de

$$y'(x) + 2\tan x\, y(x) = \sin x.$$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$ donner la solution du problème de Cauchy

$$y'(x) + \tanh x\, y(x) = \sinh x, \quad y(0) = 1.$$

5. Soient $m, k, g > 0$ constants. Pour $t > 0$ donner la solution générale de

$$m\dot{v}(t) + kv(t) = -mg.$$

   Calculer

$$\lim_{t \to \infty} v(t).$$

   Cette équation différentielle décrit la vitesse d'une particule de masse m soumise à une accélération constante g dans un potentiel gravitationnel ("chute libre") avec un frottement proportionnel à la vitesse.

6. Donner la solution $y(x)$ du problème de Cauchy

$$y' = y^2, \quad y(0) = y_0 > 0.$$

   Donner l'intervalle maximale I^* sur lequel $y(x)$ existe.

7. Soient $y(x), z(x)$ les solutions des problèmes de Cauchy

$$y' = y^2, \quad y(0) = y_0 > 0, \quad z' = z^2 + a(x), \quad z(0) = y_0 > 0$$

   où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue. Montrer qu'il existe $x^* > 0$, $x^* \leq y_0^{-1}$, tel que $\lim_{x \to x^*} z(x) = +\infty$.

8. Pour $x \in \mathbb{R}$ donner la solution $y(x)$ du problème de Cauchy

$$y'(x) = y(2-y), \quad y(0) = 1.$$

Calculer

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} y(x).$$

9. Pour $x \in \mathbb{R}$ donner la solution du problème de Cauchy

$$y'(x) = 1 - y^2, \quad y(0) = 0.$$

Calculer

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} y(x).$$

10. Soient $c, g > 0$ constants. Pour $t > 0$ donner la solution du problème de Cauchy

$$\dot{v}(t) = g\left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad v(0) = 0.$$

Pour la solution $v(t)$ donner :

(a)

$$\lim_{t \to \infty} v(t)$$

et en déduire que $v(t) < c$ pour tout $t \geq 0$.

(b) $\dot{v}(0)$ et montrer que $\dot{v}(t) \leq \dot{v}(0)$ pour tout $t \geq 0$.

(c) le développement limité d'ordre 3 autour de $t = 0$.

(d)

$$x(t) := \int_0^t v(s)\, ds.$$

Formules utiles.

$$\int^x \frac{1}{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\eta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + O(x^2)$$

11. Résoudre le problème de Cauchy

$$y' = y \ln y, \quad y(0) = y_0 > 0.$$

Pour tout $y_0 > 0$ calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} y(x)$ et $\lim\limits_{x \to \infty} y(x)$.

12. Résoudre le problème de Cauchy

$$y' = -(y+x)^2, \quad y(0) = y_0.$$

13. Résoudre le problème de Cauchy

$$y' = (1 + \sin x) y (1-y), \quad y(0) = y_0, y_0 \in]0,1[.$$

14. Montrer que l'équation différentielle

$$-2x + ye^{xy} + xe^{xy}y' = 0$$

est exacte. Donner la solution du problème de Cauchy si (a) $y(1) = 0$ et (b) $y(1) = \ln 2$.

15. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

(a)
$$y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) = 0, \quad \text{et} \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

(b)
$$y''(t) + 2\,y'(t) + 5y(t) = 0, \quad \text{et} \quad y(0) = 3, y'(0) = 1$$

(c)
$$y''(t) + 2\,y'(t) + 0.36y(t) = 0, \quad \text{et} \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

16. Vérifier que $u_1(x) = \exp(-x^2/2)$ est une solution de l'équation diférentielle

$$u'' - x^2u + u = 0.$$

Donner une autre solution linéairement indépendante de cette équation.

17. Donner une solution particulière de

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = E\cos(\omega\, t)$$

où$E > 0$.

18. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$u''(x) + 2\,u(x) - 2u(x)^3 = 0, \quad \text{et} \quad u(0) = 0, u'(0) = 1$$

Formule utile.

$$\int_0^u \frac{1}{1-t^2}\,dt = \operatorname{arctanh}(u) \quad \text{pour } |u| < 1$$

19. Donner $\exp(At)$, si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le problème de Cauchy $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}(0) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_3$.

