Série 24 : Corrigé

Exercice 1

On a $(\gamma) \cap (d) = P(5;3) \qquad (d) \cap Ox = S(3,0) \qquad (\gamma) \cap Oy = (0,2).$

(a) Pour $\gamma : y = f(x) = \sqrt{x+4}$. Alors le volume engendré par $f(x)$ est

$$V_1 = \pi \int_0^5 f(x)^2 \, dx = \pi \int_0^5 (x+4) \, dx = \pi(\frac{25}{2} + 20) = \frac{65}{2}\pi$$

La droite d en tournant autour de l'axe Ox entre les points S et P engendre un cône de hauteur 2 et dont l'aire de la base vaut $\pi y^2 = 9\pi$. L'aire du cône est donc $V_2 = \frac{1}{3} 9\pi \cdot 2 = 6\pi$. Le volume demandé vaut alors

$$V_x = V_1 - V_2 = \frac{53}{2}\pi.$$

(b) On va intégrer selon la variable y :
Courbe $\gamma : y = \sqrt{x+4} \quad \Longrightarrow \quad x = y^2 - 4 =: g(y)$
Droite (d) : $3x - 2y - 9 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{2}{3}y + 3 =: f(y)$

Alors

$$\begin{aligned} V_y &= \pi \int_0^3 f(y)^2 \, dy - \pi \int_2^3 g(y)^2 \, dy \\ &= \pi \int_0^3 \left(\frac{4}{9}y^2 + 4y + 9\right) \, dy - \pi \int_2^3 \left(y^4 - 8y^2 + 16\right) \, dy \\ &= \pi\big[\frac{4}{27}y^3 + 2y^2 + 9y\big]_0^3 - \pi\big[\frac{1}{5}y^5 - \frac{8}{3}y^3 + 16y\big]_2^3 \\ &= 49\pi - \frac{113}{15}\pi = \frac{622}{15}\pi \end{aligned}$$

Exercice 2

On a $f(x) = x^{-\frac{3}{2}}$ et donc $f'(x) = -\frac{3}{2}\, x^{-\frac{5}{2}}$. D'où

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{y=1}^{y=\infty} x^2 dy = \pi \int_{x=1}^{x=0} x^2 f'(x) \, dx = \pi \int_{x=1}^{0} x^2 \left(-\frac{3}{2} x^{-\frac{5}{2}}\right) \, dx \\ &= -\frac{3\pi}{2} \int_1^0 x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{3\pi}{2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \frac{3\pi}{2} \, 2x^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 3\pi. \end{aligned}$$

Exercice 3

On a bien évidemment $x = a\rho\cos\theta$ et $b = b\rho\sin\theta$. le Jacobien de cette transformation vaut alors

$$|\det(J_v)| = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\rho\sin\theta \\ b\sin\theta & b\rho\cos\theta \end{vmatrix} = ab\rho.$$

De plus le quart de l'ellipse est décrit dans les nouvelle coordonnées par les inéquations $0 \le \rho \le 1$ et $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
La surface du quart de l'ellipse devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 1 \cdot ab\rho \, d\rho \, d\theta = ab \, \frac{\pi}{2} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\pi ab}{4}$$

ce qui donne πab pour l'ellipse toute entière.

Exercice 4

(a) Equation séparable : $(y' + y)\tan x = y \quad \Longrightarrow \quad (\frac{y'}{y} + 1)\tan x \;=\; 1$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\tan x} - 1 \quad \text{c.-à.-d.} \quad \frac{y'}{y} \;=\; \frac{\cos x}{\sin x} - 1$$

En intégrant, on obtient : $\ln|y| = \ln|\sin x| - x + K$

$$|y| = \widetilde{C} e^{\ln|\sin x| - x} \quad \Longrightarrow \quad y = C \sin x \cdot e^{-x}$$

(b) Equation séparable : $xy' - y = y^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{y'}{y^2 + y} = \frac{1}{x}$.

Comme $\frac{1}{y^2+y} = \frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}$, l'équation peut être écrite sous la forme :

$$\frac{y'}{y} - \frac{y'}{y+1} = \frac{1}{x}$$

et en intégrant, on obtient

$$\ln|y| - \ln|y+1| = \ln|x| + K \quad \Longrightarrow \quad \ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \ln|x| + K$$

$$\left|\frac{y}{x(y+1)}\right| = e^K = \widetilde{C}\ (> 0) \ \text{ ou } \ \frac{y}{(y+1)} = Cx \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{Cx}{1 - Cx}.$$

Avec la condition initiale $y(2) = -2$, on trouve :

$$-2 = \frac{2C}{1 - 2C} \quad \Longrightarrow \quad C = 1$$

D'où la solution cherchée

$$y = \frac{x}{1-x}.$$

(c) La méthode de séparation des variables est applicable : en effet,

$$\frac{y + y'}{2y - y'} = x \quad \Longrightarrow \quad y + y' = x(2y - y')$$

$$y'(1 + x) = y(2x - 1) \quad \Longrightarrow \quad \frac{y'}{y} = \frac{2x - 1}{1 + x} \;=\; 2 - \frac{3}{1 + x}$$

