Série 22 : Corrigé

Exercice 1
On note $f(x,y) = \dfrac{e^{-x} - e^{-yx}}{x}$. On a alors

$$f_y(x,y) = \frac{1}{x} \cdot (-e^{-yx}) \cdot (-x) = e^{-yx}.$$

(a) On a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x} - e^{-yx}}{x} \overset{\text{B.-H.}}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-e^{-x} + ye^{-yx}}{1} = y - 1$. La fonction à intégrer ne possède donc pas d'asymptote en $x = 0 \Longrightarrow$ aucun problème en $x = 0$.
Pour $x \to \infty$, il faut vérifier les hypothèses (I) et (II) vues au cours. Fixons un b tel que $0 < b < 1$. Alors pour $y \geq b$ et $x > 1$, on a

$$\left|\frac{e^{-x} - e^{-yx}}{x}\right| \leq |e^{-x}| + |e^{-yx}| \leq 2e^{-bx} = \phi(x)$$

et $\phi(x)$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.
Pour $f_y(x,y)$, on utilise la majoration $|f_y(x,y)| \leq e^{-bx} = \psi(x)$ qui est intégrable sur $[1; +\infty[$.
Le théorème s'applique donc pour tout y plus grand qu'un $b > 0$. Notons d'ailleurs que $g(0)$ n'est pas définie car l'intégrale diverge (l'intégrant est essentiellement en $\frac{1}{x}$).

(b) Par le théorème du cours, on a

$$g'(y) = \int_0^\infty f_y(x,y)\, dx = \int_0^\infty e^{-yx}\, dx = \Big[-\frac{e^{-yx}}{y} \Big]_{x=0}^{\infty} = \frac{1}{y}\,.$$

(c) En intégrant, on a $g(y) = \ln y + C$ où C est une constante à déterminer. En reprenant la définition de $g(y)$, on voit que $g(1) = 0$. Comme $\ln 1 = 0$, on en déduit que $C = 0$. En conclusion

$$g(y) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-yx}}{x}\, dx = \ln y.$$

De plus

$$\begin{aligned} I(a,b) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx &= \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-bx}}{x} - \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-ax}}{x}\, dx \\ &= g(b) - g(a) = \ln b - \ln a = \ln \frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Exercice 2
(a) On sait (formule donnée) que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$. Donc

$$g(y) = \int_0^\infty e^{-yx^2} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-yx^2}\, dx \overset{u=\sqrt{y}\,x}{=} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \frac{1}{\sqrt{y}}\, du = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{y}}$$

(b) Donc $g'(y) = \frac{d}{dy}g(y) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}y^{-3/2}\right) = -\frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \frac{1}{y^{3/2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{y^3}}$.

(c) D'autre part, par le théorème du cours,

$$g'(y) = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} e^{-yx^2} dx = \int_0^\infty -x^2 e^{-yx^2} dx \qquad \text{d'où} \qquad \int_0^\infty x^2 e^{-yx^2} dx = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{y^3}}\ .$$

(d) On en conclut que $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2}\, dx = 2 \cdot g(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Pour applique le théorème de la section 6.1, il faut vérifier les conditions (I) et (II) : soit $0 < b < 1$. Alors pour tout $y \geq b$, on a

(I) $|f(x,y)| = |e^{-yx^2}| \leq e^{-bx^2} = \phi(x)$ et la fonction $\phi(x)$ est intégrable à l'infini.

(II) $|f_y(x,y)| = |-x^2 e^{-yx^2}| \leq x^2 e^{-bx^2} = \psi(x)$ et la fonction $\psi(x)$ est intégrable à l'infini (théorème d'Analyse I).

Ainsi le théorème du cours sur les intégrales à paramètre s'applique pour y plus grand qu'un certain $b > 0$.

Notons d'ailleurs que $g(0)$ n'est pas défini car l'intégrale diverge !!

Exercice 3

Remarquons d'abord que $g(0) = 0$.