7.2 Corrigés

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ donner la solution générale de
$$y'(x) + y(x) = e^{2x} + e^x + 3\sin x.$$

   Corrigé.
$$y(x) = c\,e^{-x} + \frac{3e^x + 2e^{2x} - 9\cos x + 9\sin x}{6}, \quad c \in \mathbb{R}$$

2. Pour $x > 0$ donner la solution générale de
$$xy'(x) - 2y(x) = x^5.$$

   Corrigé.
$$y(x) = cx^2 + \frac{x^5}{3}, \quad c \in \mathbb{R}$$

3. Pour $x \in \mathbb{R}$ donner la solution générale de
$$y'(x) + 2\tan x\, y(x) = \sin x.$$

   Corrigé.
$$y(x) = c\cos^2 x + \cos x, \quad c \in \mathbb{R}$$

4. Pour $x \in \mathbb{R}$ donner la solution du problème de Cauchy
$$y'(x) + \tanh x\, y(x) = \sinh x, \quad y(0) = 1.$$

   Corrigé.
$$y(x) = \frac{1}{2\cosh x} + \frac{\cosh x}{2}$$

5. Soient $m, k, g > 0$ constants. Pour $t > 0$ donner la solution générale de
$$m\dot{v}(t) + kv(t) = -mg.$$

   Calculer
$$\lim_{t\to\infty} v(t).$$

   Cette équation différentielle décrit la vitesse d'une particule de masse m soumise à une accélération constante g dans un potentiel gravitationnel ("chute libre") avec un frottement proportionnel à la vitesse.

   Corrigé.
$$v(t) = -\frac{mg}{k} + ce^{-\frac{kt}{m}}$$

   pour tout $c \in \mathbb{R}$. Par conséquent,
$$\lim_{t\to\infty} v(t) = -\frac{mg}{k}.$$

   Noter que la limite est la même pour tout $c \in \mathbb{R}$ (c'est-à-dire pour tout vitesse initial).

Remarque. Le frottement proportionnel à la vitesse apparait, par exemple, pour le mouvement d'une boule dans une fluide. Dans ce cas, le coefficient k dépend de la viscosité du medium et du rayon de la boule (voir sous loi de Stokes dans un cours de physique générale)

6. Donner la solution $y(x)$ du problème de Cauchy

$$y' = y^2, \quad y(0) = y_0 > 0.$$

Donner l'intervalle maximale I^* sur lequel $y(x)$ existe.

Corrigé. L'équation différentielle est équivalente à $(-y^{-1})' = 1$ d'où $y(x) = \dfrac{y_0}{1 - y_0 x}$ et $I^* =]-\infty, y_0^{-1}[$.

7. Soient $y(x), z(x)$ les solutions des problèmes de Cauchy

$$y' = y^2, \quad y(0) = y_0 > 0, \quad z' = z^2 + a(x), \quad z(0) = y_0 > 0$$

où $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ est une fonction continue. Montrer qu'il existe $x^* > 0$,$x^* \leq y_0^{-1}$, tel que $\lim\limits_{x \to x^*} z(x) = +\infty$.

Corrigé. Par l'exercice précédent $y(x) = \dfrac{y_0}{1 - y_0 x} > 0$ existe si $x < y_0^{-1}$ et

$$\lim_{x \to y_0^{-1}} y(x) = +\infty.$$

Par le théoreme d'existence et unicité locale il existe une unique solution z sur un intervalle autour de 0. En prenant la différence $w = z - y$ on constate que w est une solution du problème de Cauchy

$$w' = w^2 + 2yw + a(x), \quad w(0) = 0.$$

Il en suit $w' \geq 2yw$ donc $\left(we^{2\int_0^x y(s)\,ds}\right)' \geq 0$ d'où $w \geq 0$ si $x > 0$, c'est-à-dire $z \geq y$. Donc z n'existe pas si $x \geq y_0^{-1}$ et $z(x)$ diverge pour au $x^* \leq y_0^{-1}$.

