Série 23 : Corrigé

Exercice 1

(a)

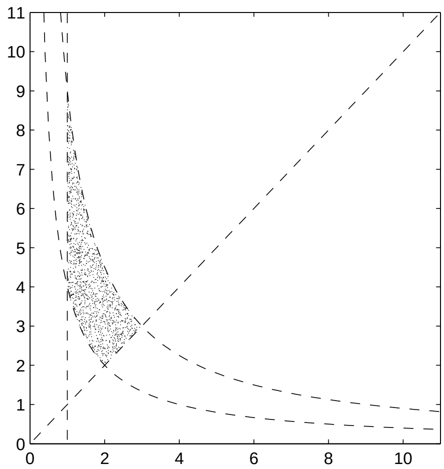
$$\iint_D \cos\left(x+\frac{y}{4}\right)\,dxdy = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos\left(x+\frac{y}{4}\right)\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\left[4\sin\left(x+\frac{y}{4}\right)\right]_{y=0}^{y=2\pi}\,dx$$
$$= \int_0^{\pi}\left[4\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-4\sin x\right]\,dx = \left[-4\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+4\cos x\right]_0^{\pi} = -8.$$

(b)

$$\iint_D x\cos(x+y)\,dxdy = \int_0^{\pi}\int_0^{x} x\cos(x+y)\,dy\,dx = \int_0^{\pi}\left[x\sin(x+y)\right]_{y=0}^{y=x}\,dx$$
$$= \int_0^{\pi}\left(x\sin(2x) - x\sin x\right)\,dx$$
$$\overset{\text{I.P.P.}}{=} \left[-x\cos(2x)/2 + x\cos x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(2x)/2+\cos x\,dx$$
$$= -\frac{\pi}{2} - \pi + \left[\sin(2x)/4 - \sin x\right]_0^{\pi} = -\frac{3\pi}{2}.$$

(c)

Intersection de la droite $y=x$ et de la courbe $y=\frac{4}{x}$: $P(2;2)$
Intersection de la droite $y=x$ et de la courbe $y=\frac{9}{x}$: $S(3;3)$

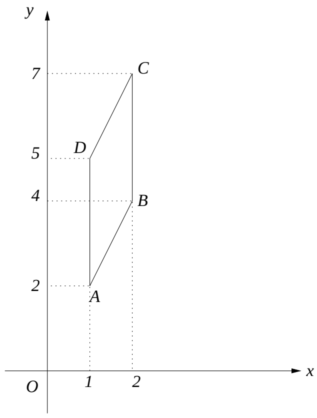


$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dxdy = \int_1^2\int_{\frac{4}{x}}^{\frac{9}{x}} \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy\,dx + \int_2^3\int_x^{\frac{9}{x}} \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\,dy\,dx$$
$$= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left[2\sqrt{y}\right]_{4/x}^{9/x}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left[2\sqrt{y}\right]_{x}^{9/x}\,dx$$
$$= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{x}}-\frac{4}{\sqrt{x}}\right)\,dx + \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{6}{\sqrt{x}}-2\sqrt{x}\right)\,dx$$

$$= \int_1^2 \frac{2}{x}\,dx + \int_2^3 \frac{6}{x} - 2\,dx$$
$$= 2\ln 2 + 6\ln 3 - 6\ln 2 - 2 = 6\ln 3 - 4\ln 2 - 2$$

Exercice 2

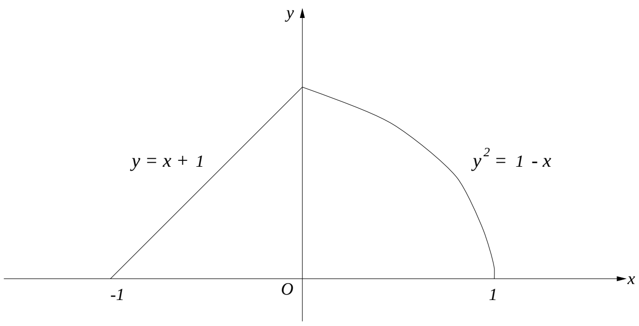
(a) Les droites AB et DC ont pour équations respectivement $y = 2x$ et $y = 2x + 3$.