On pose $f(x,y) = \frac{\arctan(yx)}{x(1+x^2)} \quad \Longrightarrow \quad f_y(x,y) = \frac{1}{(1+y^2x^2)(1+x^2)}$.

En $x \to 0$, on a $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(yx)}{x(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{yx}{x(1+x^2)} = y$ (car pour $x \approx 0$, on a $\arctan x \approx x$). Il n'y a donc pas d'asymptote en $x = 0$.

Pour $x \to \infty$, on a la majoration

$$\left|\frac{\arctan(yx)}{x(1+x^2)}\right| \leq \frac{\pi/2}{x^3} = \phi(x)$$

et $\phi(x)$ est intégrable pour $x \to \infty$.

Pour $f_y(x,y)$ on utilise la majoration $\quad |f_y(x,y)| \leq \frac{1}{1+x^2} = \psi(x)$. Et $\psi(x)$ est intégrable à l'infini (car le degré est > 1.)

On peut donc appliquer le théorème de la section 6.1 :

$$\begin{aligned} g'(y) &= \int_0^\infty f_y(x,y)\, dx = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2x^2)}\, dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1/(1-y^2)}{1+x^2} - \frac{y^2/(1-y^2)}{1+y^2x^2}\, dx = \frac{1}{1-y^2} \cdot \left(\big[\arctan x\big]_0^\infty - y^2 \left[\frac{\arctan(yx)}{y}\right]_0^\infty\right) \\ &= \frac{1}{1-y^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - y\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\frac{1-y}{1-y^2} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+y}\, . \end{aligned}$$

En intégrant on trouve alors $g(y) = \frac{\pi}{2}\ln(1+y) + C$. Comme $g(0) = 0$ on en déduit $C = 0$. Ceci montre que

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x(1+x^2)}\, dx = g(1) = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Exercice 4

$$g(y) = \int_0^y \ln\left(\frac{1+y^2+x^2}{1+2x^2}\right)\, dx$$

Par le théorème du cours on a

$$g'(y) = \int_0^y \frac{2y}{1+2x^2} \cdot \frac{1+2x^2}{1+y^2+x^2}\, dx + \ln\left(\frac{1+2y^2}{1+y^2+y^2}\right) = 2y \cdot \int_0^y \frac{1}{1+y^2+x^2}\, dx$$
$$= 2y \cdot \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+y^2}}\right)\Big|_{x=0}^{x=y} = \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \arctan\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)$$

Pour calculer la primitive, on peut poser $u = \dfrac{x}{\sqrt{1+y^2}}$ pour faire apparaître

$$\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{1}{1+u^2}\, du$$

En passant à la limite on obtient

$$\lim_{y\to\infty} g'(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5

$$g(y) = \int_{-y^4}^{y^2} \ln\left(1+\cos(yx)\right)\, dx$$

Par le théorème du cours on a

$$g'(y) = \int_{-y^4}^{y^2} -\frac{x\sin(xy)}{1+\cos(xy)}\, dx + \ln\left(1+\cos(y\cdot y^2)\right)\cdot 2y - \ln\left(1+\cos(-y^5)\right)\cdot(-4y^3)$$
$$= -\int_{-y^4}^{y^2} \frac{x\sin(xy)}{1+\cos(xy)}\, dx + 2y\ln\left(1+\cos y^3\right) + 4y^3\ln\left(1+\cos y^5\right).$$
$$g''(y) = -\int_{-y^4}^{y^2} \frac{x^2\cos(xy)(1+\cos(xy)) + x^2\sin(xy)\sin(xy)}{(1+\cos(xy))^2}\, dx + 2\ln\left(1+\cos y^3\right) - \frac{6y^3\sin y^3}{1+\cos y^3}$$
$$+ 12y^2\ln\left(1+\cos y^5\right) - \frac{20y^7\sin y^5}{1+\cos y^5}$$
$$= -\int_{-y^4}^{y^2} \frac{x^2}{1+\cos(xy)}\, dx + 2\ln\left(1+\cos y^3\right) - \frac{6y^3\sin y^3}{1+\cos y^3}$$
$$+ 12y^2\ln\left(1+\cos y^5\right) - \frac{20y^7\sin y^5}{1+\cos y^5}$$

On a alors $g'(0) = 0$ et $g''(0) = 2\ln 2 > 0$ ce qui prouve que $y = 0$ est un minimum local de g.

