Série 23

Exercice 1

(a) Calculer $\displaystyle\iint_D \cos\left(x+\frac{y}{4}\right)\,dxdy$ où D est le rectangle de sommets $A(0,0)$, $B(\pi,0)$, $C(\pi,2\pi)$ et $D(0,2\pi)$.

(b) Calculer $\displaystyle\iint_D x\cos(x+y)\,dxdy$ où D est le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(\pi,0)$, $C(\pi,\pi)$.

(c) Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{1}{\sqrt{xy}}\,dxdy$ avec $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 1,\, 4\leq xy\leq 9,\, y\geq x\}$.

Exercice 2

(a) Calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} e^{x+y}\,dxdy$ si $\mathcal{D}$ est un parallélogramme (orienté) $ABCD$ de sommets $A(1,2)$, $B(2,4)$, $C(2,7)$, $D(1,5)$ en choisissant un ordre d'intégration qui donne les calculs les plus simples.

(b) Intervertir l'ordre d'intégration de $\displaystyle\int_0^1\left(\int_{y-1}^{1-y^2} f(x\,,\,y)\,dx\right)dy$.

Exercice 3

On considère le domaine D limité par les droites $x=1$, $x=2$, $y=0$ et la courbe $xy=1$. Sa masse spécifique est $\mu(x,y)=3-2y$.
Calculer son centre de gravité $G(x_G\,,\,y_G)$.

Exercice 4

Calculer - si elle existe - l' intégrale suivante :

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dxdy.$$

Exercice 5

Soit $D=\mathbb{R}^2\backslash B(\mathbf{0};1)$. Calculer - si elles existent - les intégrales suivantes, en utilisant les coordonnées polaires :

(a) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$;

(b) $\displaystyle\iint_D \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}\,dxdy$

(c) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,dxdy$

Exercice 6

On considère la boucle de rosace D définie en coordonnées polaires par $\rho\leq a\sin(n\varphi)$, $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{n}\right]$, $n\in\mathbb{N}^*$. Sa masse spécifique est $\mu(\rho,\varphi)=\frac{1}{\rho}$.

(a) Calculer la masse de D.

(b) Pour $n=1$, calculer les coordonnées du centre de masse de D. [Réfléchir avant de calculer !]

Exercice 7
En utilisant la transformation de coordonnées $u = \sqrt{x}e^{-y/2}$, $v = \sqrt{x}e^{y/2}$, déterminer

$$\iint_{\mathcal{D}} x\,dxdy$$

lorsque $\mathcal{D}$ est limité par les courbes $y = \ln x$, $y = \ln \frac{x}{4}$, $y = \ln \frac{1}{x}$ et $y = \ln \frac{9}{x}$.

Exercice 8
On coupe la partie de la boule $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, par le plan vertical $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(0 < a \leq R\,,\, 0 < b \leq R)$.
Déterminer la masse totale de la portion contenant l'origine si la masse volumique en chaque point est égale à $\mu(x, y, z) = z$.

Exercice 9
Pour quels $k > 0$ la boule de rayon R centrée à l'origine, de masse volumique $\mu(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-k}$, a-t-elle une masse finie ? Que vaut-elle alors ?