Remarque. Pour justifier que "$z(x)$ diverge au $x^* \leq y_0^{-1}$" on note qu'il existe un intervalle maximale $]0, x^*[$,$x^* \leq y_0^{-1}$ dans $\mathbb{R}_+$ sur lequel z existe. Par l'équation différentielle $z' > 0$ donc $\lim\limits_{x \to x^*} z(x)$ existe dans $]0, \infty]$. Supposons que cette limite soit finie. Alors, par le théoreme d'existence et unicité locale il existe une unique solution z sur un intervalle $]x^* - r, x^* + r[$ en contradiction avec le fait que $]0, x^*[$ est l'intervalle maximale. Donc

$$\lim_{x \to x^*} z(x) = +\infty.$$

8. Pour $x \in \mathbb{R}$ donner la solution du problème de Cauchy

$$y'(x) = y(2 - y), \quad y(0) = 1.$$

Calculer

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} y(x).$$

Corrigé. Calcul de la primitive de $\frac{1}{y(2-y)}$:

$$\int^y \frac{1}{s(2-s)}\,ds = \int^y \frac{1}{2s} + \frac{1}{2(2-s)}\,ds = \frac{1}{2}\ln y - \frac{1}{2}\ln(2-y) = \frac{1}{2}\ln\frac{y}{2-y}$$

Donc

$$y(x) = \frac{2}{1+e^{-2x}}$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = 2.$$

9. Pour $x \in \mathbb{R}$ donner la solution du problème de Cauchy

$$y'(x) = 1 - y^2, \quad y(0) = 0.$$

Calculer

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} y(x).$$

Corrigé. Calcul de la primitive de $\frac{1}{1-y^2}$:

$$\int^y \frac{1}{1-s^2}\,ds = \operatorname{arctanh} y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y}$$

Donc

$$y(x) = \tanh x$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} y(x) = 1.$$

10. Soient $c, g > 0$ constants. Pour $t > 0$ donner la solution du problème de Cauchy

$$\dot{v}(t) = g\left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad v(0) = 0.$$

Pour la solution $v(t)$ donner :

(a)

$$\lim_{t\to\infty} v(t)$$

et en déduire que $v(t) < c$ pour tout $t \geq 0$.

(b) $\dot{v}(0)$ et montrer que $\dot{v}(t) \leq \dot{v}(0)$ pour tout $t \geq 0$.

(c) le développement limité d'ordre 3 autour de $t = 0$.

(d)

$$x(t) := \int_0^t v(s)\,ds.$$

Corrigé. Intégrer l'équation différentielle :

$$\int_0^{v(t)} \frac{1}{(1-\frac{y^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}}\, dy = g\int_0^t s\, ds$$

Par le chamgement de variable $y = c\eta$ et par la formule donnée on obtient

$$\int_0^{v(t)} \frac{1}{(1-\frac{y^2}{c^2})^{\frac{3}{2}}} dy = c\int_0^{\frac{v(t)}{c}} \frac{1}{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}}} d\eta = c\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\Bigg|_0^{\frac{v(t)}{c}} = \frac{v(t)}{\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}}}.$$

Par conséquent,

$$\frac{v(t)}{\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}}} = gt.$$

Résoudre pour $v(t)$:

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}}.$$

Les propriétés de la solution $v(t)$:

(a)

$$\lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{c}{\sqrt{1+\frac{c^2}{g^2t^2}}} = c.$$

On a $\dot{v}(t) > 0$ (par calcul direct en utilisant la forme explicite de $v(t)$). Par conséquent, $v(t)$ est strictement croissante et donc pour tout$t \geq 0$

$$v(t) < \lim_{t\to\infty} v(t) = c.$$

(b) En utilisant l'équation différentielle

$$\dot{v}(0) = g\left(1-\frac{v(0)^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} = g\left(1-\frac{0^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} = g.$$

Encore par l'équation différentielle pour tout$t \geq 0$:

$$\dot{v}(t) = g\left(1-\frac{v(t)^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} \leq g = v'(0).$$

(c) Le développement limité d'ordre 3 autour de $t = 0$ est donné par

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{gt}{\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}} \\ &= gt\left(1-\frac{1}{2}\frac{g^2t^2}{c^2}+O(t^4)\right) \\ &= gt-\frac{g^3t^3}{2c^2}+O(t^5). \end{aligned}$$