Comme $g(0) = 0$ de manière évidente, l'approximation de 2ème ordre de g en 0 est

$$g(y) = \ln 2y^2 + o(y^2)$$

On trouve alors

$$g(0.01) \approx \ln 2 \cdot (0.01)^2 = 10^{-4}\cdot \ln 2$$

$$\iint_D x \cdot \sin(xy)\, dxdy.$$

Exercice 6
On a

$$\iint_D x\cdot\sin(xy)\,dA=\int_0^\pi\int_0^1 x\cdot\sin(xy)dy\,dx$$
$$\int_0^\pi -\cos(xy)\big|_{y=0}^{y=1}\,dx=\int_0^\pi(1-\cos x)\,dx=[x-\sin x]_0^\pi=\pi.$$

Exercice 7
La fonction $f(x,y)$ est séparable. On obtient alors

$$\begin{aligned}\iint_D y\cdot\frac{e^{2x+y^2}}{1+e^x}\,dA&=\int_0^1\int_0^2 y\cdot\frac{e^{2x+y^2}}{1+e^x}dy\,dx\\&=\int_0^1\frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx\cdot\int_0^2 ye^{y^2}dy=\int_1^e\frac{u}{1+u}\,du\cdot\left[\frac{1}{2}e^{y^2}\right]_0^2\\&=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)\cdot\int_1^e\left[1-\frac{1}{1+u}\right]\,du=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)\cdot[(e-1)-\ln(1+e)+\ln 2]\\&=\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)\cdot\left(e-1+\ln\frac{2}{1+e}\right)\end{aligned}$$

Exercice 8
On intègre d'abord en y et par parties avec $f'=1$ et $g=\arctan(y/x)$:

$$\begin{aligned}\int_0^1 1\cdot\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\,dy&=y\arctan(y/x)\Big|_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 y\cdot\frac{1/x}{1+\frac{y^2}{x^2}}\,dy\\&=\arctan(1/x)-x\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}\,dy=\arctan(1/x)-\frac{1}{2}x\cdot\ln\left(x^2+y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=1}\\&=\arctan(1/x)-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+x\ln x.\end{aligned}$$

Il reste à intégrer cette expression en x entre 0 et $\sqrt{3}$. Pour le 1er terme, on utilise une intégration par parties et pour les termes 2 et 3 un changement de variables ($u=x^2$) :

$$\begin{aligned}\int_0^{\sqrt{3}}1\cdot\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\,dx&=x\cdot\arctan(1/x)\Big|_{0^+}^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}x\cdot\frac{-1/x^2}{1+1/x^2}\,dx=\sqrt{3}\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3})+\int_{0^+}^{\sqrt{3}}x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx\\&=\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\ln 4=\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6}+\ln 2.\end{aligned}$$

$$\int_0^{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)\,dx=-\frac{1}{4}\int_0^3\ln(1+u)=-\frac{1}{4}(1+u)\left[\ln(1+u)-1\right]\Big|_0^3=-(\ln 4-1)-\frac{1}{4}.$$

$$\int_0^{\sqrt{3}}x\ln x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^3\ln u\,du=\frac{1}{4}\left[u(\ln u-1)\right]_0^3=\frac{3}{4}(\ln 3-1).$$

En sommant ces 3 termes on obtient le résultat cherché :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{6}-\ln 2+\frac{3}{4}\ln 3$$

On a utilisé pour calculer le 3ème terme que $\lim\limits_{u\to 0^+}u\ln u=0$ (Analyse I) et pour le 1er terme que $\lim\limits_{x\to 0^+}\arctan(1/x)=\frac{\pi}{2}$.