En intégrant, on obtient

$$\ln|y| = 2x - 3\ln|x + 1| + K$$

c'est-à-dire aussi : $$y = \frac{Ce^{2x}}{(x+1)^3}\ .$$

Exercice 5
Soient $P(x,y)$ un point courant de γ et $T(0,h) \in \tau$ le point d'intersection de la tangente τ en P par l'axe Oy. La pente de τ se calcule comme suit :

$$\frac{y_P - y_T}{x_P - x_T} = \frac{y-h}{x} = y' \quad \text{(en } P\text{)} .$$

Or, par hypothèse, on doit avoir $h = 1/y$; l'équation devient

$$\frac{y - \frac{1}{y}}{x} = y' \qquad \Longrightarrow \qquad y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{y^2-1}{y}$$

C'est une équation différentielle séparable. En séparant les variables on obtient

$$\frac{y}{y^2-1}\, dy = \frac{1}{x}\, dx$$

En intégrant, on obtient

$$\frac{1}{2} \ln|y^2-1| = \ln|x| + K \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|y^2-1| = 2\ln|x| + 2K$$
$$|y^2-1| = x^2 \cdot e^{2K} \qquad \Longrightarrow \qquad \pm(y^2-1) = e^{2K}x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 - 1 = Cx^2 \quad C \in \mathbb{R} .$$

La solution est donc la réunion d'une famille d'ellipses et d'hyperboles d'équation

$$y^2 - Cx^2 = 1$$

Si $C > 0$, on a une famille d'hyperboles. Si $C < 0$, c'est une famille d'ellipses.

Exercice 6
C'est une équation linéaire inhomogène. L'équation homogène est la même pour les points (1) - (3) :

$$y'x - y = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y' - \frac{1}{x} \cdot y = 0.$$

On a $a(x) = -\frac{1}{x}$ et donc $A(x) = -\ln|x|$. Ceci donne la solution générale de l'équation homogène :

$$w(x) = Ce^{-A(x)} = Cx \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Il reste à trouver une solution particulière de l'équation inhomogène $xy' - y = h(x)$ pour chacun des points (1)-(3).

(1) $xy' - y = 1$. En essayant une constante, on voit que $y = -1$ est une solution.
D'où la solution générale de l'équation : $y = Cx - 1, \quad C \in \mathbb{R}$.

(2) L'équation est $xy' - y = x^3$. On *essaie* $y = K\,x^3 \Rightarrow y' = 3K\,x^2$.
L'équation devient : $3K\,x^3 - K\,x^3 = x^3$ ou $2\,K\,x^3 = x^3$ donc $K = \frac{1}{2}$.
Une solution particulière est donc $y_P(x) = \frac{1}{2}x^3$.
D'où la solution générale de l'équation inhomogène :

$$y = C\,x + \frac{1}{2}\,x^3 .$$

(3) on doit résoudre $xy' - y = x$: on utilise la méthode de variation des constantes. On cherche donc une solution de la forme $y_P(x) = c(x)w(x)$ avec $w(x) = x$ (= solution générale de l'équation homogène). On a alors $y'_P(x) = xc'(x) + c(x)$ et l'équation devient

$$x(xc'(x) + c(x)) - xc(x) = x \qquad \Longrightarrow \qquad x^2c'(x) = x \qquad \Longrightarrow \qquad c'(x) = \frac{1}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad c(x) = \ln|x|.$$

On trouve donc $y_P(x) = xc(x) = x\ln|x|$.
D'où la solution générale de l'équation inhomogène : $y = C\,x + x\ln|x|$.

Exercice 7

$xy' = 4y + x^2\sqrt{y}$ (équation de Bernoulli avec $n = \frac{1}{2}$)

En posant $u = \sqrt{y} \;\Rightarrow\; u^2 = y$, on obtient :

$$2xuu' = 4u^2 + x^2u \implies 2xu' - 4u = x^2 \; (*) \implies u' - \frac{2}{x}u = \frac{1}{2}x$$

C'est une équation linéaire inhomogène avec $a(x) = -\frac{2}{x}$ et $b(x) = \frac{1}{2}x$.

(I) La solution générale de l'éq. homogène est $u_h(x) = Ce^{-A(x)} = Ce^{2\ln|x|} = Cx^2$. On a donc, pour reprendre la notation du cours, $w(x) = x^2$.

(II) Pour une solution particulière de l'équation avec second membre, on utilise la méthode de variation des constantes :

$$c(x) = \int \frac{b(x)}{w(x)}\, dx = \int \frac{1}{2}\,\frac{x}{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\cdot \ln|x|$$

ce qui donne $u_P(x) = c(x)w(x) = \frac{1}{2}x^2\ln|x|$. Ainsi la solution générale est

$$u = Cx^2 + \frac{1}{2}x^2\ln|x| \; .$$

En se souvenant de la transformation introduite, on peut alors exprimer $y(x)$:

$$u^2 = y = (Cx^2 + \frac{1}{2}x^2\ln|x|)^2 \implies y(x) = x^4(C + \ln\sqrt{|x|})^2$$