En intégrant d'abord selon y, on obtient

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} e^{x+y}\,dxdy &= \int_1^2 e^x \int_{2x}^{2x+3} e^y\,dy\,dx = \int_1^2 e^x(e^{2x+3} - e^{2x})\,dx \\
&= \int_1^2 (e^{3x+3} - e^{3x})\,dx = \frac{1}{3}\left(e^{3x+3} - e^{3x}\right)\Big|_1^2 \\
&= \frac{1}{3}e^9 - \frac{2}{3}e^6 + \frac{1}{3}e^3 = \frac{1}{3}e^3(e^3-1)^2\ .
\end{aligned}$$

(b) Domaine d'intégration :



En permutant l'ordre d'intégration (on considère d'abord x constant), on obtient :

$$\int_0^1 \left(\int_{y-1}^{1-y^2} f(x,y)dx\right)\,dy = \int_{-1}^0 \left(\int_0^{x+1} f(x,y)dy\right)\,dx \ + \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x}} f(x,y)dy\right)\,dx.$$

Exercice 3

Calculons d'abord la masse totale :

$$M = \iint_D \mu(x,y)dA = \int_1^2 \int_0^{1/x} 3 - 2y\,dy\,dx = \int_1^2 \left[3y - y^2\right]_0^{1/x}\,dx = \int_1^2 \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}\,dx = 3\ln 2 - \frac{1}{2}.$$

On a

$$x_G = \frac{1}{M}\iint_D x\mu(x,y)\,dxdy = \frac{1}{M}\int_1^2\int_0^{1/x} 3x-2xy\;dy\,dx = \frac{1}{M}\int_1^2 x\cdot\big[3y-y^2\big]_0^{1/x}\;dx$$
$$= \frac{1}{M}\int_1^2 x\cdot\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\;dx = \frac{1}{M}\Big[3x-\ln x\Big]_1^2 = \frac{3-\ln 2}{3\ln 2-1/2} = \frac{6-2\ln 2}{6\ln 2-1}.$$

$$y_G = \frac{1}{M}\iint_D y\mu(x,y)\,dxdy = \frac{1}{M}\int_1^2\int_0^{1/x} 3y-2y^2\;dy\,dx = \frac{1}{M}\int_1^2 \big[\frac{3}{2}y^2-\frac{2}{3}y^3\big]_0^{1/x}\;dx$$
$$= \frac{1}{M}\int_1^2 \frac{3}{2x^2}-\frac{2}{3x^3}\;dx = \frac{1}{M}\Big[-\frac{3}{2x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2}\Big]_1^2 = \frac{1}{M}\cdot\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{12}+\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6\ln 2-1}.$$

Exercice 4

Comme la fonction à intégrer est toujours positive, il suffit de calculer $\lim\limits_{n\to\infty}\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$ pour des domaines D_n bien choisis satisfaisant $D_n \subset D_{n+1}$ et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n = \mathbb{R}^2$.

On peut choisir ici des carrés : $D_n = [-n;n]\times[-n;n]$. Alors

$$I_n = \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy = \int_{-n}^n\int_{-n}^n \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}\;dy\;dx = \left(\int_{-n}^n \frac{1}{1+x^2}\;dx\right)\cdot\left(\int_{-n}^n \frac{1}{1+y^2}\;dy\right)$$
$$= \left(\Big[\arctan x\Big]_{-n}^n\right)^2 = (\arctan n - \arctan(-n))^2 = (2\arctan n)^2 = 4\arctan^2 n$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} 4\arctan^2 n = 4\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \pi^2$. Donc

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\;dxdy = \pi^2.$$

En fait, si l'on veut faire court, on peut calculer

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\;dxdy = \int_{-\infty}^\infty\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+y^2}\;dy\;dx = \Big[\arctan x\Big]_{-\infty}^\infty\cdot\Big[\arctan y\Big]_{-\infty}^\infty = \pi^2$$

Exercice 5

(a) La fonction est positive. On passe en coordonnées polaires :

$$\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\;dxdy = \int_{\rho=1}^\infty\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{\rho^2}\;\rho\;d\varphi\;d\rho = 2\pi\int_1^\infty \frac{1}{\rho}\;d\rho = 2\pi\cdot\Big[\ln\rho\Big]_1^\infty = +\infty.$$

L'intégrale ne converge pas.

