Série 24

Formules utiles :
- Corps de révolution autour de l'axe Ox :

$$V_{Ox} = \pi \cdot \int_a^b y^2 \, dx = \pi \cdot \int_a^b f^2(x) \, dx = \pi \cdot \int_c^d y^2 g'(y) \, dy.$$

La seconde expression est valable si $y = f(x)$ et la troisième si on a $x = g(y)$.
- Corps de révolution autour de l'axe Oy :

$$V_{Oy} = \pi \cdot \int_c^d x^2 \, dy = \pi \cdot \int_c^d g^2(y) \, dy = \pi \cdot \int_a^b x^2 f'(x) \, dx.$$

La seconde expression est valable si $x = g(y)$ et la troisième si on a $y = f(y)$.

Exercice 1
On considère le domaine D limité par la courbe

$$(\gamma) : y = \sqrt{x+4},$$

la droite

$$(d) : 3x - 2y - 9 = 0,$$

l'axe Ox et l'axe Oy. Déterminer le volume du corps de révolution obtenu lorsque D tourne autour

(a) de l'axe Ox ;

(b) de l'axe Oy.

Exercice 2
On considère le domaine $\mathcal{D}$ compris entre la courbe $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3}}$ et l'axe Oy pour $0 < x \leq 1$.
Calculer le volume V engendré par rotation de $\mathcal{D}$ autour de l'axe Oy .

Exercice 3
On considère l'ellipse centrée à l'origine de demi-axes a et b, i.e. d'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

et D le domaine à l'intérieur de cette ellipse.
En considérant le quart de l'ellipse dans le 1er quadrant et en utilisant le changement de coordonnées suivant :
$\rho = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2}$;
$\theta = \arctan\left(\frac{ay}{bx}\right)$. montrer que l'aire de D vaut

$$\text{Aire}(D) = \pi ab.$$

Exercice 4
Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $(y' + y)\tan x = y$;

(b) $xy' - y = y^2$, $y(2) = -2$;

(c) $\dfrac{y + y'}{2y - y'} = x$

Exercice 5
Soit τ la tangente en un point courant P d'une courbe γ .
Déterminer γ pour que l'ordonnée à l'origine de τ soit égale à l'inverse de l'ordonnée de P . Quelle est la nature des courbes de la famille ?

Exercice 6
Trouver la solution générale de l'équation différentielle $xy' - y = h(x)$ lorsque :

(**1**) $h(x) = 1$; (**2**) $h(x) = x^3$; (**3**) $h(x) = x$;

Exercice 7
Résoudre l'équation différentielle de Bernoulli

$$xy' = 4y + x^2\sqrt{y}$$

en faisant le changement de variable $u = \sqrt{y}$.