(d) Par un changment de variable $\sigma = \frac{gs}{c}$ respectivement $s = \frac{c\sigma}{g}$ on trouve que

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(s)\,ds \\ &= \int_0^t \frac{gs}{\sqrt{1+\frac{g^2s^2}{c^2}}}\,ds \\ &= \frac{c^2}{g}\int_0^{\frac{gt}{c}} \frac{\sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}}\,d\sigma \\ &= \frac{c^2}{g}\int_0^{\frac{gt}{c}} \frac{d\sqrt{1+\sigma^2}}{d\,\sigma}\,d\sigma \\ &= \frac{c^2}{g}\sqrt{1+\sigma^2}\Big|_0^{\frac{gt}{c}} \\ &= \frac{c^2}{g}\left(\sqrt{1+\frac{g^2t^2}{c^2}}-1\right) \end{aligned}$$

Remarque. L'équation différentielle décrit le mouvement d'une particule soumise à une accélération constante g dans la théorie de rélativité restreinte vue du point de départ (par exemple, le vol d'une navette spatiale vu de la terre). Ici la constante c dénote la vitesse de la lumière. (a) démontre que la vitesse reste malgré d'une accéleration permanente toujours en-dessous de c. (b) montre que vu du point de départ (ou plus précisement de son référentiel) l'accéleration est toujours plus petit que au départ (même diminuante). La partie (c) montre que pour t petit ou c très grand on a en premier ordre $v = gt$ donc le résultat selon la mécanique de Newton, et (d) donne la distance parcourue (l'intégrale de la vitesse).

11. Résoudre le problème de Cauchy

$$y' = y\ln y, \quad y(0) = y_0 > 0$$

Pour tout $y_0 > 0$ calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} y(x)$ et $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$.

Corrigé. Ce problème admet pour $y_0 > 0$ une solution unique puisque $y\ln y$ est de classe C^1 donc localement lipschitzienne. Il y a un point stationnaire : si $y_0 = 1$, alors $y(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $y_0 \neq 1$ le problème de Cauchy est équivalente à

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{\eta\ln\eta} = x.$$

Par la substitution $\eta = e^z$ on trouve

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{\eta\ln\eta} = \int_{\ln y_0}^{\ln y} \frac{dz}{z} = \ln(\ln y) - \ln(\ln y_0) = \ln\frac{\ln y}{\ln y_0}$$

d'où

$$\frac{\ln y}{\ln y_0} = e^x \quad \Leftrightarrow y(x) = e^{e^x \ln y_0} = (y_0)^{e^x}.$$

Les solutions existent pour tout $x \in \mathbb{R}$ Il en suit pour les limites : Si $0 < y_0 < 1$, alors $\ln y_0 < 0$ et

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = 0$$

Si $y_0 > 1$, alors $\ln y_0 > 0$ et

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = 1, \quad \lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty.$$

12. Résoudre le problème de Cauchy

$$y' = -(y+x)^2, \quad y(0) = y_0.$$

On pose $u(x) = y(x)+x$. Alors, $u'(x) = y'(x)+1$ et on obtient le problème de Cauchy

$$u' = 1-u^2, \quad u(0) = y_0.$$

Sa solution est (voir les notes de cours) $u(x) = \tanh(x + \text{arctanh } y_0)$ d'où $y(x) = -x + \tanh(x + \text{arctanh } y_0)$.

13. Résoudre le problème de Cauchy

$$y' = (1+\sin x)y(1-y), \quad y(0) = y_0, y_0 \in]0,1[.$$

Corrigé. L'équation différentielle s'écrit comme suit :

$$\frac{dy}{y(1-y)} = (1+\sin x)dx$$

En utilisant $\dfrac{1}{y(1-y)} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{1-y}$ on trouve après l'intégration entre y_0 et y (respectivement 0 et x) on obtient en prenant l'exponentielle

$$\frac{1}{y(1-y)} = \frac{1}{y_0(1-y_0)}\exp(\int_0^x 1+\sin t\,dt) = \frac{1}{y_0(1-y_0)}\exp(t-\cos t+1).$$

On résoud pour y :

$$y = y(x) = \frac{y_0}{1+(1-y_0)\exp(t-\cos t+1)}.$$

14. Montrer que l'équation différentielle

$$-2x + ye^{xy} + xe^{xy}y' = 0$$

est exacte. Donner la solution du problème de Cauchy si (a) $y(1) = 0$ et (b) $y(1) = \ln 2$.

