Série 22

Exercice 1
Posons $g(y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-yx}}{x}\, dx$ pour $y > 0$.

(a) Vérifier que $g(y)$ est bien définie et que les conditions de l'application du théorème du cours sont satisfaites
[Indication : pour $x \to 0$ calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} - e^{-yx}}{x}$]

(b) Calculer $g'(y)$.

(c) En déduire $g(y)$ puis celle de $I(a,b) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$.

Exercice 2
(a) Calculer

$$g(y) = \int_0^\infty e^{-yx^2}\, dx.$$

en utilisant la formule - que l'on démontrera plus tard dans le cours :

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

(b) En déduire $g'(y)$

(c) En utilisant le théorème du cours sur les intégrales à paramètres, déduire de (a) et (b) la valeur de

$$I(y) = \int_0^\infty x^2 e^{-yx^2}\, dx$$

(Vérifier au préalable que $g(y)$ est bien définie et que les conditions de l'application du théorème du cours sont satisfaites !)

(d) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx$.

Exercice 3
Calculer l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x(1+x^2)}\, dx$$

en considérant la fonction $g(y) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\arctan(yx)}{x(1+x^2)}\, dx$ ($y \geq 0$) et en calculant sa dérivée $g'(y)$.
(Vérifier au préalable que $g(y)$ est bien définie et que les conditions de l'application du théorème du cours sont satisfaites !)

Exercice 4
On pose
$$g(y) = \int_0^y \ln\left(\frac{1+y^2+x^2}{1+2x^2}\right)\, dx$$
Calculer $g'(y)$ puis $\lim_{y\to\infty} g'(y)$.

Exercice 5
Montrer que la fonction
$$g(y) = \int_{-y^4}^{y^2} \ln\left(1+\cos(yx)\right)\, dx$$
admet un minimum local en $y=0$.
Déterminer son approximation de 2ème ordre autour de $y=0$ et l'utiliser pour calculer une valeur approchée de $g(0.01)$.

Exercice 6
Soit $D = [0,\pi]\times[0,1]$. Calculer
$$\iint_D x\cdot\sin(xy)\, dxdy.$$

Exercice 7
Soit $D=[0,1]\times[0,2]$. Calculer
$$\iint_D y\cdot\frac{e^{2x+y^2}}{1+e^x}\, dxdy.$$

Exercice 8
Soit $D=[0,\sqrt{3}]\times[0,1]$. Calculer
$$\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\, dxdy.$$
Indication : intégrer d'abord en y puis en x