(b) La fonction est positive. On passe en coordonnées polaires :

$$\iint_D \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}\;dxdy = \int_{\rho=1}^\infty\int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\rho^2\cos^2\varphi}{\rho^5}\;\rho\;d\varphi\;d\rho = \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\;d\varphi\cdot\int_1^\infty \frac{1}{\rho^2}\;d\rho$$
$$= \pi\cdot\Big[-\frac{1}{\rho}\Big]_1^\infty = \pi.$$

(c) La fonction $f(x,y) = \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$ n'est pas positive. Il faut donc étudier d'abord l'intégrale

$$\iint_D \frac{|x|}{(x^2+y^2)^{3/2}}\;dxdy.$$

On partage D en 2 sous-domaines : $D_1 = D \cap \{(x,y)\,|\,x \geq 0\}$ et $D_2 = D \cap \{(x,y)\,|\,x < 0\}$ On a alors, en passant en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\iint_D |f(x,y)|\;dxdy &= \iint_{D_1} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\;dxdy + \iint_{D_2} \frac{-x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\;dxdy\\ &= 2\cdot \iint_{D_1} \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\;dxdy = 2\cdot \int_{\rho=1}^{\infty}\int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\rho\cos\varphi}{\rho^3}\;\rho\;d\varphi\;d\rho\\ &= 2\cdot\int_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi\;d\varphi\cdot\int_{\rho=1}^{\infty}\frac{1}{\rho}\;d\rho = 2\cdot 2\cdot\Big[\ln\rho\Big]_1^{\infty} = +\infty.\end{aligned}$$

On ne peut donc pas définir $\iint_D f(x,y)\;dxdy$.

Exercice 6

(a) On calcule en coordonnées polaires :

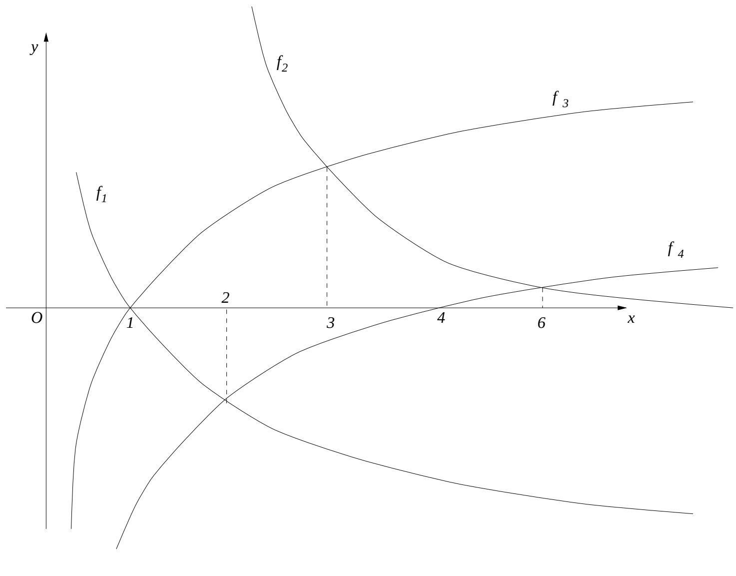
$$\begin{aligned}M &= \iint_D \mu(x,y)\;dxdy = \int_{\varphi=0}^{\pi/n}\int_{\rho=0}^{a\sin(n\varphi)} \frac{1}{\rho}\;\rho\;d\rho\;d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi/n}\big[\rho\big]_0^{a\sin(n\varphi)}\;d\varphi\\ &= \int_{\varphi=0}^{\pi/n} a\sin(n\varphi)\;d\varphi = \frac{a}{n}\Big[-\cos(n\varphi)\Big]_0^{\pi/n} = \frac{2a}{n}.\end{aligned}$$

(b) Si $n=1$, on a par symétrie $x_G = 0$. (Faites un dessin !)

$$\begin{aligned}y_G &= \frac{1}{M}\iint_D y\cdot\mu(x,y)\;dxdy = \frac{1}{2a}\int_0^{\pi}\int_0^{a\sin(\varphi)} \rho\sin\varphi\cdot\frac{1}{\rho}\cdot\rho\;d\rho\,d\varphi\\ &= \frac{1}{2a}\int_0^{\pi}\sin\varphi\cdot\int_0^{a\sin(\varphi)}\rho\;d\rho\;d\varphi = \frac{1}{2a}\int_0^{\pi}\sin\varphi\frac{1}{2}a^2\sin^2(\varphi)\;d\varphi\\ &= \frac{a}{4}\int_0^{\pi}\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)\;d\varphi = \frac{a}{4}\Big[-\cos\varphi+\frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big]_0^{\pi} = \frac{a}{4}\left(2-\frac{2}{3}\right) = \frac{a}{3}.\end{aligned}$$