Corrigé. En utilisant les notations du cours on a $f(x,y) = -2x + ye^{xy}$ et $f(x,y) = xe^{xy}$. L'équation différentielle est exacte puisque

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = xyye^{xy} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}.$$

Pour trouver "l'Hamiltonien" $H(x, y)$ tel que

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} = f(x,y), \quad \frac{\partial H(x,y)}{\partial y} = g(x,y).$$

en utilise (en prenant $x_0 = y_0 = 0$) :

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \int_0^1 f(x \cdot t, y \cdot t)x + g(x \cdot t, y \cdot t)y \; dt + const \\ &= \int_0^1 -2x^2 t + 2xyte^{xyt^2} \; dt = -x^2 + e^{xy} + const \end{aligned}$$

La constante additive est donnée par la condition initial $y(0)$.
(a) Si $y(1) = 0$, alors $H(x, y) = H(1, 0)$ d'où

$$-x^2 + e^{xy} = 0, \quad y(x) = \frac{\ln x^2}{x}, x > 0.$$

(a) Si $y(1) = \ln 2$, alors $H(x, y) = H(1, \ln 2)$ d'où

$$-x^2 + e^{xy} = 1, \quad y(x) = \frac{\ln(1 + x^2)}{x}, x > 0.$$

Corrigé - Méthode alternative pour trouver H. On intègre $g(x, y)$ par rapport à y (ou alternativement $f(x, y)$ par rapport à y). La constante additive déepend de x. Alors,

$$H(x,y) = \int^y g(x,\eta)\, d\eta + \phi(x) = \int^y xe^{x\eta}\, d\eta + \phi(x) = e^{xy} + \phi(x)$$

Il faut que

$$f(x,y) = -2x + ye^{xy} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x} = ye^{xy}\phi'(x)$$

d'où $\phi(x) = -x^2 + const$.

15. Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :
 (a)

$$y''(t) + 2\,y'(t) + y(t) = 0, \quad \text{et} \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Corrigé. La matrice associée admet une Valeur propre double $\lambda = -1$. La solution générale est alors donnée par

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$$

Sa dérivée est donnée par

$$y'(t) = (-c_1 - c_2 t + c_2)e^{-t}$$

En $t = 0$ cette solution doit vérifier les conditions initiales, d'où on obtient un système algébrique linéaire pour les coefficients c_1, c_2 :

$$1 = y(0) = c_1 \quad \text{et} \quad 0 = y'(0) = c_2 - c_1.$$

Par conséquent, $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ et

$$y(t) = (1 + t)e^{-t}.$$

 (b)

$$y''(t) + 2\,y'(t) + 5y(t) = 0, \quad \text{et} \quad y(0) = 3, y'(0) = 1$$

Corrigé. La matrice associée admet deux valeurs propres complexes conjugés $\lambda_1 = 1 + 2i$,$\lambda_2 = 1 - 2i$. La solution générale est alors donnée par

$$y(t) = c_1 e^{-t} \sin(2t) + c_2 e^{-t} \cos(2t)$$

Sa dérivée est donnée par

$$y'(t) = (-2c_2 - c_1) \sin(2t)e^{-t} + (2c_1 - c_2) \cos(2t)e^{-t}$$

En $t = 0$ cette solution doit vérifier les conditions initiales, d'où on obtient un système algébrique linéaire pour les coefficients c_1, c_2 :

$$3 = y(0) = c_2 \quad \text{et} \quad 1 = y'(0) = 2c_1 - c_2.$$

Par conséquent, $c_1 = 2$, $c_2 = 3$ et

$$y(t) = 2e^{-t} \sin(2t) + 3e^{-t} \cos(2t).$$

(c)

$$y''(t) + 2\, y'(t) + 0.36y(t) = 0, \quad \text{et} \quad y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Corrigé. La matrice associée admet deux valeurs propres réelles distincts $\lambda_1 = -0.2$,$\lambda_2 = -1.8$. La solution générale est alors donnée par

$$y(t) = c_1 e^{-0.2t} + c_2 e^{-1.8t}$$

Sa dérivée est donnée par

$$y'(t) = -0.2c_1 e^{-0.2t} - 1.8c_2 e^{-1.8t}$$

En $t = 0$ cette solution doit vérifier les conditions initiales, d'où on obtient un système algébrique linéaire pour les coefficients c_1, c_2 :

$$1 = y(0) = c_1 + c_2 \quad \text{et} \quad 0 = y'(0) = -0.2c_1 - 1.8c_2.$$

Par conséquent, $c_1 = 1.125 = \frac{9}{8}$, $c_2 = -0.125 = -\frac{1}{8}$ et

$$y(t) = \frac{9e^{-0.2t} - e^{-1.8t}}{8}.$$

16. Vérifier que $u_1(x) = \exp(-x^2/2)$ est une solution de l'équation diférentielle

$$u'' - x^2 u + u = 0.$$

Donner une autre solution linéairement indépendante de cette équation.

Corrigé. Pour trouver une une autre solution linéairement indépendante $u_2(x)$ noter que son wronskien

$$w(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x) = u_1(x)^2 \big(\frac{u_2(x)}{u_1(x)}\big)'$$

est constant (et non-nul) car $w'(x) = u_1(x)u_2''(x) - u_1''(x)u_2(x) = 0$. Posons $w(x) = c$ nous voyons que $u_2(x)$ vérifie l'équation différentielle du premier ordre donnée par

$$\left(\frac{u_2(x)}{u_1(x)}\right)' = c\exp(x^2)$$

d'où

$$u_2(x) = c\ \exp(-x^2/2)\int_0^x \exp(t^2)\ dt.$$

17. Donner une solution particulière de

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = E\cos(\omega\ t)$$

où$E > 0$.

Corrigé. Il est plus commode d'utiliser la représentation complexe

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = E\ e^{i\ \omega\ t}$$

pour trouver une solution particulière. On essaie $z_p(t) = Ae^{i\ \omega\ t}$ avec $A \in \mathbb{C}$ et on prend ensuite $y_p(t) = \mathrm{Re}(z_p(t))$. On trouve la condition

$$A = \frac{E}{1-\omega^2+2i\omega} = \frac{E(1-\omega^2-2i\omega)}{(1+\omega^2)^2}$$

Donc

$$y_p(t) = \mathrm{Re}(A\ e^{i\ \omega\ t}) = E\frac{(1-\omega^2)\cos(\omega\ t) + 2\omega\sin(\omega\ t))}{(1+\omega^2)^2}.$$

18. Résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$u''(x) + 2\,u(x) - 2u(x)^3 = 0, \quad \text{et} \quad u(0) = 0, u'(0) = 1$$

Corrigé. L'energie de u est donnée par

$$E(u, u') = \frac{1}{2}u'^2 + u^2 - \frac{1}{2}u^4.$$

Elle est constante, donc pour la solution du problème de Cauchy on a

$$E(u(x), u'(x)) = E(u(0), u'(0)) = \frac{1}{2},$$

d'où

$$u'^2 = (1-u^2)^2.$$

Comme $u'(0) = 1$ est positive nous cherchons donc la solution de

$$u' = 1 - u^2$$

dont sa solution est donnée par

$$\int_0^u \frac{d\eta}{1-\eta^2}\,d\eta = \int_0^x d\xi$$

i.e.

$$\mathrm{arctanh}(u(x)) = x.$$

Par conséquent, $u(x) = \tanh(x)$ est la solution du problème de Cauchy.

19. Donner $\exp(At)$, si
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
Résoudre le problème de Cauchy $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{x}(0) = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_3$.

Corrigé. En calculant
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = 0,$$
on trouve $\exp(At) = 1 + At + \dfrac{A^2t^2}{2} = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La solution du problème de Cauchy est donné par $\mathbf{x}(t) = \exp(At)\mathbf{x}(0)$:
$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bt^2/2 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$