Exercice 7

Le domaine est dessiné ci-dessous :



Le domaine $\mathcal{D}$ est donc limité par des arcs de ces quatre courbes et la transformation

$$\begin{cases} u &= \sqrt{x}e^{-y/2}\\ v &= \sqrt{x}e^{y/2}\end{cases} \qquad \text{implique}$$

$$\text{pour } \gamma_1 :\quad v = \sqrt{x}e^{[\ln(1/x)]/2} = \sqrt{x}e^{-\ln\sqrt{x}} = 1,$$

$$\text{pour } \gamma_2 : \quad v = \sqrt{x}e^{[\ln(9/x)]/2} = 3,$$

$$\text{pour } \gamma_3 : \quad u = \sqrt{x}e^{-[\ln x]/2} = 1,$$

$$\text{pour } \gamma_4 : \quad u = \sqrt{x}e^{-[\ln(x/4)]/2} = 2.$$

Ainsi, le domaine image $\widetilde{\mathfrak{D}}$ est le rectangle $\{(u,v) \mid 1 \le u \le 2 \ , \ 1 \le v \le 3\}$

D'autre part, $\quad f(x,y) = x = uv = \widetilde{f}(u,v) \quad$ et

$$\begin{aligned} dudv &= \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right| dxdy = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} dxdy = \begin{vmatrix} \dfrac{e^{-y/2}}{2\sqrt{x}} & \dfrac{e^{y/2}}{2\sqrt{x}} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{x}e^{-y/2} & \frac{1}{2}\sqrt{x}e^{y/2} \end{vmatrix} dxdy \\ &= \frac{1}{2}\, dxdy \quad \Longrightarrow \quad dxdy = 2dudv\,. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient : $\displaystyle \iint_{\mathfrak{D}} x\ dxdy = \iint_{\widetilde{\mathfrak{D}}} 2uv\ dudv = 2\int_1^2 u\ du \int_1^3 v\ dv = 12.$

Exercice 8

Soit $D = \{(x,y,z)|\ x^2+y^2+z^2 \le R^2 \quad , \quad \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} \le 1 \ \text{ et } \ x,y,z \ge 0\}$;

$\mu(x,y,z) = z$ étant la masse volumique de D, on obtient la masse totale par la formule :

$$M = \iiint_D z\, dx\, dy\, dz \quad ;$$

. Pour $x \in [0,a]$ fixé, on a $0 \le y \le b(1-\frac{x}{a})$ et z compris entre 0 et $\sqrt{R^2-x^2-y^2}$. Alors

$$\begin{aligned} M &= \int_0^a \Big[\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \Big(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} z\, dz\Big)\, dy\Big]\, dx \\ &= \int_0^a \Big[\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \frac{1}{2}\,(R^2-x^2-y^2)\, dy\Big]\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^a \Big[b(R^2-x^2)(1-\frac{x}{a}) - \frac{b^3}{3}\,(1-\frac{x}{a})^3\Big]\, dx = \frac{ab}{24}\,(6R^2-a^2-b^2). \end{aligned}$$

Exercice 9

On calcule l'intégrale suivante en utilisant les coordonnées sphériques $(\rho,\ \varphi, \theta)$ et les relations

$$dxdydz = \rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \quad \text{et} \quad \rho^2 = x^2+y^2+z^2.$$

$$\begin{aligned} M &= \iiint_{\mathfrak{D}} (x^2+y^2+z^2)^{-k} dxdydz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{R} \rho^{-2k}\rho^2 \sin\theta\ d\rho\ d\theta\ d\varphi \\ &= 2\pi \cdot \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta\ d\theta}_{=2} \cdot \int_0^R \frac{1}{\rho^{2k-2}}\ d\rho \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale existe si $2k-2 < 1$ c'est-à-dire si $k < 3/2$;

on obtient alors $M = \dfrac{4\pi}{3-2k} R^{3-2k}$.